D. SIVOUKHINE

COURS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE

3 ELECTRICITÉ

ÉDITIONS MIR

Д. В. СИВУХИН

ОБЩИЙ КУРС ФИЗИКИ

т. III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

D. SIVOUKHINE

COURS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE

Tome III

ÉLECTRICITÉ

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe
par SERGUEÏ MEDVÊDEV

На французском языке

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1977

© Traduction Française Editions Mir, 1983

AVANT-PROPOS

L'étude de l'électricité comporte trois groupes de questions. Le premier concerne les notions fondamentales et les principes généraux qui sont à la base des phénomènes électriques et magnétiques; le deuxième concerne les propriétés électriques et magnétiques des substances, et enfin les questions du troisième groupe embrassent les applications de l'électricité.

Dans ce cours ce sont surtout les questions du premier groupe qui seront traitées avec toute l'ampleur nécessaire. Nous adoptons pour cela la méthode d'induction; les notions et les principes de base sont établis par généralisation des données expérimentales qui ne présentent elles-mêmes qu'un domaine de validité limité. Une succession continue de généralisations nous conduira petit à petit aux équations de Maxwell que nous utiliserons largement dans la deuxième partie de ce volume.

Il est bien naturel que dans un cours de Physique générale on ne saurait traiter avec une ampleur égale les propriétés électriques et magnétiques des substances. D'ailleurs une étude approfondie de ces propriétés doit se fonder sur la mécanique quantique et par conséquent faire l'objet de cours spéciaux. Néanmoins nous nous sommes efforcés de traiter ces questions aussi largement qu'on peut le faire dans un cours destiné aux étudiants des premières années d'étude. Nous faisons largement appel à la thermodynamique, sans laquelle on ne peut donner un exposé clair et complet ni des questions particulières, ni des concepts généraux de l'électrodynamique macroscopique.

Nous avons accordé aux applications de l'électricité beaucoup moins d'attention que ne le méritent ces questions. Quelques questions seulement ont été retenues et encore ne les traitons-nous que du point de vue des principes de calcul.

Nous avons adopté dans notre cours le système gaussien d'unités de mesure. Nous avons évoqué dans la préface au tome I les raisons qui nous ont incité à rejeter le Système International. Nous revenons encore une fois sur cette question au § 85 de ce tome. Nous ne pouvons cependant oublier qu'à l'école secondaire et dans les écoles d'ingénieurs l'enseignement de la physique se fonde sur le système SI. Ce même système est de plus en plus largement utilisé dans les publications périodiques, notamment celles traitant des applications techniques. Aussi avons-nous jugé utile d'exposer au § 85 les principes d'établissement de ce système d'unités pour l'électrodynamique ainsi que ses rapports avec le système gaussien. Un tableau, fondé sur une règle générale, aidera à transformer les formules écrites dans un système d'unités en formules fondées sur l'autre système. En outre nous donnons en appendice la liste des principales formules de l'électrodynamique écrites dans le système SI. Le lecteur retrouvera dans cet appendice sous le même numéro les formules figurant dans le cours en système gaussien. Au cas où une formule manquerait, la reconversion s'effectue aisément à l'aide du tableau 1 dont il a été question ci-dessus. Enfin, dans le tableau 2, sont consignées les formules de conversion des unités SI en unités gaussiennes.

Tout comme les deux premiers, ce troisième tome est fondé sur les cours que nous avons faits depuis 1957 aux étudiants de deuxième année de l'Institut de Physique technique de Moscou. Aussi tout ce qui a été dit dans les préfaces aux premiers tomes sur les objectifs et la méthode d'enseignement de la physique s'applique à ce troisième tome.

Nombre de problèmes donnés dans ce tome avaient figurés aux examens écrits et dans les compositions. Les énoncés de ces problèmes ont été élaborés par les collaborateurs de la chaire de Physique générale.

Les expériences de démonstration qui accompagnaient les cours ont été utiles non seulement aux étudiants, mais à nous-mêmes. Nous voulons remercier ici les assistants qui les ont élaborées et réalisées.

Je suis heureux de pouvoir exprimer toute ma gratitude au professeur I. S. Gorbagne et aux collaborateurs de la chaire de Physique expérimentale de l'Université d'Etat de Kiev, ainsi qu'au professeur S. S. Guerstein, qui ont bien voulu se donner la peine de se pencher sur le manuscrit de cet ouvrage. Leurs conseils et leurs remarques bienveillantes ont largement contribué à l'amélioration de notre cours d'Electricité.

L'auteur

INTRODUCTION

§ 1. Action à distance et interaction des champs

1. L'expérience montre qu'entre les corps aimantés ou les corps portant des charges électriques, ainsi qu'entre les corps parcourus par des courants électriques s'exercent des forces que l'on appelle *forces électrodynamiques* ou *électromagnétiques*. Notons que la question de la nature de ces forces a donné lieu à des controverses scientifiques. Le point de vue le plus ancien se fondait sur la conception de l'*action directe à distance* des corps en présence, sans aucun agent matériel intermédiaire. D'après l'autre conception admise à l'heure actuelle, les interactions font intervenir un milieu intermédiaire matériel appelé *champ électromagnétique*.

2. En théorie des phénomènes électriques et magnétiques le concept de l'action à distance a prévalu jusqu'aux dernières décennies du XIXe siècle. L'idée maîtresse de cette théorie avait été empruntée à la théorie de la gravitation universelle. Les succès éclatants de la mécanique céleste fondée sur la loi de la gravitation universelle de Newton (1642-1727) et la faillite de toutes les autres interprétations de la gravitation, conduisirent de nombreux savants à admettre que ni la gravitation ni les forces électriques et magnétiques ne nécessitaient aucune explication, étant des propriétés inhérentes à la matière. De l'avis de ces savants, la théorie de l'électricité ne pouvait avoir d'autre objet que d'établir les *lois élémentaires* des forces électriques et magnétiques et d'expliquer tous les phénomènes électriques et magnétiques en termes de ces lois. On entendait par lois élémentaires les lois permettant de calculer les forces d'interaction à distance s'exerçant entre des *charges ponctuelles électriques*, des *pôles magnétiques ponctuels* et entre des *éléments de courant*, i.e. entre des segments infiniment courts de fils infiniment fins parcourus par des courants électriques. De par leur contenu et leur forme ces lois rappelaient et parfois reproduisaient la loi de la gravitation universelle de Newton. Telles sont, par exemple, les *lois de Coulomb* (1736-1806) sur l'interaction des charges électriques et des pôles magnétiques.

L'appareil mathématique de la théorie de l'action à distance a été porté à un niveau élevé grâce aux travaux de Laplace (1749-

1827), d'Ampère (1775-1836), de Poisson (1781-1840), de Gauss (1777-1855), d'Ostrogradski (1801-1861), de Green (1793-1841), de Franz Neumann (1798-1895), de Carl Neumann (1832-1925), de Wilhelm Weber (1804-1891), de Kirchhoff (1824-1887) et de nombreux autres mathématiciens et physiciens. Cette théorie formellement simple qui reposait sur des bases mathématiques claires était mathématiquement rigoureuse et concrète. Elle ne faisait intervenir aucune hypothèse douteuse sur la nature physique des forces électriques et magnétiques et se fondait sur des faits empiriques indubitables et sur leurs généralisations. Les conséquences quantitatives de la théorie étaient solidement justifiées et dignes de foi (bien entendu dans les limites où les lois élémentaires étaient confirmées par l'expérience). Il n'est donc pas étonnant que la majorité des physiciens restèrent fidèles à cette théorie jusqu'au dernier quart du XIXe siècle. Néanmoins un accord quantitatif entre théorie et expérience dans le domaine des phénomènes étudiés ne peut constituer une preuve suffisante de la justesse du concept de l'action à distance.

3. Parmi les rares physiciens du XIXe siècle qui réfutaient la théorie de l'action à distance, on doit citer en premier lieu le grand physicien Faraday (1791-1867), fondateur de la théorie physique du champ électromagnétique. Ce physicien ne pouvait être captivé par les conceptions formelles des mathématiciens. Son esprit libre ne pouvait subir le joug des conceptions admises et ne pouvait admettre l'idée qu'un corps pourrait exercer son action en un endroit où non seulement il ne se trouve pas, mais s'en trouve séparé par un espace absolument vide. Faraday affirmait qu'un corps ne pouvait agir sur un autre corps que par contact direct ou par l'intervention d'un certain milieu.

Dans le cas d'interactions électromagnétiques, le rôle de milieu intermédiaire était attribué à l'éther universel, milieu hypothétique remplissant tout l'espace compris entre les corps et les ultimes particules composant les corps. Selon Faraday, chaque fois qu'un corps était électrisé ou aimanté, l'éther environnant devait subir des altérations rappelant les déformations élastiques et les tensions et les pressions qui y sont liées. C'est en termes de telles tensions et pressions que Faraday cherchait à expliquer les interactions électromagnétiques des corps. Tandis que dans la théorie de l'action à distance c'était l'étude des charges et des courants en tant que centres des forces qui importait, dans la théorie de Faraday c'était l'étude du milieu ambiant qui devait prédominer. Cet espace où s'exercent les forces à l'étude s'appelle le *champ électromagnétique.*

C'est Heinrich Hertz (1857-1894) qui donna une brillante appréciation des conceptions de Faraday. Dans un discours prononcé à Heidelberg en 1889, il dit notamment:

« On disait à Faraday que lorsqu'on électrisait un corps, on y introduisait quelque chose, mais il voyait bien que les changements qui en résultaient ne se manifestaient qu'en dehors du corps et non en son intérieur. On enseignait à Faraday que les forces ne faisaient qu'un saut à travers l'espace, mais il voyait bien que ces forces exerçaient une grande influence sur la substance remplissant l'espace qui était soi-disant franchi d'un saut. Faraday lisait dans des publications que l'électricité existait sûrement, mais que les forces électriques étaient sujettes à controverse. Or il voyait que l'action de ces forces était on ne peut plus tangible, mais il n'arrivait pas à déceler l'électricité. Et c'est alors qu'une révolution se fit dans son esprit. Les forces électriques et magnétiques devinrent pour lui des faits réels, tangibles, tandis que l'électricité et le magnétisme devinrent des choses dont l'existence était discutable. Il imaginait, voyait presque dans l'espace les lignes de force qui symbolisaient pour lui les forces qu'il pensait comme des tensions, des tourbillons, des courants et toute autre chose encore indéfinie ; mais elles étaient là, ces lignes de force, agissant les unes sur les autres, déplaçant et poussant les corps dans tous les sens, se propageant dans l'espace et communiquant l'excitation d'un point à un autre ».

4. Appliquant ces conceptions à des cas concrets, Faraday se contentait en général de descriptions qualitatives des phénomènes qu'il étudiait. Comme il n'usait jamais de formules mathématiques exactes, les développements et les démonstrations de Faraday étaient parfois réfutés par ses contemporains. Mais parmi les partisans des idées de Faraday se trouvait Maxwell (1831-1879), savant génial qui connaissait à fond les méthodes mathématiques de son temps. C'est Maxwell qui mit les conceptions de Faraday en équations. Il généralisa les données expérimentales existantes et en ajouta d'autres. En procédant ainsi il réussit, au début des années soixante du XIXe siècle, à établir un système d'équations résumant sous forme compacte et exacte toutes les lois quantitatives du champ électromagnétique. On serait tenté de dire que c'est l'établissement de ces équations qui constitua la plus importante découverte de la Physique au XIXe siècle.

5. Tout d'abord la théorie de Maxwell ne trouva pas grande audience. La principale cause de cette situation résidait en ce que jusqu'à la fin du XIXe siècle l'électrodynamique ne s'occupait que de champs électriques et magnétiques *continus* ou *presque continus*. Or dans le cas de tels champs les équations de Maxwell se ramènent aux équations de l'action à distance et les deux théories conduisent aux mêmes conclusions. Avec des champs électromagnétiques continus aucune expérience ne permet de décider laquelle des deux conceptions sur la nature des forces d'interaction est correcte et laquelle est sûrement fausse. Il faut pour cela étudier les *champs alternatifs*. Maxwell montra que ses équations impliquent l'existence d'*ondes électromagnétiques* et il en calcula leur vitesse de propagation. Ce calcul montra que dans le vide la vitesse de propagation de ces ondes coïncidait avec celle de la lumière (300 000 km/s). Un très grand nombre de phénomènes sont ressentis comme si cette vitesse de propagation était *infinie*, autrement dit comme si la théorie de l'action à distance était vraie. Des ondes électromagnétiques

furent produites et étudiées pour la première fois par Hertz en 1887-1888. On constata que leurs propriétés étaient en tout point conformes aux prévisions de la théorie de Maxwell. Pour la théorie de l'action à distance l'existence des ondes électromagnétiques était inexplicable. Aussitôt après publication des résultats de Hertz la question de la nature des interactions électrodynamiques fut tranchée une fois pour toutes et c'est la théorie du champ qui en sortait victorieuse. Un rôle fort important dans le développement de la théorie de Maxwell revient à l'invention de la radio par A. S. Popov (1859-1906) ; cette nouvelle technique des télécommunications devait plus tard transformer la science, les techniques et la vie de l'homme.

6. Les physiciens du XIXe siècle étaient persuadés que les phénomènes électriques et magnétiques ne sauraient être expliqués que lorsqu'on sera en mesure de les ramener à des causes mécaniques, par exemple à des tensions élastiques, à des pressions ou à d'autres changements mécaniques du milieu ambiant. Dans la théorie de Faraday-Maxwell ce rôle mécanique était attribué à l'*éther universel* et on déploya beaucoup d'ingéniosité pour bâtir une théorie mécanique des phénomènes électriques et magnétiques. Maxwell lui-même était à l'origine de ces travaux, puisque dans ses premières recherches sur la théorie de l'électricité il utilisait des modèles mécaniques du champ électromagnétique. Or pour représenter les différentes propriétés du champ électromagnétique, il fallait recourir à des modèles différents qui se contredisaient mutuellement. Pour la théorie de Maxwell ces modèles mécaniques jouaient le même rôle que jouent les échafaudages dans le bâtiment ; une fois que celui-ci est achevé, on enlève les échafaudages. De même dans la dernière variante de la théorie de Maxwell, exposée dans son « Traité d'électricité et de magnétisme » publié en 1873, les modèles mécaniques ne figurent plus. Tous les efforts déployés pour construire une théorie mécanique non contradictoire des phénomènes électriques et magnétiques ont été vains, si ce n'est d'avoir démontré qu'il était par principe impossible d'élaborer une représentation mécanique de l'Univers. La théorie atomique et moléculaire démontra que les forces élastiques résultaient elles-mêmes d'interactions électriques entre des particules constituant les corps et portant des charges électriques. Après que l'élasticité fut ramenée à l'électricité, il devint évident qu'il était absurde de vouloir ramener les forces électriques aux forces élastiques. Les forces électriques apparaissaient comme plus « simples » et plus « compréhensibles » que les forces élastiques. La physique moderne ne cherche plus à illustrer le concept de champ électromagnétique par des images telles que déformations élastiques, tensions, pressions, etc. La physique moderne affirme seulement que le champ *existe réellement* et qu'il est, tout comme les substances, *une des formes d'existence de la matière*. Le champ est caractérisé par une énergie, une impulsion et par d'autres propriétés physiques.

C'est par l'intermédiaire des champs que se réalisent les interactions électromagnétiques des corps. Un corps A portant une charge électrique excite un champ électrique dans le milieu environnant. Ce champ se révèle par son action sur tout autre corps chargé B que l'on introduit dans ce champ. Mais le champ excité par les charges portées par le corps A existe réellement en tout point de l'espace, *même si on n'y place aucun autre corps chargé B*. C'est en cela que réside toute la différence entre la théorie du champ et la théorie de l'action directe à distance. Notons que cette dernière théorie fait également intervenir la notion de champ, qui y est considérée non comme une réalité physique, mais comme un *concept mathématique auxiliaire* introduit uniquement pour la commodité de la description des interactions électromagnétiques. En théorie de l'action à distance, il est dénué de sens de parler de l'existence d'un champ en un point quelconque de l'espace tant qu'on n'y aura pas placé un corps d'épreuve chargé subissant l'action de la force électromagnétique.

7. La théorie de Maxwell ne faisait aucune différence de principe entre les milieux matériels et le vide (éther). Le vide y était considéré comme l'*un des milieux* ne se distinguant de tous les autres que quantitativement, notamment par les valeurs de la permittivité diélectrique, de la perméabilité magnétique et de la conductibilité électrique. Cette question ne fut précisée que grâce à la *théorie électronique* élaborée par le grand physicien hollandais H. A. Lorentz (1853-1928). Cette théorie fut élaborée en détail avant que fut découvert l'électron et que fut ébauchée la structure de l'atome. [L'électron fut découvert en 1897 par J. J. Thomson (1856-1940), le premier modèle de l'atome fut avancé en 1911 par Rutherford (1871-1937) et la théorie de Bohr (1885-1962) ne fit son apparition qu'en 1913.] En usant d'un langage moderne, on peut résumer le contenu de la théorie électronique de la façon suivante. Toute substance est composée de noyaux atomiques portant des charges positives et d'électrons portant des charges négatives. Il n'est pas essentiel de préciser pour l'instant la structure de l'atome et de son noyau. Ce qui importe c'est que le vide est un *milieu universel* où s'excite le champ électromagnétique. Du point de vue de la théorie de l'électricité, toute substance doit être considérée comme le vide altéré par la présence de noyaux atomiques et d'électrons. Les charges portées par ces particules excitent des champs électromagnétiques qui se superposent au champ extérieur dans lequel a été placée la substance. Le champ électromagnétique régnant dans la substance résulte de cette superposition. De ce fait l'étude du champ électromagnétique régnant dans les substances se ramène à celle du champ dans le vide. C'est ce que nous ferons par la suite, mais nous commencerons par l'étude des champs électrique et magnétique dans le vide pour voir ensuite les distorsions que subissent ces champs lorsqu'on y introduit des

noyaux atomiques et des électrons constituant les substances. C'est en suivant cette voie que la théorie électronique assura une plus profonde compréhension des équations de Maxwell appliquées à l'étude des substances et constitua une base rationnelle pour expliquer les propriétés électriques et magnétiques des substances d'un point de vue atomistique. Il est évident que Lorentz et ses disciples ne pouvaient utiliser que les conceptions classiques, ce qui faisait naître des difficultés de principe qui ne purent être levées qu'après que la théorie électronique fut reconstruite sur des fondements quantiques.

8. *Les équations de Maxwell constituent une généralisation des données expérimentales. Leur démonstration doit donc résulter de la comparaison des conclusions que l'on peut en tirer avec les données expérimentales.* Ces équations qui sont le fondement de toute l'électrodynamique peuvent être considérées comme les *axiomes fondamentaux de l'électrodynamique* qui y jouent le même rôle que les équations de Newton en mécanique classique. On pourrait donc exposer l'électrodynamique d'une façon *purement déductive* en postulant les équations de Maxwell. Ce procédé ne convient cependant pas à une première étude de l'électrodynamique de Maxwell et nous préférons la *méthode inductive* qui permet de mieux faire ressortir son essence. Nous commencerons par la description d'expériences simples qui se laissent décrire correctement aussi bien en termes de la théorie du champ qu'en ceux de la théorie de l'action directe à distance. En généralisant progressivement les lois de ces phénomènes simples nous aboutirons à des résultats qui, ne cadrant plus avec la théorie de l'action à distance, devront faire appel à la théorie du champ. On parviendra ainsi aux équations de Maxwell qui seront à la base de l'exposé qui leur fait suite.

§ 2. Charge électrique et intensité du champ électrique

1. En théorie de l'électricité les notions les plus importantes sont celles de *charge électrique* et d'*intensité de champ électrique*. On arrive à se faire une idée qualitative de ces notions en considérant les expériences les plus simples de l'électricité qui sont décrites dans le cours de physique élémentaire. Ici nous n'avons donc qu'à exposer l'aspect *quantitatif* de la question. Une définition quantitative exacte de la charge électrique et de l'intensité du champ électrique se ramène, comme pour toutes les autres grandeurs physiques, à la description du principe d'un procédé permettant de les mesurer.

2. Supposons d'abord que le champ électrique soit constant dans le temps. On dira que c'est un champ *électrostatique*. Il peut être excité par des charges électriques fixes. On appelle *corps* ou *charge d'épreuve* un corps portant une charge électrique tellement petite que sa présence ne donne pas lieu à une redistribution des

charges (par effet d'induction) dans les corps environnants. Prenons deux charges d'épreuve et plaçons-les successivement en un même point de l'espace de façon qu'elles soient fixes par rapport à un même référentiel. Comme le champ ne varie pas au cours du temps, ces charges seront soumises à l'action du même champ. Notons F_1 et F_2 les forces appliquées à ces charges fixes. La généralisation de l'expérience conduit au résultat suivant. Les forces F_1 et F_2 sont de même sens ou de sens diamétralement opposés et le rapport de leurs grandeurs ne dépend pas de la position du point où on place les corps d'épreuve. Le rapport F_1/F_2 caractérise donc les corps d'épreuve et non pas le champ dans lequel ils se trouvent. On peut donc caractériser l'état d'électrisation du corps d'épreuve par un nombre déterminé q que l'on appelle *charge électrique* du corps. Par définition le rapport des charges q_1 et q_2 des corps d'épreuve est égal au rapport des forces F_1 et F_2 auxquelles ils se trouvent soumis lorsqu'on les place successivement en un même point du champ:

$$\frac{q_1}{q_2}=\frac{F_1}{F_2}. \tag{2.1}$$

On suppose que les forces F_1 et F_2 (de même que les charges q_1 et q_2 que l'on compare) sont de même signe si ces forces sont de même sens, et sont de signes contraires si les forces sont dirigées en des sens opposés.

Le fait que nous introduisons cette définition en considérant des charges d'épreuve ne porte aucune atteinte à sa généralité. En effet, quelle que soit la dimension du corps d'épreuve, on peut toujours le placer dans un champ électrique créé par des charges tellement éloignées que par rapport à ce champ ce corps se comporte comme un corps d'épreuve.

On peut poser égale à l'unité la charge d'un corps quelconque. La mesure du rapport des forces F_1/F_2 constituera alors un procédé de mesure « absolue » d'une charge.

3. *La charge électrique que porte un corps ne dépend pas du référentiel (d'inertie) par rapport auquel on la mesure.* La charge est *invariante* par rapport aux changements des référentiels d'inertie. Cette proposition découle directement du principe de la relativité et de la méthode que nous avons adoptée pour comparer les charges électriques par mesure des forces auxquelles sont soumises les charges *immobiles*. Quel que soit le référentiel, la charge y est la même pour la même raison que la masse au repos de tout corps ne dépend pas du référentiel. Il est clair que toute mesure fournit non pas la valeur absolue de la charge, mais seulement le *rapport des charges* portées par les corps considérés. Ce ne sont pas les charges elles-mêmes qui sont invariantes, mais les rapports des charges. Mais si on convient de poser que la charge d'un certain corps est la même dans tous les référentiels, cette convention devient valable pour toutes les autres

charges électriques. C'est en ce sens que l'on doit comprendre l'in variance de la charge électrique vis-à-vis du choix du référentiel.

4. Nous étendons la relation (2.1) à tous les champs variables. Cette relation est valable, que le champ soit constant ou variable dans le temps. La seule chose qui importe est qu'aux instants où on mesure les forces F_1 et F_2 le champ agissant sur les charges q_1 et q_2 soit le même et que les charges q_1 et q_2 restent immobiles. Cette assertion est assurément une généralisation des données expérimentales.

La force qui agit sur une charge électrique d'épreuve unitaire et fixe est appelée intensité de champ électrique que l'on dénote par la lettre $\boldsymbol{E}$. Si dans la relation (2.1) on pose $q_1 = 1$, on obtient $F_1 = E$. En supprimant l'indice 2 et en écrivant cette relation sous forme vectorielle, on arrive à calculer la force $\boldsymbol{F}$ s'exerçant dans le champ électrique $\boldsymbol{E}$ sur la charge ponctuelle immobile q:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}. \tag{2.2}$$

L'intensité $\boldsymbol{E}$ de champ électrique est un vecteur puisque la charge électrique q est un scalaire et la force $\boldsymbol{F}$ est un vecteur (cf. t. I, § 7).

5. Il est essentiel de préciser que la charge est immobile pour pouvoir définir l'intensité du champ électrique, et ce pour la raison suivante. Les forces s'exerçant sur une charge électrique dépendent non seulement du champ électrique mais aussi du *champ magnétique*. Or l'expérience montre que le champ magnétique n'agit que sur les charges *en mouvement*. Ainsi, en imposant que les charges électriques soient immobiles, nous excluons l'influence du champ magnétique.

Une charge qui est fixe par rapport à un référentiel donné ne l'est plus dans un autre référentiel en mouvement par rapport au premier. La force totale $\boldsymbol{F}$ appliquée à la charge est la même dans les deux référentiels (dans l'approximation non relativiste). Mais dans le référentiel par rapport auquel la charge est au repos c'est une force d'origine exclusivement électrique, tandis que dans le référentiel par rapport auquel la charge est en mouvement, cette force totale se compose d'une force d'origine électrique et d'une force d'origine magnétique. Si on mesure dans ce second référentiel l'intensité du champ électrique à l'aide d'une charge d'épreuve immobile, on trouvera une valeur différente de celle que l'on aura déterminé dans le premier référentiel. On en conclut que *la subdivision du champ en un champ électrique et un champ magnétique dépend du choix du référentiel*. Les champs électrique et magnétique sont donc indissolublement liés l'un à l'autre et il est impossible de subdiviser l'ensemble des phénomènes en phénomènes purement électriques et phénomènes purement magnétiques. Lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre, les champs électrique et magnétique se transforment d'une façon déterminée. Les lois de ces transformations sont

exposées dans la théorie de la relativité. Il en résulte qu'*une théorie complète des phénomènes électromagnétiques doit être relativiste.*

6. L'électricité a pour propriété fondamentale d'exister sous deux formes — électricité *positive* et électricité *négative.* Partout autour de nous les quantités de ces deux formes d'électricité s'équilibrent assez exactement, ce qui ne peut nous étonner puisque les charges de même signe se repoussent et les charges de signe contraire s'attirent. Une autre propriété fondamentale de l'électricité est la *loi de la conservation de la charge électrique*, qui est une généralisation des faits d'expérience. Selon cette loi *la charge totale d'un système ne peut varier si la frontière qui le délimite n'est pas traversée par des particules chargées.* Cela n'implique nullement la conservation des charges positives et négatives prises séparément. Par exemple, si un système comporte des particules de grande énergie, des photons de haute énergie peuvent y être créés. Des photons peuvent aussi pénétrer dans le système de l'extérieur. Lorsque les photons de haute énergie entrent en interaction avec les atomes d'une substance, il se produit une réaction conduisant à la création d'un électron portant une charge négative et d'un positron porteur d'une charge positive. Par rapport à une telle réaction, l'énergie du photon est dite grande si elle est supérieure à la somme des énergies au repos de l'électron et du positron. La réaction inverse où une paire électron-positron disparaît (est annihilée) avec émission de photons est également possible. Les réactions de cette sorte font varier les quantités d'électricité positive et négative contenues dans ces systèmes sans que sa charge totale varie. Dans ce tome nous n'aurons affaire qu'à des particules de « basses » énergies ne pouvant donner lieu à de telles réactions. Dans ces conditions il y a conservation aussi bien de la charge totale que des charges positives et négatives prises séparément.

CHAPITRE PREMIER

LE CHAMP ÉLECTRIQUE

§ 3. La loi de Coulomb et le principe de superposition des champs électrostatiques

1. L'électrostatique est consacrée à l'étude des champs électriques créés par des *charges immobiles*. Nous commencerons par l'étude des champs électrostatiques dans le vide. La loi quantitative fondamentale de l'électrostatique fut découverte par Coulomb en 1785. Elle s'énonce comme suit.

Dans le vide la force d'interaction F de deux charges ponctuelles est orientée suivant la droite passant par ces charges; elle est proportionnelle aux charges q_1 et q_2 et inversement proportionnelle au carré de leur distance r_{12}. La force F est une force d'attraction si les charges sont de signes contraires et une force de répulsion si les charges sont de même signe:

$$F = C\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}, \tag{3.1}$$

où C est un coefficient numérique. Comme nous disposons de procédés indépendants pour la mesure de F, q et r, il est possible de s'assurer par des expériences directes que la force F varie en raison inverse du carré de la distance r et qu'elle est proportionnelle au produit des charges q_1 et q_2

Coulomb découvrit la loi qui porte son nom en mesurant à l'aide d'une *balance de torsion*, dont il est l'inventeur, les forces d'attraction et de répulsion s'exerçant entre de petites billes portant des charges électriques. (Les expériences de Coulomb sont bien connues et on en trouve la description dans tous les cours de physique élémentaire.) Notons que cette même loi fut établie près de 11 ans avant Coulomb par H. Cavendish (1731-1810) à partir de mesures beaucoup plus précises mais indirectes (cf. § 6, pt. 4). Mais comme Cavendish omit de publier ses résultats, ils restèrent inconnus pendant près de 100 ans. C'est Maxwell, premier directeur du laboratoire de Cavendish, qui découvrit dans les archives le manuscrit relatant ces résultats fondamentaux de Cavendish et le publia en 1879.

Le caractère ponctuel des charges en interaction, dont il est question dans l'énoncé de la loi de Coulomb, signifie que *les dimensions linéaires du corps portant ces charges sont négligeables par rapport à leur distance de séparation.* On suppose encore que les charges se

trouvent dans le *vide absolu*, quoique la vérification expérimentale de la loi de Coulomb soit généralement réalisée dans l'atmosphère ambiante. En principe on pourrait assurer le passage à un vide absolu en diminuant indéfiniment la pression de l'air. Mais on n'a pas besoin de le faire puisque l'influence qu'exerce l'air sur la valeur des forces d'interaction est tellement petite que dans la majorité des cas on peut la négliger.

2. On peut attribuer à la constante C figurant dans (3.1) n'importe quelle valeur numérique et n'importe quelle dimension. En procédant ainsi on pourrait définir une infinité de *systèmes d'unités* mais tous ne sauraient être commodes. En physique il est particulièrement commode d'utiliser pour l'étude du champ électromagnétique le *système absolu* ou *gaussien d'unités de mesure* et c'est ce système que nous utiliserons de préférence. Le système gaussien est le système d'unités C.G.S. complété par les unités de mesure des grandeurs électriques et magnétiques. C'est donc une combinaison de deux systèmes d'unités: C.G.S.E. et C.G.S.M. (*systèmes* C.G.S. d'*unités de mesures absolues électrostatique et électromagnétique*). Les unités « purement » électriques du système gaussien (charge, intensité de champ électrique, potentiel électrique, intensité de courant, résistance des conducteurs, etc.) coïncident avec celles du système C.G.S.E., tandis que les unités « purement » magnétiques (intensité et induction du champ magnétique, moment magnétique, coefficients de self-induction et d'induction mutuelle, etc.) coïncident avec les unités correspondantes du système C.G.S.M. Nous décrirons le système C.G.S.M. au § 51 et ici nous décrirons le système C.G.S.E. Dans les systèmes C.G.S.E. et gaussien le coefficient de proportionnalité C de la loi de Coulomb n'a pas de dimension et on le pose égal à l'unité. La loi de Coulomb s'écrit donc

$$F=\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}. \tag{3.2}$$

La dimension de la charge électrique est définie par la formule

$$[q] = [F^{1/2}L] = [M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}],$$

et celle de l'intensité de champ électrique par la formule

$$[E] = [Fq^{-1}] = [M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}].$$

On prend pour unité de charge une charge ponctuelle qui exerce dans le vide sur une charge ponctuelle identique une force égale à 1 *dyne lorsque la distance entre ces charges ponctuelles est égale à* 1 cm. *On prend pour unité d'intensité de champ électrique l'intensité dans le vide d'un champ qui exerce une force de* 1 *dyne sur une charge ponctuelle unité.* Ces unités n'ont pas reçu de dénominations spéciales et on les appelle simplement unités *électrostatiques* C.G.S.E. de charge et d'intensité de champ électrique.

L'unité pratique de charge électrique est le *coulomb* (C). Par définition le coulomb représente la dixième partie de l'unité de charge C.G.S.M., soit approximativement $2{,}998 \cdot 10^9$ unités de charge C.G.S.E. Dans les calculs approximatifs on peut poser 1 C $= 3 \cdot 10^9$ unités de charge C.G.S.E. Le coulomb est une très grande unité de charge électrique puisque la force d'interaction de deux charges ponctuelles de 1 coulomb chacune, placées à 1 km l'une de l'autre, est égale à

$$F = \frac{q^2}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^{18}}{10^{10}} = 9 \cdot 10^8 \text{ dynes} = 9 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Dans le système SI on attache à la charge (et au courant électrique) une dimension propre indépendante de celles de longueur, de masse et de temps. Ce système sera décrit au § 85.

3. Sous forme vectorielle la loi de Coulomb s'écrit

$$\boldsymbol{F}_{ik} = \frac{q_i q_k}{r_{ik}^3} \boldsymbol{r}_{ik}, \tag{3.3}$$

où $\boldsymbol{F}_{ik}$ est la force que la charge q_i applique à la charge q_k, et $\boldsymbol{r}_{ik}$ est le rayon vecteur reliant la charge q_i à la charge q_k. L'intensité du champ créé par une charge ponctuelle q est donnée par l'expression

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{r^3} \boldsymbol{r}, \tag{3.4}$$

où $\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur reliant la charge q au point où on détermine l'intensité $\boldsymbol{E}$ du champ.

L'intensité $\boldsymbol{E}$ du champ électrique créé par plusieurs charges ponctuelles fixes q_1, q_2, . . . est égale à la somme vectorielle des intensités des champs que crée chacune de ces charges en l'absence de toutes les autres, i.e.

$$\boldsymbol{E} = \sum_i \frac{q_i}{r_i^3} \boldsymbol{r}_i, \tag{3.5}$$

où $\boldsymbol{r}_i$ est le rayon vecteur reliant la charge q_i au point d'observation. Cette proposition, qui est une généralisation des données expérimentales, est connue sous le nom de *principe de superposition des champs électrostatiques*. Il n'est pas exclu que ce principe soit en défaut à de très courtes distances, comparables ou inférieures aux dimensions du noyau atomique (10^{-13} cm).

La formule (3.5) permet en principe de calculer l'intensité du champ électrique créé par n'importe quel système de charges fixes. Si les charges ne sont pas ponctuelles, on doit les subdiviser en pensée en autant de petites parties qu'il est nécessaire pour qu'elles puissent être assimilées à des charges ponctuelles. Si la distribution des

charges électriques est continue, la somme (3.5) doit être remplacée par l'intégrale.

4. Pour visualiser les champs électriques on utilise souvent les *lignes de force*. Une ligne de force est une ligne mathématique dont la tangente en tout point par lequel elle passe coïncide avec la direction du vecteur $\boldsymbol{E}$ en ce même point. Par convention le sens positif d'une ligne de force est le même que celui du vecteur $\boldsymbol{E}$. Avec cette convention on peut dire que les lignes de force électriques partent

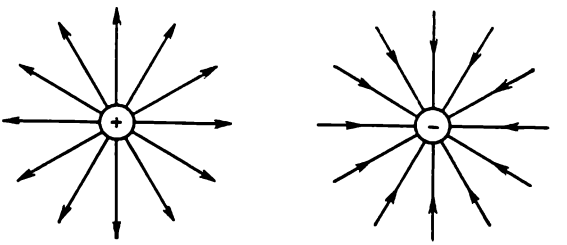


Fig. 1.

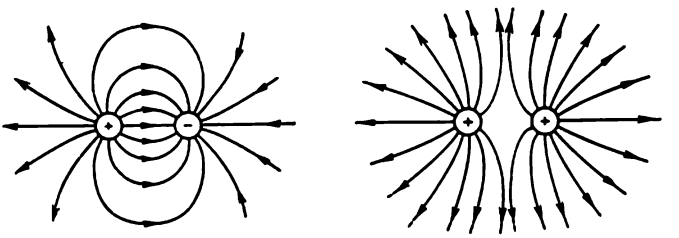


Fig. 2

des charges positives et aboutissent aux charges négatives. Nous montrerons au § 5 que dans une région de l'espace où il n'y a pas de charges électriques les lignes de force sont plus rapprochées là où l'intensité de champ $\boldsymbol{E}$ est plus grande, et plus espacées là où $\boldsymbol{E}$ est plus petite. Ainsi la densité des lignes de force donne une idée de l'intensité du champ électrique. La figure 1 représente les lignes de force de deux petites billes portant des charges uniformément réparties, l'une d'électricité positive et l'autre d'électricité négative ; sur la figure 2 on voit la distribution des lignes de force entre deux charges égales de signes contraires et entre deux charges égales de même signe.

Pour visualiser les lignes de force on prend un récipient en verre à fond plat que l'on remplit d'un liquide isolant, par exemple de l'huile de ricin, de la glycérine, etc. On répartit dans le liquide aussi uniformément que possible de petites particules de cristaux de

gypse, d'amiante ou de semoule de blé finement broyées et on y immerge des électrodes métalliques. Lorsqu'on relie ces dernières à une source d'électricité, on excite dans le liquide un champ électrique qui électrise les particules; les particules s'attirent mutuellement par leurs extrémités portant des charges de signes contraires et forment ainsi des guirlandes dirigées le long des lignes de force. La carte des lignes de force est déformée par les courants du liquide résultant des forces auxquelles il est soumis dans un champ électri-

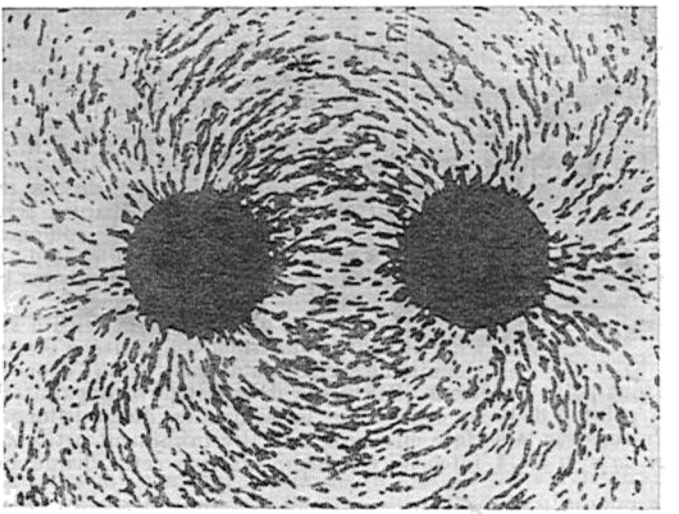


Fig. 3

que non homogène. C'est la méthode imaginée par Pohl (né en 1884) qui donne les meilleurs résultats. On colle à la surface d'une plaque de verre des électrodes en feuilles d'étain entre lesquelles on crée un champ électrique. On saupoudre ensuite la plaque de particules de forme allongée, de petits cristaux de gypse par exemple. Ces particules se déposent le long des lignes de force, comme le montre la figure 3 se rapportant au cas où des charges de signes contraires sont réparties sur deux rondelles de feuille d'étain.

La méthode des lignes de force peut être utilisée pour visualiser n'importe quel champ de vecteurs. Les lignes indiquant la direction d'un vecteur donné sont les lignes de ce vecteur; on leur attribue des dénominations spéciales correspondant à la signification physique ou géométrique du champ vectoriel considéré. Ainsi, en hydrodynamique, on introduit les *lignes de courant* marquant la direction du vecteur vitesse d'écoulement du fluide (cf. t. I, § 93). On visualise le champ magnétique par des *lignes de force magnétiques*, etc.

PROBLÈMES

1. On suspend à des fils de soie deux petites billes de masse $m = 0{,}1$ g chacune de manière qu'elles soient en contact. Après qu'on leur aura communiqué des charges électriques identiques, les billes s'écartent l'une de l'autre jusqu'à ce que leurs centres se trouvent à une distance $D = 6$ cm (fig. 4). Calculer la charge q d'une bille sachant que la longueur du fil de suspension est $l = 30$ cm.

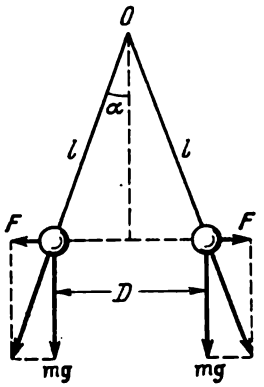


Fig. 4

Solution. A l'équilibre $F = mg \operatorname{tg} \alpha$. D'après la loi de Coulomb $F = q^2/D^2$, d'où

$$q = D\sqrt{mg \operatorname{tg} \alpha}.$$

Si l'angle est petit

$$q = D\sqrt{mg\alpha} = D\sqrt{\frac{mgD}{2l}} =$$

$$= 18{,}8 \text{ unités de charge C.G.S.E.} = 6{,}3 \cdot 10^{-9}\,\text{C}.$$

Cet exemple montre qu'on peut déceler même avec un électroscope grossier des charges très petites, de l'ordre d'un milliardième de coulomb.

2. Calculer l'intensité du champ électrique créé sur l'axe géométrique d'un disque infiniment mince chargé de façon uniforme.

Solution. Notons σ la densité superficielle de charge électrique (quantité d'électricité par unité de surface du disque). Selon l'énoncé σ a même valeur en tout point du disque. Par raison de symétrie, il apparaît clairement qu'en tout point A de l'axe géométrique, le champ E est dirigé le long de cet axe (fig. 5). Prenons sur la surface du disque une aire infiniment petite dS portant une charge $dq = \sigma\, dS$. L'intensité du champ créé par cette charge au point A

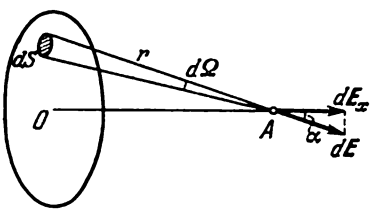


Fig. 5

sera $dE = \sigma\, dS/r^2$ et sa projection sur l'axe OA sera $dE_x = \sigma\, dS \cos\alpha/r^2$ ou $dE_x = \sigma\, d\Omega$, où $d\Omega = dS \cos\alpha/r^2$ est un angle solide sous lequel on voit l'aire dS du point A. Le champ total E s'obtient par intégration de dE_x par rapport à l'angle solide $d\Omega$:

$$E = \sigma\Omega, \tag{3.6}$$

où Ω est l'angle solide total sous lequel on voit le disque du point A. Si le rayon du disque est infiniment grand (plan chargé infiniment grand)

$$E = 2\pi\sigma. \tag{3.7}$$

3. Une des expériences qui permit à Coulomb de s'assurer que la force d'attraction s'exerçant entre deux charges ponctuelles de signes opposés variait en

raison inverse du carré de leur distance de séparation était la suivante. A proximité d'une petite bille chargée il suspendait à un fil, en position horizontale, une petite fléchette en gomme-laque dont l'une des extrémités portait une rondelle découpée dans une feuille d'or et portant une charge électrique. Coulomb mesurait la période T des petites oscillations de la fléchette en fonction de sa distance r de la bille chargée. En supposant que la loi de Coulomb est vérifiée, trouver la loi de variation de la période T en fonction de la distance r et des autres paramètres du système. La longueur l de la fléchette est petite par rapport à la distance r.

Réponse. $T = 2\pi r \sqrt{\frac{2I}{q_1 q_2 l}}$, où q_1 et q_2 sont respectivement les charges de la bille et de la rondelle et I est le moment d'inertie de la fléchette.

§ 4. Dipôle électrique

1. Le système le plus simple de deux charges électriques ponctuelles est le *dipôle électrique*. On appelle ainsi l'ensemble de deux charges électriques ponctuelles égales et de signes opposés ($-q$ et $+q$) se trouvant à une certaine distance l'une de l'autre (fig. 6).

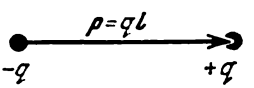


Fig. 6

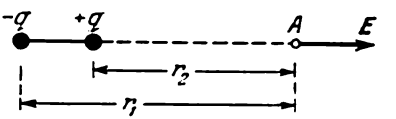


Fig. 7

Notons $\boldsymbol{l}$ le rayon vecteur mené de la charge négative vers la charge positive. On appelle *moment électrique du dipôle* ou *moment dipolaire* le vecteur $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{l}$. Si la longueur l est très petite par rapport à la distance entre le dipôle et le point d'observation, le dipôle est dit *ponctuel*. Calculons le champ électrique du dipôle ponctuel. Dans les formules que nous obtiendrons en définitive, il importe peu de savoir à partir de quel point du dipôle on mesure la distance r jusqu'au point d'observation (dans les limites de précision du calcul).

Considérons d'abord le cas où le point d'observation A se trouve sur la droite confondue avec l'axe du dipôle (fig. 7). L'intensité de champ électrique au point A est

$$E = q\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) \approx q\,\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^2}\right)(r_2 - r_1)$$

ou

$$E = \frac{2ql}{r^3} = \frac{2p}{r^3},$$

et sous forme vectorielle

$$\boldsymbol{E} = \frac{2\boldsymbol{p}}{r^3}. \qquad (4.1)$$

Supposons maintenant que le point A se trouve sur la perpendiculaire à l'axe du dipôle dressée au centre O de celui-ci (fig. 8). On obtient le vecteur $\boldsymbol{E}$ par addition géométrique des champs $\boldsymbol{E}_1$ et $\boldsymbol{E}_2$ créés par les charges ponctuelles $-q$ et $+q$. La figure laisse apparaître que le vecteur $\boldsymbol{E}$ est antiparallèle à $\boldsymbol{p}$ et que sa grandeur (pour un dipôle ponctuel) est

$$E = E_1\alpha = \frac{q}{r^2}\frac{l}{r} = \frac{p}{r^3},$$

ce qui s'écrit sous forme vectorielle

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}. \tag{4.2}$$

Il n'est pas nécessaire que la perpendiculaire AO passe par le centre du dipôle (ponctuel); dans l'approximation utilisée la formule (4.2) reste valable si le point O se trouve en un point quelconque de l'axe

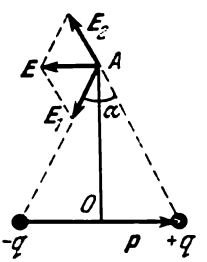


Fig. 8

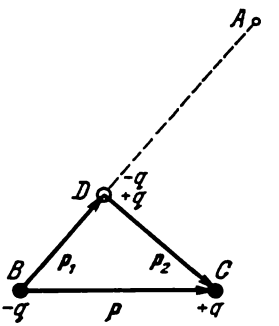


Fig. 9

du dipôle même s'il se trouve au-delà du dipôle lui-même. Ce qui importe est que la distance de ce point au centre du dipôle soit très petite par rapport à sa distance au point A.

Le cas général se ramène aux deux cas particuliers ci-dessus. Abaissons à partir de la charge $+q$ la perpendiculaire CD sur la droite d'observation BA (fig. 9). Si nous plaçons au point D deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$, le champ n'en sera pas modifié. Le système à quatre charges ainsi obtenu peut être considéré comme un ensemble de deux dipôles de moments dipolaires $\boldsymbol{p}_1$ et $\boldsymbol{p}_2$ (fig. 9). D'une façon générale chaque fois que l'on cherche à calculer l'intensité de champ ou les forces auxquelles se trouve soumis un dipôle, on peut le remplacer par un système comportant un nombre quelconque de dipôles dont le moment résultant est égal au moment du dipôle considéré. En appliquant les formules (4.1) et (4.2) aux dipô-

les p_1 et p_2 on obtient

$$E = \frac{1}{r^3}(2p_1 - p_2).$$

En éliminant p_2 à l'aide de la relation $p_1 + p_2 = p$, on a

$$E = \frac{1}{r^3}(3p_1 - p),$$

et finalement

$$E = \frac{3(pr)}{r^5} r - \frac{p}{r^3}. \tag{4.3}$$

2. Calculons maintenant les forces auxquelles est soumis un dipôle de la part d'un champ électrique. Si le champ est homogène, la force résultante F est toujours nulle puisque les forces F_1 et F_2 appliquées aux pôles positif et négatif du dipôle sont égales et opposées (fig. 10). Le moment de ces forces est $M = [lF_2] = q[lE]$ ou encore

$$M = [pE]. \tag{4.4}$$

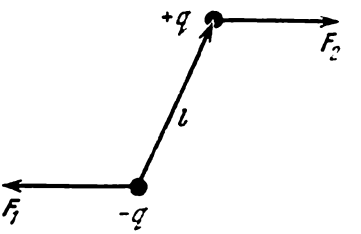


Fig. 10

Le moment M cherche à orienter le dipôle suivant la direction du champ E. Le dipôle dispose de deux positions d'équilibre, l'une parallèle et l'autre antiparallèle au champ électrique. La première de ces positions est stable et la seconde est instable. Pour un dipôle ponctuel la formule (4.4) reste valable même si le champ dans lequel il est placé n'est pas homogène.

Si le champ n'est pas homogène la force $F = F_1 + F_2$ ne doit en général s'annuler. Dans ce cas $F = q(E_2 - E_1)$, où E_1 et E_2 sont les intensités du champ électrique aux points où se trouvent les charges $-q$ et $+q$. Pour un dipôle ponctuel on peut remplacer approximativement la différence $E_2 - E_1$ par la différentielle

$$dE = l_x \frac{\partial E}{\partial x} + l_y \frac{\partial E}{\partial y} + l_z \frac{\partial E}{\partial z}.$$

Dans cette approximation

$$F = p_x \frac{\partial E}{\partial x} + p_y \frac{\partial E}{\partial y} + p_z \frac{\partial E}{\partial z}. \tag{4.5}$$

Pour alléger les écritures, introduisons l'opérateur de Hamilton (1805-1865) dit opérateur « nabla »:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.6}$$

Le produit scalaire de $\boldsymbol{p}$ par ∇ définit l'opérateur

$$(\boldsymbol{p}\nabla) = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Avec ce dernier opérateur la formule (4.5) s'écrit

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p}\nabla)\, \boldsymbol{E}. \tag{4.7}$$

Pour montrer l'intérêt de cette formule comparons-la à (4.5). Si on fait coïncider l'axe X avec la droite portant le vecteur $\boldsymbol{p}$ ($p_x = p$, $p_y = p_z = 0$), on a

$$\boldsymbol{F} = p \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}. \tag{4.8}$$

3. Un système de charges ponctuelles électriquement neutre et occupant un volume réduit se comporte en première approximation comme un dipôle ponctuel. Subdivisons en pensée les charges du système en parties plus petites de façon qu'à chacune des charges corresponde une charge égale de signe opposé. En groupant deux à deux les charges on pourra considérer notre système comme un système de dipôles $\boldsymbol{p}_i$. Lorsqu'on calcule le champ à une distance grande par rapport aux dimensions du système, ces dipôles peuvent être assimilés à des dipôles ponctuels. On peut alors les transporter tous en un même point et en faire somme vectorielle pour obtenir un dipôle ponctuel de moment $\boldsymbol{p} = \sum \boldsymbol{p}_i$. On procédera de même pour calculer les forces s'exerçant dans un champ électrique extérieur $\boldsymbol{E}$ sur un système de charges. Il faut veiller à ce que les dimensions du système soient suffisamment petites pour que dans tout l'espace qu'il occupe le champ extérieur $\boldsymbol{E}$ et ses dérivées spatiales $\partial \boldsymbol{E}/\partial x$, $\partial \boldsymbol{E}/\partial y$, $\partial \boldsymbol{E}/\partial z$ puissent être considérés comme identiques avec un degré d'approximation suffisant.

Etablissons une expression générale du moment dipolaire d'un système électriquement neutre de charges électriques. Supposons d'abord que le système ait été subdivisé par le procédé ci-dessus en paires de charges égales et opposées. On écrira alors

$$\boldsymbol{p} = \sum q_i^+ \boldsymbol{l}_i = \sum q_i^+ (\boldsymbol{r}_i^+ - \boldsymbol{r}_i^-) = \sum (q_i^+ \boldsymbol{r}_i^+ + q_i^- \boldsymbol{r}_i^-),$$

q_i^+, $\boldsymbol{r}_i^+$ et q_i^-, $\boldsymbol{r}_i^-$ étant les grandeurs des charges positives et négatives et les rayons vecteurs correspondants. Réunissant maintenant en pensée les charges de manière à retrouver le système initial, on obtient

$$\boldsymbol{p} = \sum q_i \boldsymbol{r}_i, \tag{4.9}$$

où la sommation est étendue à toutes les charges positives et négatives du système initial.

Pour un système électriquement neutre la somme (4.9) ne dépend pas du choix de l'origine des coordonnées. En effet, si on passe à un nouveau système de coordonnées (notées par des primes) d'origine

différente, on aura $\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{a}$, où $\boldsymbol{a}$ est un vecteur constant. Dans ce nouveau système de coordonnées le moment dipolaire du système sera égal à

$$\boldsymbol{p}' = \sum q_i \boldsymbol{r}_i' = \sum q_i \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{a} \sum q_i.$$

Or la dernière somme est nulle puisque le système est électriquement neutre ; par suite $\boldsymbol{p}' = \sum q_i \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{p}$.

PROBLÈMES

1. Calculer la force d'interaction F d'une charge ponctuelle q et d'un dipôle ponctuel $\boldsymbol{p}$ se trouvant à la distance r l'un de l'autre, le moment dipolaire $\boldsymbol{p}$ étant dirigé suivant la droite qui les relie.

Réponse. $F = 2qp/r^3$. Le dipôle sera attiré par les charges si son extrémité portant la charge de signe opposé à celle de q est dirigée vers la charge ponctuelle, et il sera repoussé dans le cas contraire.

2. Calculer la force d'interaction F de deux dipôles ponctuels $\boldsymbol{p}_1$ et $\boldsymbol{p}_2$ dont les moments dipolaires sont dirigés suivant la droite qui les relie et qui se trouvent à la distance r l'un de l'autre.

Réponse. $F = 6p_1p_2/r^4$. Ces dipôles s'attirent si leurs extrémités portant des charges de signes contraires se font face et se repoussent si les charges de même signe se font face.

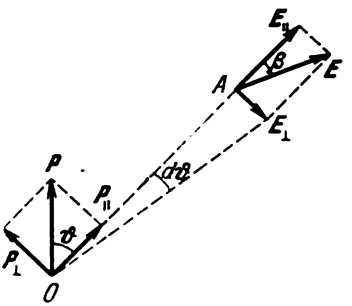


Fig. 11

3. Trouver l'équation des lignes de force du champ électrique créé par un dipôle ponctuel en coordonnées polaires.

Solution. Décomposons le vecteur $\boldsymbol{p}$ (fig. 11) en une composante $\boldsymbol{p}_\parallel$ dirigée suivant le rayon r et une composante $\boldsymbol{p}_\perp$ orthogonale à la première. Les composantes correspondantes du champ électrique au point A seront

$$E_\parallel = 2p_\parallel/r^3, \quad E_\perp = -p_\perp/r^3.$$

L'angle β entre le rayon r et une ligne de force électrique est donné par la formule

$$\operatorname{tg}\beta = E_\perp/E_\parallel = p_\perp/(2p_\parallel) = (1/2)\operatorname{tg}\vartheta.$$

On peut représenter la projection d'un segment infiniment petit d'une ligne de force sur la droite portant le vecteur $\boldsymbol{p}_\perp$ d'une part par $dr \operatorname{tg}\beta = (dr/2)\operatorname{tg}\vartheta$ et d'autre part par $rd\vartheta$. Par suite

$$(dr/2)\operatorname{tg}\vartheta = r\,d\vartheta.$$

En intégrant cette équation nous obtenons l'équation cherchée de la ligne de force électrique

$$r = r_0 \sin^2\vartheta.$$

La constante r_0 représente la longueur du rayon vecteur r dans le plan équatorial, donc pour $\vartheta = \pi/2$.

4. Une charge électrique ponctuelle peut-elle exécuter un mouvement de rotation avec une vitesse constante autour d'un dipôle ponctuel fixe ?

Réponse. Un tel mouvement est possible quelle que soit la distance entre le dipôle et la charge. Le plan de l'orbite circulaire de la charge est ortho-

gonal à l'axe du dipôle. L'angle α entre la direction du moment dipolaire et le rayon vecteur mené du dipôle à la charge mobile est donné par l'expression $\cos\alpha = \mp\sqrt{1/3}$, le signe moins se rapportant à une charge positive et le signe plus à une charge négative.

§ 5. Flux d'un vecteur. Théorème électrostatique de Gauss

1. La notion de *flux d'un vecteur* est l'une des plus importantes en calcul vectoriel. On l'utilise chaque fois qu'il s'agit de formuler les propriétés les plus importantes des champs électrique, magnétique ou de tout autre champ vectoriel. Initialement cette notion

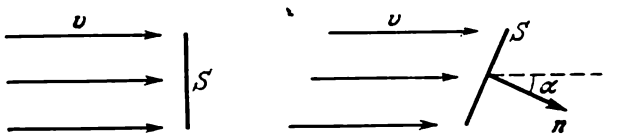


Fig. 12

apparut en hydrodynamique. Traçons dans le champ des vitesses d'un liquide une petite surface d'aire S orthogonale au vecteur vitesse v du liquide (fig. 12). Le volume de liquide passant dans le temps dt à travers cette surface est égal à $vS\,dt$. Si la surface S n'est pas orthogonale à la direction du flux, le volume qui la traverse sera égal à $vS\cos\alpha\,dt$, α étant l'angle entre le vecteur v et la normale n à la surface S. Le volume de liquide traversant la surface S dans l'unité de temps s'obtient par division de cette expression par dt. Il est égal à $vS\cos\alpha$, donc au produit scalaire (vS) du vecteur vitesse v par le vecteur de la surface $S = Sn$. Comme le vecteur unitaire n de la normale à la surface S peut être mené dans deux sens diamétralement opposés, on attribue par convention le signe positif à l'un d'eux et c'est dans ce sens que doit pointer la normale n. La face de la surface S sur laquelle on dresse la normale n est dite surface *extérieure*, l'autre face est dite surface *intérieure*. Si la surface S n'est pas infiniment petite, pour calculer le volume de liquide qui la traverse on doit la subdiviser en éléments de surface dS infiniment petits et calculer l'intégrale $\int (v\,dS)$ étendue à la surface S.

On rencontre souvent en physique et en mathématiques des expressions de la forme $(v\,dS)$ ou $\int (v\,dS)$. Ces expressions ont une signification propre indépendamment de la nature physique concrète du vecteur v. On les appelle *flux du vecteur* v respectivement à travers un élément dS de la surface ou à travers la surface finie S. Ainsi

l'intégrale $\Phi = \int \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S}$ est appelée flux du vecteur intensité $\boldsymbol{E}$ de champ électrique, bien que cette notion ne corresponde à aucun écoulement réel.

Supposons que le vecteur $\boldsymbol{E}$ soit égal à la somme géométrique

$$\boldsymbol{E} = \sum \boldsymbol{E}_i.$$

Après multiplication scalaire par $d\boldsymbol{S}$ et intégration, on obtient

$$\Phi = \sum \Phi_i, \tag{5.1}$$

où Φ_1, Φ_2, . . . sont les flux des vecteurs $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, . . . à travers la même surface. On en conclut qu'à la sommation *géométrique* des vecteurs correspond une sommation *algébrique* des flux de ces vecteurs à travers une même surface.

2. Nous allons démontrer maintenant le théorème fondamental de l'électrostatique — le *théorème de Gauss* qui permet de détermi-

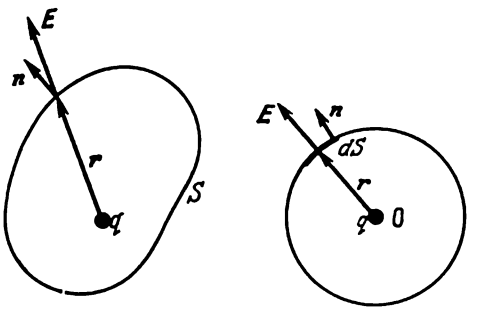


Fig. 13

ner le flux du vecteur intensité de champ électrique à travers une surface fermée arbitraire S. Nous poserons que la *normale extérieure* à la surface S est positive (fig. 13). Considérons d'abord le cas où le champ électrique est créé par une seule charge ponctuelle q. Le champ qu'elle crée sur la surface S est donné par l'expression

$$\boldsymbol{E} = q\boldsymbol{r}/r^3. \tag{5.2}$$

Considérons le cas simple d'une surface sphérique S, la charge q se trouvant au centre de la sphère. Le flux du vecteur $\boldsymbol{E}$ à travers un élément $d\boldsymbol{S}$ de la surface sphérique est

$$d\Phi = (\boldsymbol{E}\boldsymbol{n})\, dS = q\, dS/r^2,$$

et le flux à travers toute la surface est $\Phi = qS/r^2$. Comme la surface S de la sphère vaut $4\pi r^2$, on a

$$\Phi = 4\pi q. \tag{5.3}$$

Nous allons montrer maintenant que la formule (5.3) ne dépend pas de la forme de la surface S entourant la charge q. Soit un élément de surface dS quelconque et soit $\boldsymbol{n}$ sa normale positive (fig. 14). Le flux du vecteur $\boldsymbol{E}$ à travers cet élément de surface est

$$d\Phi = (\boldsymbol{En})\, dS = E\, dS \cos\alpha = E\, dS_r,$$

où dS_r est la projection de l'élément dS sur un plan orthogonal au rayon r. A l'aide de (5.2) nous obtenons

$$d\Phi = q\, dS_r/r^2.$$

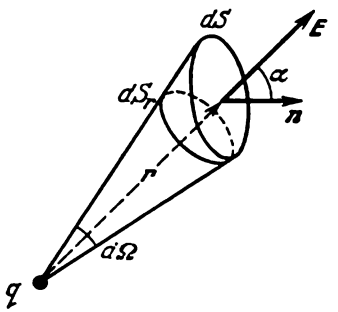


Fig. 14

Or la quantité dS_r/r^2 est l'angle solide $d\Omega$ sous lequel on voit la surface dS_r (et donc la surface dS) du point où se trouve la charge q. Convenons de considérer l'angle solide $d\Omega$ comme positif si la surface dS est tournée vers q par sa face intérieure et comme négatif dans le cas contraire. On a alors

$$d\Phi = q\, d\Omega.$$

Le flux Φ à travers une surface finie arbtiraire S (dans le cas général à travers une surface non fermée) s'obtient en intégrant l'expression ci-dessus par rapport à $d\Omega$. Comme la charge q ne peut dépendre de la position de l'élément de surface dS, on a $\Phi = q \int d\Omega$, soit

$$\Phi = q\Omega, \tag{5.4}$$

où Ω est l'angle solide issu de q et embrassant la surface S.

Si la surface S est fermée on doit distinguer deux cas différents.

P r e m i e r c a s. La charge q se trouve à l'intérieur du volume délimité par la surface S (fig. 15, *a*). L'angle solide Ω embrasse alors toutes les directions spatiales et vaut 4π. Par suite la formule (5.4) se trouve ramenée à la formule (5.3) même si une droite issue de q coupe plusieurs fois la surface S, trois fois par exemple (fig. 15,*b*). Les valeurs absolues des angles solides limités par les éléments de surface dS_1, dS_2, dS_3 sont égales. Mais comme la surface dS_3 est tournée vers q par sa face intérieure et la surface dS_2 par sa face extérieure, la somme des angles solides correspondants est nulle. Il ne subsiste ainsi que l'angle solide $d\Omega$ limité par la surface dS_1. Il en sera toujours ainsi lorsque le nombre d'intersections est impair, ce qui se produit toujours lorsque la surface S entoure de tous côtés la charge q. Un nombre impair d'intersections se réduit ainsi à une seule intersection.

D e u x i è m e c a s. La charge q se trouve en dehors du volume délimité par la surface S (fig. 16). Dans ce cas une droite issue de la charge q ou bien ne coupe pas la surface fermée S, ou bien la coupe

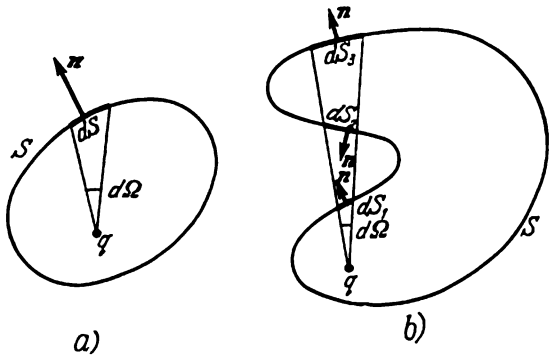


Fig. 15

un nombre pair de fois. Par suite aussi bien l'angle solide total Ω que le flux total Φ sont nuls.

Le cas où la charge ponctuelle q se trouve sur la surface S elle-même n'a pas de sens physique puisque la notion de charge ponctuelle est une idéalisation qui n'est valable que dans le cas où les dimensions linéaires du corps chargé sont petites par rapport aux distances où on mesure le champ créé par ce corps. Si on dit que la charge se trouve sur la surface, les points de cette surface se trouvant au voisinage de la charge ne satisfont pas à la condition que nous venons d'énoncer.

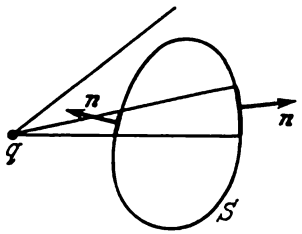


Fig. 16

Supposons maintenant que le champ $\boldsymbol{E}$ résulte de la superposition des champs $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \ldots$ créés par les charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots$ D'après le théorème que nous avons démontré plus haut, le flux du vecteur $\boldsymbol{E}$ est égal à la somme des flux des vecteurs $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2, \ldots$ Si la charge q_i est entourée d'une surface fermée S, son flux à travers celle-ci sera égal à $4\pi q_i$. Si la charge q_i se trouve en dehors du volume délimité par la surface S, son flux est nul. On arrive ainsi à la relation fondamentale

$$\Phi \equiv \oint (\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S}) = 4\pi q, \tag{5.5}$$

qui exprime le *théorème électrostatique de Gauss.* Dans cette formule q représente la somme algébrique de toutes les charges embrassées

par la surface fermée S. Les charges se trouvant en dehors de la région délimitée par S ne contribuent pas au flux résultant. Nous avons établi cette formule en supposant que toutes les charges étaient ponctuelles ; mais il est facile de lever cette restriction puisque toute charge réelle peut être décomposée en pensée en parties suffisamment petites pour pouvoir être assimilées à des charges ponctuelles.

3. Prenons un contour fermé L et faisons passer par chacun de ses points une ligne de force électrique (fig. 17). Toutes ces lignes de force forment une surface tubulaire appelée *tube de force*. Considérons une section transversale d'un tube de force par la surface S.

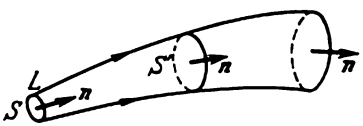


Fig. 17

Orientons la normale positive à S dans le sens des lignes de force. Soit Φ le flux du vecteur $\boldsymbol{E}$ à travers la section S. Nous affirmons que s'il n'y a aucune charge électrique à l'intérieur du tube, le flux Φ sera le même sur toute la longueur du tube. Pour le démontrer considérons une autre section S' du même tube et appliquons le théorème de Gauss à la surface fermée constituée par les sections S et S' et la surface latérale du tube de force. Le flux à travers la surface latérale est nul puisque le vecteur $\boldsymbol{E}$ est partout orthogonal à cette surface. Le flux à travers S est numériquement égal à Φ mais de signe opposé puisque la normale extérieure à la surface fermée considérée est orientée en sens inverse par rapport à $\boldsymbol{n}$. Le flux à travers la base S' est égal à $+\Phi'$. Le flux total à travers la surface fermée est égal à $\Phi' - \Phi$. En vertu du théorème de Gauss le flux total doit être nul puisqu'à l'intérieur du tube de force il n'y a aucune charge électrique. Par conséquent $\Phi' = \Phi$. Dans le cas particulier où le tube est infiniment mince et où les sections S et S' sont normales, on aura

$$ES = E'S'.$$

Il y a donc analogie complète avec l'écoulement d'un fluide incompressible. Là où le tube se rétrécit, le champ $\boldsymbol{E}$ doit être plus intense, et là où le tube s'évase, le champ $\boldsymbol{E}$ doit être plus faible. De ce fait la densité des lignes de force caractérise l'intensité du champ électrique (cf. § 3, pt. 4).

4. Le théorème de Gauss est un corollaire de la loi de Coulomb dont la forme est semblable à celle de la loi de gravitation universelle de Newton. Dans les deux cas la force d'interaction varie en

raison inverse du carré de la distance. Par conséquent, le théorème de Gauss doit également être vérifié pour les champs gravitationnels. Dans ce cas le rôle de la charge est assumé par la masse grave (multipliée par la constante gravitationnelle). La seule différence est que les charges électriques peuvent être positives et négatives, tandis que la masse gravitationnelle est toujours positive.

§ 6. Applications du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss ne saurait suffire au calcul des champs électriques créés par un système arbitraire de charges électriques, ne serait-ce que du fait que ce théorème s'exprime par une *relation scalaire*. Or une seule équation scalaire ne peut suffir au calcul de trois inconnues — les composantes E_x, E_y, E_z du vecteur $\boldsymbol{E}$, à moins que la symétrie du problème ne permette de le résoudre à l'aide de cette équation scalaire. Dans ce dernier cas le théorème de Gauss permet de calculer le vecteur $\boldsymbol{E}$ (mais pas toujours). Donnons-en quelques exemples.

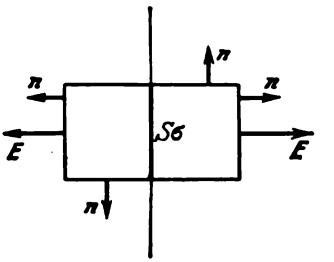


Fig. 18

1. *Champ électrostatique d'un plan infini portant des charges uniformément réparties.* La densité superficielle d'électricité σ sur le plan chargé étant par hypothèse constante et le système étant symétrique, le vecteur $\boldsymbol{E}$ doit être normal au plan chargé. Si celui-ci porte des charges positives, le vecteur $\boldsymbol{E}$ est orienté hors du plan et s'il porte des charges négatives, le vecteur $\boldsymbol{E}$ pointe vers le plan. Par raison de symétrie la longueur du vecteur $\boldsymbol{E}$ ne peut dépendre que de la distance jusqu'au plan chargé, que ce soit d'un côté ou de l'autre de ce plan. Construisons un cylindre dont les bases sont symétriques par rapport au plan chargé et dont les génératrices lui sont orthogonales (fig. 18). En notant S l'aire de chacune des bases du cylindre, le flux du vecteur $\boldsymbol{E}$ à travers une des bases est égal à ES et à travers les deux bases à $2ES$. Le flux à travers la surface latérale du cylindre est nul puisque les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{n}$ y sont rectangulaires. Le flux à travers la surface totale du cylindre est par suite égal à $\Phi = 2ES$. D'après le théorème de Gauss ce même flux peut être représenté par $\Phi = 4\pi q = 4\pi\sigma S$. En comparant ces deux expressions on obtient

$$E = 2\pi\sigma. \tag{6.1}$$

Nous avons déjà obtenu ce résultat en appliquant directement la loi de Coulomb (cf. problème n° 2 au § 3).

L'intensité du champ électrique créé par un plan chargé infini ne dépend donc pas de la distance à ce plan. Un plan chargé peut être considéré comme infini si la distance à ce plan est négligeable par rapport à ses dimensions. Ce n'est qu'alors que la valeur de E est indépendante de la distance au plan chargé. Aux plus grandes distances la formule (6.1) n'est plus vérifiée et l'intensité du champ décroît avec la distance. Dans le cas où la distance au plan est comparable à ses dimensions, la variation spatiale du module et de la direction de l'intensité du champ présente une allure très compliquée. Aux distances de beaucoup supérieures aux dimensions du plan celui-ci se comporte comme une charge ponctuelle et le champ varie en raison inverse du carré de la distance.

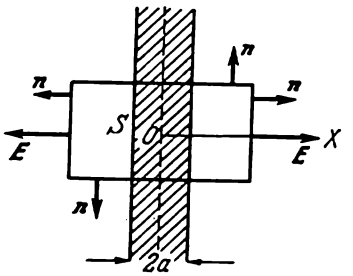


Fig. 19

Notons encore que des deux côtés du plan les vecteurs E sont égaux en module mais de sens opposés. De ce fait à chaque traversée d'un plan chargé l'intensité du champ électrique varie par saut de $4\pi\sigma$.

2. *Champ créé par une plaque infinie uniformément chargée à faces parallèles.* Notons $2a$ l'épaisseur de la plaque et ρ la densité d'électricité spatiale à l'intérieur de la plaque. Par hypothèse ρ est constante. Plaçons l'origine des coordonnées O dans le plan médian de la plaque et dirigeons l'axe X perpendiculairement à ce plan (fig. 19). En raisonnant comme ci-dessus, nous trouverons

$$E = \begin{cases} 4\pi\rho x & \text{à l'intérieur de la plaque,} \\ 4\pi\rho a & \text{en dehors de la plaque.} \end{cases} \tag{6.2}$$

Diminuons indéfiniment l'épaisseur de la plaque en augmentant simultanément la densité d'électricité ρ afin que le produit ρa reste constant. A la limite on aboutit à un plan infini uniformément chargé ayant une densité d'électricité surfacique égale à $\sigma = \rho a$, de sorte que la formule (6.2) se ramène à la formule (6.1).

3. *Champ créé par une sphère portant des charges spatiales et superficielles uniformes.* Par raison de symétrie sphérique le vecteur E doit être parallèle ou antiparallèle au rayon vecteur r mené du centre de la sphère au point d'observation ; son module E ne peut dépendre que de la distance r. Traçons une sphère concentrique S de rayon r (fig. 20, *a*). Le flux $4\pi r^2 E$ du vecteur E à travers cette sphère est égal à $4\pi q$ (théorème de Gauss), de sorte que l'intensité du champ en dehors de la sphère chargée sera égale à

$$E = q/r^2, \tag{6.3}$$

que la charge de la sphère soit répartie en volume ou en surface. Ainsi *une sphère portant une charge électrique uniforme crée dans l'espace environnant un champ dont l'intensité est la même que si toute la charge était concentrée au centre de la sphère.* Ce résultat reste valable chaque fois que dans un corps sphérique la répartition des charges en volume présente une symétrie sphérique. Il s'applique naturellement au champ de gravitation.

Lorsque le rayon de la sphère est négligeable par rapport à la distance r, on retrouve le champ électrostatique d'une charge ponctuelle. On ne peut cependant en inférer que la loi de Coulomb est

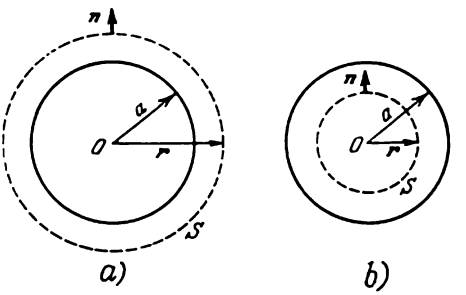


Fig. 20

un corollaire de la loi de Gauss puisque cette loi n'en découle qu'en admettant que le champ d'une charge ponctuelle fixe est radial et présente une symétrie sphérique.

On calcule exactement de la même façon le champ à l'intérieur d'une sphère chargée (fig. 20, *b*). Il est donné par la formule

$$E = q'/r^2, \tag{6.4}$$

où q' est la charge comprise dans une sphère de rayon r. Si la répartition de la charge en volume est uniforme, on a $q' = q\,(r/a)^3$ et

$$E = qr/a^3 = (4\pi/3)\,\rho r. \tag{6.5}$$

Dans le cas où la charge est uniformément répartie sur la surface de la sphère on a $q' = 0$ et par suite $E = 0$. Ainsi *le champ électrique est nul à l'intérieur d'une cavité sphérique portant sur sa surface une charge uniforme.* Ce résultat reste valable lorsqu'il n'y a aucune charge à l'intérieur d'une cavité sphérique, la répartition des charges extérieures présentant une symétrie sphérique.

4. Confirmons ce dernier résultat à l'aide de la loi de Coulomb. Supposons que la surface d'une sphère porte une charge électrique uniforme. Menons par un point A de la cavité que délimite l'enveloppe sphérique un faisceau de rayons découpant sur la surface de

la sphère des éléments de surface infiniment petits s_1 et s_2 (fig. 21). Les projections s_1' et s_2' de ces éléments de surface sur le plan perpendiculaire à l'axe du faisceau sont proportionnelles aux carrés des distances r_1 et r_2. Cette affirmation s'applique aussi aux surfaces s_1 et s_2 et aux charges q_1 et q_2 qu'elles portent. En effet si on mène par l'axe du faisceau un plan contenant le centre O de la sphère (c'est le plan de la figure) les angles α_1 et α_2 seront égaux et $s_1' = s_1 \sin \alpha_1$, $s_2' = s_2 \sin \alpha_2$. Il en découle la proposition ci-dessus ainsi que l'égalité $q_1/r_1^2 = q_2/r_2^2$. On en conclut que les champs coulombiens créés au point A par les charges q_1 et q_2 sont égaux en module et de sens opposés. Ce résultat concerne toutes les paires de charges q_1 et q_2 résultant d'une subdivision en pensée de la charge superficielle de la sphère. De ce fait le champ électrique total doit s'annuler en tout point de la cavité sphérique.

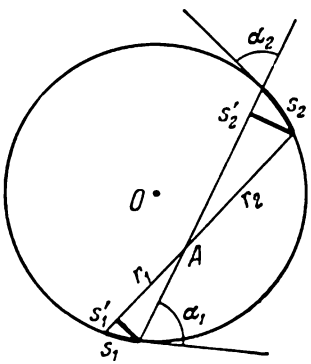


Fig. 21

Nous voyons ainsi que le théorème affirmant qu'il n'y a pas de champ électrique à l'intérieur d'une cavité sphérique dont la surface porte une charge électrique uniforme résulte directement de la loi de Coulomb. Si le champ variait non pas en raison inverse du carré de la distance mais selon une loi différente, ce théorème aurait été en défaut. Priestley (1733-1804) remarqua à ce propos que la vérification expérimentale de ce théorème apporte une confirmation de la validité de la loi de Coulomb. Une telle vérification indirecte de la loi de Coulomb peut être réalisée avec une précision beaucoup plus grande que celle que l'on peut atteindre dans la mesure directe des forces d'interaction de charges ponctuelles. Cette expérience fut réalisée pour la première fois en 1774 par Cavendish et répétée avec une plus grande précision par Maxwell en 1879. Cavendish et Maxwell présentèrent leurs résultats expérimentaux sous la forme suivante. En admettant que la force d'interaction des charges ponctuelles satisfait à une loi telle que $F \sim 1/r^n$, n ne peut différer de la valeur 2 que de 1/50 selon les mesures de Cavendish et de 1/20 000 d'après celles de Maxwell. L'expérience fut reprise en 1936 avec des moyens expérimentaux modernes par Plimpton et Lawton qui trouvèrent que la différence entre 2 et n ne peut être supérieure à 10^{-9}. Il est évident que la loi $F \sim 1/r^n$ peut être en défaut et le problème consiste alors à déterminer à partir de quelles valeurs de la distance r la loi de Coulomb cesse d'être valable, ainsi qu'à trouver la loi exacte qui se substitue à ces distances à la loi de Coulomb. Actuellement la loi de Coulomb est vérifiée pour des distances de l'ordre

d'un centimètre ou de plusieurs dizaines de centimètres avec une précision relative de 10^{-9} environ.

On peut se demander si pour arriver à une telle précision des mesures il ne serait pas indispensable que le rayon de la sphère étudiée soit maintenu en tous les points avec la même précision relative (10^{-9}). Pour une sphère de rayon de 10 cm, cela exigerait qu'elle soit travaillée à 10^{-8} cm près, donc à un atome près. On pourrait penser également que la répartition superficielle des charges devrait être constante à 10^{-9} près, ce qui impliquerait que la sphère devrait être soustraite à toute action électrique de la part des corps environnants. Il est clair qu'aucune de ces conditions ne saurait être remplie. Heureusement qu'il ne faut pas s'en soucier car ni la forme de la cavité ni celle de la surface extérieure ne jouent aucun rôle. Nous montrerons aux §§ 11 et 22 qu'à l'intérieur de toute cavité entourée d'une enveloppe conductrice de forme arbitraire le champ est rigoureusement nul, à moins que la cavité ne contienne des charges électriques. Il n'en serait pas ainsi si la loi de Coulomb était en défaut.

Il existe deux gammes de distances pour lesquelles on peut s'attendre à priori à des écarts par rapport à la loi de Coulomb. C'est d'abord la gamme des très courtes distances, inférieures à 10^{-14} cm, où on ne saurait affirmer que la théorie électromagnétique reste valable. Deuxièmement, c'est la gamme des grandes distances supérieures aux distances géographiques. Dans cette gamme nous ne disposons pas de confirmations expérimentales directes de la loi de Coulomb. On remarquera cependant que si la loi de Coulomb était en défaut aux grandes distances, selon l'électrodynamique quantique la masse au repos du quantum de lumière (le photon) ne serait pas nulle. Or cela impliquerait que la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide devrait dépendre de la longueur d'onde. Comme on n'a pas réussi à déceler une telle dépendance, on peut en conclure que la loi de Coulomb doit être vérifiée à $\sim 10^{-6}$ près pour des distances d'au moins égales à plusieurs kilomètres.

5. *Champ d'une droite infinie et d'un cylindre droit de longueur infinie.* Le champ créé par une répartition uniforme de charges électriques le long d'une droite infinie est radial et son sens dépend du signe des charges électriques. L'intensité E du champ à une distance r de la ligne est donnée par la formule

$$E = 2\varkappa/r, \tag{6.6}$$

où $\varkappa$ est la densité linéique des charges, i.e. la charge par unité de longueur. La même formule donne l'intensité du champ créé par un cylindre circulaire de longueur infinie à répartition uniforme des charges à son intérieur et à sa surface, en dehors du cylindre. Si le cylindre est creux et que les charges soient uniformément réparties sur sa surface, le champ intérieur est nul. Si la répartition spatiale

des charges dans un cylindre massif est uniforme, le champ qu'il crée est donné par la formule

$$E = 2\pi\rho r. \tag{6.7}$$

6. Considérons une surface quelconque S portant des charges électriques (fig. 22). Notons par l'indice *1* la région de l'espace se trouvant d'un côté de cette surface et par l'indice *2* la région de l'espace se trouvant de l'autre côté de cette même surface. La densité superficielle électrique σ sur la surface S peut être quelconque.

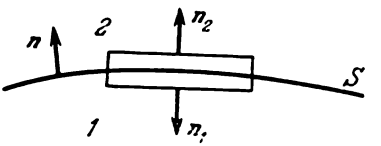


Fig. 22

Construisons un cylindre infiniment petit dont les bases se trouvent de part et d'autre de la surface S et dont la hauteur est infiniment petite par rapport aux dimensions linéaires de ses bases. En notant ΔS l'aire d'une base on trouve à l'intérieur du cylindre une charge $q = \sigma\,\Delta S$. La somme des flux du vecteur E à travers les bases du cylindre est égale à $(E_{n_1} + E_{n_2})\,\Delta S$, le flux à travers sa surface latérale est supposé négligeable. En égalant cette somme à la quantité $4\pi\sigma\Delta S$ on obtient

$$E_{n_1} + E_{n_2} = 4\pi\sigma, \tag{6.8}$$

où $\boldsymbol{n}_1$ désigne la normale extérieure à la surface S pointant dans la région *1* de l'espace et $\boldsymbol{n}_2$ la normale extérieure pointant dans la région *2* de l'espace. Si nous menons à la surface S une normale commune $\boldsymbol{n}$, la formule (6.8) prend une forme différente. Si nous orientons la normale $\boldsymbol{n}$ dans le sens allant de la région *1* vers la région *2*, nous aurons

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma. \tag{6.9}$$

Ainsi lorsqu'on traverse une surface chargée, la composante normale du vecteur $\boldsymbol{E}$ subit une discontinuité égale à $4\pi\sigma$.

Il est instructif de considérer l'origine de cette discontinuité en se plaçant à un autre point de vue. En tout point de l'espace le champ électrique total se compose du champ intérieur $\boldsymbol{E}_{\text{int}}$, créé par les charges de la surface ΔS, et du champ extérieur $\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$ créé par toutes les autres charges. Lors de la traversée de la surface ΔS le champ extérieur varie de façon continue. Quant à la surface chargée ΔS, elle se comporte comme un plan chargé infini pour tous les points qui en sont infiniment proches. Le champ $\boldsymbol{E}_{\text{int}}$ créé par ΔS

est orthogonal à ΔS et vaut $2\pi\sigma$. Mais comme les sens de ce champ sont diamétralement opposés de part et d'autre de la surface ΔS, la composante normale du champ total se trouve accrue d'un côté de la surface et diminuée de l'autre, i.e.

$$E_1 = E_{\text{ext}} + 2\pi\sigma n_1, \quad E_2 = E_{\text{ext}} + 2\pi\sigma n_2. \tag{6.10}$$

Ainsi ce n'est que le *champ intérieur* qui subit un saut, le champ extérieur variant de façon continue. Mais comme le champ intérieur n'a pas de composante tangentielle, la composante tangentielle du champ total varie elle aussi de façon continue:

$$E_{1t} = E_{2t}. \tag{6.11}$$

7. On tire encore des formules (6.10) le résultat suivant:

$$E_{\text{ext}} = \frac{1}{2}(E_1 + E_2). \tag{6.12}$$

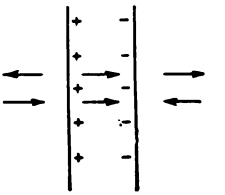


Fig. 23

A l'aide de cette expression on calcule facilement les forces électriques s'exerçant sur une surface chargée. Un élément de surface ΔS ne peut évidemment être soumis qu'à l'action des *charges extérieures*. La force électrique rapportée à l'unité d'aire de la surface ΔS est

$$f = \sigma E_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{2}(E_1 + E_2). \tag{6.13}$$

En éliminant σ à l'aide de (6.9), (6.13) peut s'écrire

$$f = \frac{1}{8\pi}(E_{2n} - E_{1n})(E_1 + E_2). \tag{6.14}$$

Dans le cas particulier où le champ est normal à la surface chargée

$$f = \frac{1}{8\pi}(E_2^2 - E_1^2)\,n \tag{6.15}$$

Cette dernière formule montre que l'unité d'aire d'une surface chargée est soumise aux forces de tension $E_1^2/(8\pi)$ et $E_2^2/(8\pi)$ qui agissent vers l'extérieur en sens opposés.

8. *Champ de deux plans parallèles portant des charges opposées à répartition uniforme.* Si les densités des charges sur les deux plans sont égales, les champs qu'ils créent seront égaux mais de sens opposés. Dans l'espace compris entre les plans les sens de ces champs sont les mêmes, de sorte qu'ils s'additionnent pour donner le champ (fig. 23)

$$E = 4\pi\sigma. \tag{6.16}$$

Dans l'espace extérieur les champs sont dirigés en sens contraires et le champ résultant y est nul. On peut retrouver ce même résultat à partir de la relation générale (6.9).

PROBLÈMES

1. On dispose dans le vide deux plaques métalliques infinies parallèlement l'une à l'autre (fig. 24). Notons q_1 la charge totale par unité de surface (i.e. la somme des charges réparties sur les deux faces de la plaque) de la première plaque, et q_2 celle de la seconde plaque. Calculer les densités superficielles des

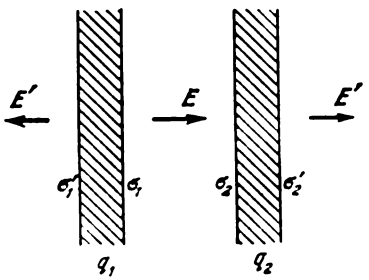


Fig. 24

charges électriques sur les plaques ainsi que l'intensité du champ électrique dans l'espace compris entre les plaques et en dehors de celles-ci.

Réponse. $\sigma_1 = -\sigma_2 = {}^1/_2\,(q_1 - q_2)$; $\sigma'_1 = \sigma'_2 = {}^1/_2\,(q_1 + q_2)$; $E = 2\pi\,(q_1 - q_2)$; $E' = 2\pi\,(q_1 + q_2)$.

2. Une sphère conductrice de rayon R est composée de deux hémisphères. Calculer la force de répulsion F s'exerçant entre ces hémisphères si la charge totale de la sphère est Q.

Solution. Selon la formule (6.15) l'unité de surface de la sphère est soumise à une force de poussée $f = Q^2n/(8\pi R^4)$. Par intégration on trouve aisément

$$F = Q^2/(8R^2).$$

3. Que deviendra la solution du problème précédent si on place au centre de la sphère une charge ponctuelle q supplémentaire? Poser que la sphère est creuse et l'enveloppe infiniment mince.

Réponse. $F = Q\,(Q + 2q)/(8R^2)$.

4. Un cylindre conducteur de grande longueur et de rayon R est découpé le long de l'axe longitudinal. Calculer la force de répulsion F agissant sur l'unité de longueur de chaque demi-cylindre si l'unité de longueur porte une charge $\varkappa$.

Réponse. $F = \varkappa^2/(\pi R)$.

5. Que deviendra la solution du problème précédent si on dispose le long de l'axe du cylindre un fil fin portant une charge $\varkappa_0$ par unité de longueur? Poser que le cylindre est creux et que ses parois sont infiniment minces.

Réponse. $F = \varkappa\,(\varkappa + 2\varkappa_0)/(\pi R)$.

§ 7. Forme différentielle du théorème électrostatique de Gauss

1. La relation (5.5) exprime la *forme intégrale* du théorème de Gauss. Nous allons donner maintenant ce théorème sous la *forme différentielle*. Désignons par *densité spatiale de charge électrique* ρ la

quantité d'électricité contenue dans l'unité de volume. La charge contenue dans l'élément de volume dV sera alors égale à $dq = \rho\, dV$. Supposons que ρ est une fonction continue des coordonnées spatiales. La conception d'une répartition spatiale continue des charges électriques est une idéalisation au même titre qu'une distribution spatiale continue d'une substance. On utilise largement en physique de telles conceptions.

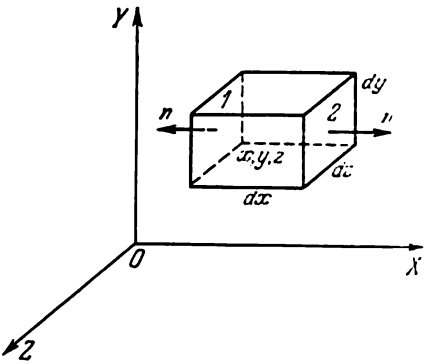


Fig. 25

Considérons un parallélépipède droit infiniment petit dont les côtés dx, dy, dz sont parallèles aux axes de coordonnées rectangulaires (fig. 25). Sur sa face *1* la normale extérieure est orientée dans le sens des X négatifs. Le flux du vecteur $\boldsymbol{E}$ à travers cette face est donc égal à $-E_x(x)\, dy\, dz$. Sur la face *2* opposée à *1* la normale extérieure coïncide avec la direction positive de l'axe X ; le flux à travers cette face est égal à $+E_x(x + dx)\, dy\, dz$. La somme de ces deux flux est

$$[E_x(x+dx) - E_x(x)]\, dy\, dz = \frac{\partial E_x}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \frac{\partial E_x}{\partial x}\, dV,$$

où $dV \equiv dx\, dy\, dz$ est le volume du parallélépipède. Les flux à travers les deux autres paires de faces se calculent de la même façon. Le flux total à travers toute la surface du parallélépipède est :

$$d\Phi = \operatorname{div} \boldsymbol{E} \cdot dV \tag{7.1}$$

où on a introduit la notation

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{7.2}$$

D'après le théorème de Gauss ce même flux est égal à $4\pi q = 4\pi\rho\, dV$. En identifiant ces deux expressions on trouve

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \tag{7.3}$$

C'est la forme différentielle du théorème de Gauss.

La quantité définie par (7.2) conserve toute sa signification quelle que soit la nature physique ou géométrique du vecteur $\boldsymbol{E}$. On l'appelle *divergence* du vecteur $\boldsymbol{E}$. On rencontre la divergence dans l'étude de maintes questions de physique et des mathématiques et c'est ce qui justifie l'introduction de cette notion mathématique.

2. La forme différentielle (7.3) du théorème de Gauss est un corollaire de sa forme intégrale (5.5). En inversant la marche du raisonnement on arrive aisément à déduire la forme intégrale de la forme différentielle de ce théorème. Les deux formes sont mathématiquement équivalentes quoique la forme différentielle n'a de sens que si la distribution spatiale de l'électricité correspond à une densité finie ρ. Si ρ devient infini en certains points, sur certaines lignes ou sur certaines surfaces, la forme différentielle cesse d'être valable *), tandis que la forme intégrale (5.5) est toujours vérifiée. La forme intégrale est donc mathématiquement plus générale que la forme différentielle. Les répartitions discontinues de l'électricité avec des valeurs infiniment grandes de ρ sont des abstractions mathématiques que l'on ne doit considérer en physique que comme des cas limites des distributions continues avec des valeurs partout finies de ρ. Compte tenu de ces remarques, on peut dire que *les formes intégrale et différentielle du théorème de Gauss sont parfaitement équivalentes.*

3. En électrostatique le théorème de Gauss n'est rien de plus qu'un corollaire de la loi de Coulomb. Mais notre objectif n'est pas seulement l'électrostatique et à l'aide de généralisations adéquates des données expérimentales nous devons découvrir des équations et des lois générales applicables non seulement à l'électrostatique mais à tout problème d'électrodynamique. Pour procéder à ces généralisations nous prendrons pour principe directeur la condition que les lois qui en découlent soient des lois de la *théorie des champs*, excluant toute idée d'action instantanée à distance. La loi de Coulomb ne satisfait pas à cette condition et ne se trouve vérifiée qu'en électrostatique. Néanmoins les corollaires qu'on peut en tirer peuvent avoir un domaine de validité plus étendu. Le théorème de Gauss est un de ces corollaires et ne contredit nullement la théorie des champs impliquant une vitesse finie de propagation des interactions. Ecrit sous la forme différentielle, le théorème de Gauss ne recèle aucune indication sur la possibilité d'existence de forces à distance, car c'est un *théorème local* en ce sens qu'il établit une corrélation entre différentes grandeurs physiques (ρ et div $\boldsymbol{E}$) se rapportant à un même point de l'espace. Il n'est pas nécessaire que les lois de la théorie des champs soient locales, mais toutes les lois locales sont compatibles avec la conception essentielle de cette théorie relative à la transmission des interactions par l'intermédiaire de champs. D'autre part, la loi de Coulomb, bien que suffisante, n'est pas nécessaire pour la démonstration du théorème de Gauss. Il est donc parfaitement justifié d'introduire l'hypothèse selon laquelle *le théorème de Gauss serait vérifié non seulement en électrostatique*,

*) En utilisant les fonctions dites *généralisées* on peut étendre également à ces cas la forme différentielle du théorème de Gauss.

mais également en électrodynamique, quoique cette dernière ait affaire à des champs électromagnétiques variables dans le temps. Seule l'expérience peut permettre de décider si cette hypothèse est correcte ; or comme toutes les données expérimentales militent en faveur de cette hypothèse, la physique la reconnaît comme vraie. De ce fait l'équation (7.3) et l'équation (5.5) qui lui est mathématiquement équivalente cessent d'être de simples corollaires de la loi de Coulomb et s'élèvent au rang de *postulats fondamentaux* de la théorie de l'électricité. Ces équations font partie du système des équations de Maxwell.

Sous sa forme intégrale (5.5) le théorème de Gauss établit une relation entre les grandeurs physiques se rapportant à des points aussi éloignés l'un de l'autre que l'on voudra mais à un même instant. On pourrait donc s'imaginer que sa validité est liée à l'hypothèse de l'action instantanée à distance. Le fait que le théorème de Gauss se laisse mettre sous une forme différentielle démontre qu'il n'en est rien. La formule (5.5) ne fait qu'affirmer qu'à toute charge électrique q est lié un certain champ électrique. Le champ d'une charge qui reste fixe pendant un temps indéfini est un champ coulombien à n'importe quelle distance. Mais ce n'est plus vrai si la charge est mobile. Ainsi une charge en mouvement accéléré rayonne des ondes électromagnétiques. Mais le flux du vecteur $\boldsymbol{E}$ à travers toute surface fermée embrassant les mêmes charges ne dépend ni de la forme ni de la position de cette surface fermée, ni des mouvements des charges qu'elle renferme.

PROBLÈME

Etablir les formules (6.1) à (6.3), (6.5) à (6.7) en utilisant la forme différentielle du théorème de Gauss.

Solution. A titre d'exemple nous allons retrouver la formule (6.5). Compte tenu de la symétrie sphérique

$$\boldsymbol{E} = E(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

ou sous forme analytique

$$E_x = E(r)\frac{x}{r}, \qquad E_y = E(r)\frac{y}{r}, \qquad E_z = E(r)\frac{z}{r}.$$

En dérivant E_x et en remarquant que $\partial r/\partial x = x/r$ (ce résultat s'obtient par dérivation de l'égalité $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$), on trouve

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE}{dr}\frac{x^2}{r^2} - \frac{E}{r^3}x^2 + \frac{E}{r}.$$

En écrivant les relations analogues pour les derivées $\partial E_y/\partial y$ et $\partial E_z/\partial z$ et en les additionnant on obtient

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{dE}{dr} + \frac{2E}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E). \tag{7.4}$$

A l'intérieur de la sphère on a

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E)=4\pi\rho,$$

d'où

$$E=\frac{4\pi}{3}\rho r+\frac{C}{r^2}.$$

La constante C doit être nulle puisque l'intensité du champ électrique E régnant au centre de la sphère ne peut être que finie, comme il découle des considérations physiques. En procédant de façon analogue, on trouve l'intensité du champ en dehors de la sphère.

Nous voulons attirer l'attention du lecteur sur la formule (7.4). Cette formule donne la divergence de n'importe quel vecteur radial dont le module ne dépend que de la distance à l'origine des coordonnées (cas de la symétrie sphérique).

§ 8. Complément mathématique. Formule de Gauss-Ostrogradsky

1. Pour traiter différentes questions de la théorie de l'électricité ou d'autres parties de la physique théorique, on utilise souvent une formule mathématique permettant d'exprimer le flux d'un vecteur à travers une surface fermée arbitraire à l'aide d'une intégrale triple étendue au volume délimité par cette surface. Nous donnons ci-après la démonstration de cette formule, bien que nous ne l'utiliserons que fort peu. Soit $f(x, y, z)$ une certaine fonction et S une surface fermée délimitant le volume V (fig. 26). Le long du segment de droite *12* parallèle à l'axe X, la fonction f ne dépend que de la seule variable x. En intégrant le long de ce segment on obtient

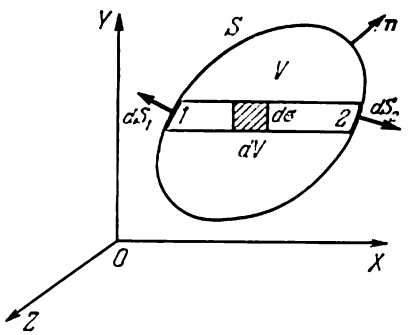


Fig. 26

$$\int_{12}\frac{\partial f}{\partial x}\,dx=f_2-f_1,$$

f_1 et f_2 étant les valeurs que prend la fonction f aux extrémités du segment *12*. Construisons maintenant un cylindre infiniment mince dont l'une des génératrices est le segment *12*. Notons $d\sigma$ l'aire de sa section droite (c'est une quantité essentiellement positive) et multiplions l'égalité ci-dessus par $d\sigma$. Comme le produit $d\sigma\,dx$ représente le volume élémentaire dV (hachuré sur la fig. 26) nous obtenons

$$\int_{\Delta V}\frac{\partial f}{\partial x}\,dV=d\sigma\,(f_2-f_1),$$

où ΔV est la partie du volume V découpée par le cylindre. Soient dS_1 et dS_2 les éléments de surface que découpe le même cylindre sur la surface S et n_1 et n_2 les normales unitaires à dS_1 et dS_2 pointant vers l'extérieur de la surface S. On a alors $d\sigma = dS_2\cdot n_{2x} = -dS_1\cdot n_{1x}$ et par suite

$$\int_{\Delta V}\frac{\partial f}{\partial x}\,dV=f_1n_{1x}\,dS_1+f_2n_{2x}\,dS_2,$$

ou d'une façon plus concise

$$\int\limits_{\Delta V} \frac{\partial f}{\partial x}\, dV = \int\limits_{dS_1+dS_2} f n_x\, dS,$$

où l'intégrale de surface est étendue à la somme des aires dS_1 et dS_2. Tout le volume V peut être divisé en une multitude de cylindres élémentaires, comme celui que nous avons défini ci-dessus et on peut écrire pour chacun d'eux une expression analogue. En sommant toutes ces expressions on obtient

$$\int\limits_V \frac{\partial f}{\partial x}\, dV = \oint\limits_S f n_x\, dS. \tag{8.1}$$

L'intégrale à gauche est étendue au volume V, l'intégrale à droite à la surface S délimitant le volume V. On peut écrire des relations analogues pour les axes Y et Z.

Prenons maintenant un vecteur A quelconque et appliquons à ses composantes la relation (8.1). On obtient alors

$$\int\limits_V \frac{\partial A_x}{\partial x}\, dV = \oint\limits_S A_x n_x\, dS$$

et des relations analogues pour les composantes A_y et A_z. En les additionnant on obtient

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dV = \oint\limits_S (A_x n_x + A_y n_y + A_z n_z)\, dS,$$

soit

$$\int\limits_V \operatorname{div} A \cdot dV = \oint\limits_S (An)\, dS. \tag{8.2}$$

C'est la *formule de Gauss-Ostrogradsky* que l'on peut écrire sous la forme

$$\int\limits_V \operatorname{div} A \cdot dV = \oint\limits_S (A\, dS). \tag{8.3}$$

2. Si le volume V est infiniment petit, la quantité div A s'y rapportant peut être considérée comme une constante. En la plaçant devant le signe d'intégration et en passant à la limite $V \to 0$ on obtient

$$\operatorname{div} A = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint\limits_S (A\, dS). \tag{8.4}$$

Le passage à la limite correspond à une contraction du volume V à un point, i.e. toutes ses dimensions doivent tendre vers zéro suivant toutes les directions. Les développements ci-dessus montrent que la quantité figurant dans le second membre de (8.4) ne dépend pas de la forme de la surface S que l'on réduit à un point. De ce fait l'expression (8.4) peut être prise pour définition de la divergence. Une telle définition présente l'avantage d'être *invariante*, i.e. ne pas dépendre du choix du système de coordonnées.

La formule (8.4) sert à calculer simplement la divergence dans n'importe quel système de coordonnées. Calculons, par exemple, div A dans le système

des coordonnées sphériques r, ϑ, φ (fig. 27). Considérons un « cube » infiniment petit délimité par les plans $r = \text{const}$, $\vartheta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. La somme des flux du vecteur A traversant les faces opposées *1* et *2* du cube est

$$d_1\Phi = -A_r(r)\,dS_1 + A_r(r+dr)\,dS_2 = \frac{\partial}{\partial r}(A_r\,dS)\,dr.$$

En y portant $dS = r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ nous obtenons

$$d_1\Phi = \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r)\,dV,$$

où $dV = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$ est le volume de notre « cube ». On trouve de la

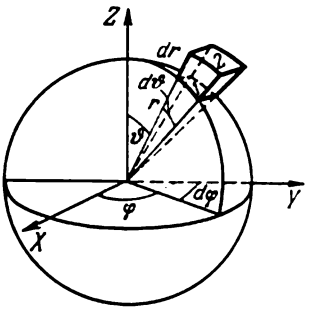


Fig. 27

même façon les flux passant à travers les deux autres paires de faces opposées; l'expression de la divergence est

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}. \qquad (8.5)$$

Si le vecteur A est confondu avec r et si sa valeur ne dépend que de la distance r, l'expression (8.5) se ramène à la formule (7.4).

Considérons un autre exemple d'application de la formule de Gauss-Ostrogradsky. D'après (5.5) $\oint E\,dS = 4\pi q$ et pour un volume élémentaire $\oint E\,dS = 4\pi\rho V$. En portant cette expression dans (8.4) on trouve $\operatorname{div} E = 4\pi\rho$, qui est la forme différentielle du théorème de Gausse.

PROBLÈME

En électrostatique le champ électrique est toujours orthogonal à la surface du conducteur (cf. § 11, pt. 4). Partant de ce fait, démontrer qu'à proximité de la surface incurvée d'un conducteur chargé, le champ électrique vérifie la relation

$$\frac{\partial E}{\partial n} = -E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (8.6)$$

où la dérivée est prise suivant la direction de la normale extérieure à la surface du conducteur et où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de cette surface (on les considère comme positifs pour les surfaces convexes et négatifs pour les surfaces concaves).

§ 9. Théorème de Earenshaw

1. Pour qu'un système de charges électriques ponctuelles soit en équilibre, il faut et il suffit que la force appliquée à chacune des charges soit nulle. Cette condition est vérifiée, par exemple dans le cas d'un système de deux charges ponctuelles identiques q et q entre lesquelles, juste au milieu, se trouve une charge $-q/4$ de

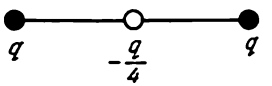


Fig. 28

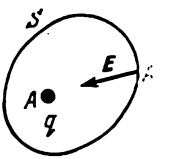


Fig. 29

signe opposé (fig. 28). On trouvera d'autres exemples dans le problème donné à la fin de ce paragraphe. Pour savoir si cet équilibre est stable, on fait appel au *théorème de Earenshaw*. Selon ce théorème, *toute configuration d'équilibre de charges ponctuelles fixes est instable si elles ne sont soumises à aucune autre force que les forces coulombiennes d'attraction et de répulsion.*

Le théorème de Earenshaw est un corollaire du théorème de Gauss. Supposons qu'un système de charges ponctuelles fixes se trouve dans un état d'équilibre stable et considérons une charge quelconque q de ce système se trouvant en équilibre dans la position A (fig. 29). Pour être concret nous poserons que cette charge est positive (si elle était négative la démonstration serait la même). Si la charge q se déplaçait en un point A' infiniment voisin du point A, du fait de l'hypothèse d'un équilibre stable, on devrait voir apparaître une force dirigée vers le point A et qui chercherait à y ramener la charge q. Soit $\boldsymbol{E}$ le champ électrique créé par toutes les charges du système, la charge q exceptée. Au point A' ce champ est dirigé vers A quel que fût la direction du déplacement AA'. Entourons la charge q d'une surface fermée S quelconque, mais telle qu'elle n'embrasse aucune autre charge du système. Sur la surface S le champ $\boldsymbol{E}$ est dirigé vers le point A et de ce fait le flux du vecteur $\boldsymbol{E}$ à travers la surface S doit être négatif. Or ce résultat est en contradiction avec le théorème de Gauss en vertu duquel le flux doit être nul puisqu'il est créé par des charges extérieures à la surface S. Cette contradiction démontre le théorème de Earenshaw.

Si des forces autres que les forces électriques s'exercent dans le système, l'équilibre des charges peut être stable. Prenons, par exemple, trois billes identiques portant les mêmes charges. Fixons

deux billes aux extrémités d'un tube cylindrique en une substance isolante et plaçons la troisième bille au milieu (fig. 30). Si nous supposons que cette troisième bille peut glisser sans frottement dans le tube, on peut affirmer qu'elle occupera une position stable à mi-chemin entre les deux autres charges.

2. Le théorème de Gauss s'applique également aux champs gravitationnels, mais dans ce cas on n'a affaire qu'à des *forces d'attraction*. Comme il ne peut exister de configuration d'équilibre de points matériels s'attirant mutuellement conformément à la loi de la gravitation universelle de Newton, le théorème de Earenshaw est dans

Fig. 30

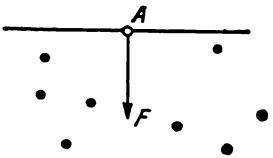


Fig. 31

ce cas dénué de sens. Ce résultat est évident pour un système de deux points matériels. Si à un instant quelconque ces points sont au repos, les forces d'attraction s'exerçant entre eux les mettront en mouvement jusqu'à ce qu'ils se confondent. Considérons maintenant un nombre arbitraire de points matériels (fig. 31). A tout instant on peut trouver dans ce système un point extrême A tel que tous les autres points matériels se trouveront du même côté d'un plan contenant le point A. La force $\boldsymbol{F}$ appliquée à A sera dirigée vers la région de l'espace où se trouvent tous les autres points matériels. Si à l'instant considéré le point A se trouve au repos, il se mettra en mouvement sous l'action de la force $\boldsymbol{F}$, ce qui détruit son équilibre. Le fait qu'il peut exister des configurations stables de charges électriques fixes résulte de ce qu'il existe des charges de deux signes et qu'on y trouve aussi bien des forces d'attraction que des forces de répulsion.

3. Les atomes des éléments chimiques sont constitués de noyaux atomiques portant des charges positives et d'électrons de charge négative. Les dimensions des atomes sont de l'ordre de 10^{-8} cm et celles des noyaux et des électrons sont environ 10^5 fois plus petites, autrement dit négligeables par rapport aux dimensions de l'atome. A un haut degré de précision on peut considérer l'atome comme un système de particules ponctuelles portant des charges électriques. On peut donc appliquer le théorème d'Earenshaw à ces systèmes. Il est hors de doute que les atomes sont des systèmes stables. Par conséquent, les électrons et les noyaux atomiques qui les constituent ne peuvent être au repos. La physique classique imagina le *modèle*

planétaire de l'atome justement pour expliquer la *stabilité* des systèmes atomiques. Selon ce modèle les électrons tournent autour du noyau atomique à l'instar des planètes tournant autour du Soleil. Or ce modèle s'avéra être un système instable. En effet tout électron tournant autour du noyau exécute un mouvement accéléré. Or selon les lois de l'électrodynamique classique *toute charge en mouvement accéléré doit émettre des ondes électromagnétiques.* Ainsi l'électron qui dépense continuellement son énergie pour émettre des ondes électromagnétiques devrait finalement tomber sur le noyau. La physique classique s'avéra incapable d'expliquer la stabilité de l'atome et il fallut attendre pour cela l'apparition de la mécanique quantique.

PROBLÈME

On dispose des charges ponctuelles identiques (en grandeur et en signe) aux sommets: 1) d'un triangle équilatéral, 2) d'un quadrilatère régulier, 3) d'un hexagone régulier. Quelle doit être la charge Q de signe contraire qui, placée au centre du système, s'y trouvera en équilibre?

Réponse. 1) $Q = -q/\sqrt{3}$; 2) $Q = -{}^1/_2\,(\sqrt{2} + {}^1/_2)\,q$; 3) $Q = -(5/4 + 1/\sqrt{3})\,q$.

§ 10. Champ électrique dans les substances

1. Les dimensions des noyaux atomiques sont près de cent mille fois plus petites que celles des atomes. Les dimensions des électrons seraient encore plus petites. Les particules chargées n'occupent donc qu'une part infime (10^{-15} environ) de l'espace occupé par un corps, le restant étant du vide. Les noyaux atomiques et les électrons créent dans ce vide des champs électromagnétiques. Le champ existant dans l'espace compris entre les atomes et les électrons, ainsi qu'à l'intérieur de ces particules, varie d'une façon extrêmement complexe dans l'espace et dans le temps. On l'appelle champ *microscopique* ou *microchamp*. La densité de répartition de l'électricité y est tout aussi compliquée, elle est très grande à l'intérieur des noyaux atomiques et des électrons et nulle entre ces particules. Il est alors question de densité de répartition *microscopique* (on pourrait dire *microdensité*). On désigne les grandeurs microscopiques à l'aide de l'indice « micro », par exemple E_{micro}, ρ_{micro}, etc. On ne peut pas les mesurer à l'aide des charges d'épreuve puisque la plus petite charge électrique est la charge de l'électron e. Or l'introduction d'une telle charge modifierait notablement le champ microscopique et la répartition des charges dans les systèmes atomiques. Cela signifie que l'introduction de grandeurs microscopiques telles que E_{micro}, ρ_{micro}, etc., se heurte à une difficulté de principe puisqu'on peut émettre des doutes sur la possibilité de principe de caractériser le

champ à l'aide de ces grandeurs. Néanmoins la physique classique admet qu'il est possible de le faire. H. A. Lorentz montra que, partant de la notion de champ microscopique, on pouvait établir des équations susceptibles de décrire les *processus macroscopiques* évoluant dans les corps. Nous avons adopté cette approche pour l'étude des équations macroscopiques de l'électrodynamique. Il est évident que la validité des équations macroscopiques de l'électrodynamique ne signifie pas que les conceptions microscopiques dont elles dérivent sont absolument correctes.

2. On arriverait à la description la plus détaillée du champ si on se fixait les valeurs des grandeurs microscopiques en tout point de l'espace et à tout instant. Mais c'est là une chose irréalisable pratiquement et peut-être même en principe. Dans un grand nombre de cas on peut se contenter d'une description beaucoup plus simple et beaucoup plus grossière qui est celle qu'utilise l'électrodynamique macroscopique. On ne tient compte ni de la structure atomique de l'électricité, ni des petites variations du champ se manifestant à des distances atomiques et subatomiques. On se contente donc de ne tenir compte que des variations du champ sur des distances macroscopiques. L'électrodynamique n'opère qu'avec des champs lissés et des répartitions d'électricité variant régulièrement dans l'espace et le temps. On dit qu'elle opère avec des *champs moyens* ou *macroscopiques*. Nous noterons $\boldsymbol{E}_{\text{macro}}$ ou $\boldsymbol{E}$ l'intensité des champs macroscopiques.

La description du champ régnant dans une substance à l'aide de grandeurs telles que $\boldsymbol{E}_{\text{micro}}$, ρ_{micro}, etc., est analogue à la description mécanique détaillée du mouvement des corps où on indique à tout instant les coordonnées de position et les vitesses de chacune des molécules et des particules qui les composent. Une description utilisant les grandeurs macroscopiques est par contre analogue à l'étude hydrodynamique de l'écoulement d'un liquide considéré comme un milieu continu. Dans ce dernier cas on caractérise la répartition spatiale de la substance par sa densité spatiale et son mouvement par la vitesse $\boldsymbol{v}$ du flux hydrodynamique, ces deux caractéristiques étant des fonctions continues du temps et des coordonnées spatiales. Les forces moléculaires sont prises en ligne de compte d'une façon globale par la considération des pressions internes et des contraintes tangentielles se manifestant lors de l'écoulement du liquide.

Il convient de donner maintenant une définition quantitative plus précise du champ macroscopique $\boldsymbol{E}$. Nous entendrons par $\boldsymbol{E}$ la moyenne du champ microscopique $\boldsymbol{E}_{\text{micro}}$ dans des volumes spatiaux physiquement infiniment petits. Pour calculer le champ macroscopique $\boldsymbol{E}$ en un point donné de l'espace, il faut tracer autour de ce point un volume V physiquement infiniment petit, intégrer le vecteur $\boldsymbol{E}_{\text{micro}}$ sur ce volume et diviser le résultat obtenu par le

volume V:

$$\text{micro}\, dV. \qquad \textbf{(10.1)}$$
V

On procède de la même façon pour déteiminer la densité macroscopique p = <pmicro) ou toute autre grandeur macroscopique. Le résultat des calculs ne doit pratiquement pas dépendre de la grandeur et de la forme du volume V. Il suffit pour cela que le volume V renferme un très grand nombre d'atomes mais soit suffisamment petit pour qu'on puisse le traiter (ainsi que n'importe quelle dimension linéaire) comme une différentielle mathématique. Les volumes V satisfaisant à ces conditions sont des *infiniment petits physiques*. Le moyennage par rapport à ces volumes (comme par exemple l'opération qu'implique (10.1)) égalise toutes les irrégularités et toutes les variations rapides du champ microscopique se manifestant à des distances atomiques, mais n'altère pas ses variations régulières à 1'échelle macroscopique.

3. On peut déduire les équations du champ macroscopique à partir des équations du champ microscopique. Si on considère les formes différentielles de ces deux groupes d'équations, on peut se poser la question de savoir quelle relation existe entre les dérivées de ces deux types de champs. La réponse à cette question est fournie par la formule mathématique suivante:

(10.2)

Cette formule affirme qu'on peut permuter le moyennage et la dérivation par rapport aux coordonnées. La même chose vaut pour la dérivation par rapport au temps. Pour le démontrer écrivons d'abord la formule (10.1) sous une forme plus développée:

(10.3)

En un point voisin on aura

$$<A(r + \text{A r}))= | \text{Ji4(r' + Ar')}\, dV'.$$

Comme le résultat du moyennage ne dépend ni des dimensions ni de la forme du domaine d'intégration, nous l'avons pris égal dans les deux cas. On peut prendre ainsi des volumes élémentaires égaux, ce qui nous permet d'écrire

$$<A(r + A r))-(A(r)) = \pm \text{J} \backslash A(\text{r' + Ar}) — A(\text{r»})]\, dV'.$$
y

Posons que le vecteur Δr est parallèle à l'axe X, i.e. $\Delta r = i\Delta x$. En divisant par Δx et en passant à la limite $\Delta x \to 0$, on obtient

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial x} = \frac{1}{V} \int\limits_V \frac{\partial A(r')}{\partial x'} dV',$$

qui est justement la formule (10.2). De façon analogue en dérivant l'expression (10.3) par rapport au temps en tant que paramètre, on trouvera le résultat suivant:

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle. \tag{10.4}$$

Admettons maintenant qu'appliqué au champ microscopique le théorème de Gauss s'écrit sous la forme

$$\operatorname{div} E_{\text{micro}} = 4\pi\rho_{\text{micro}}. \tag{10.5}$$

En moyennant cette relation et en remarquant que $\langle \operatorname{div} E_{\text{micro}} \rangle = \operatorname{div} \langle E_{\text{micro}} \rangle \equiv \operatorname{div} E$, on trouve

$$\operatorname{div} E = 4\pi\bar{\rho}, \tag{10.6}$$

où $\bar{\rho}$ est la densité moyenne (macroscopique) de l'électricité dans la substance, i.e. $\bar{\rho} = \langle \rho_{\text{micro}} \rangle$. C'est la *forme différentielle du théorème de Gauss appliqué aux substances.* Elle est vérifiée non seulement en électrostatique mais dans toute l'électrodynamique macroscopique.

4. Pour l'étude des phénomènes électriques évoluant dans les substances il est utile de bien connaître l'ordre de grandeur des forces s'exerçant entre les protons et les électrons. Ces forces sont très grandes par rapport aux forces gravitationnelles assurant l'attraction mutuelle de ces mêmes particules. Calculons, par exemple, le rapport de la force de répulsion électrique F_e s'exerçant entre deux protons à la force de leur attraction par gravitation F_g. La charge du proton est $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ unités de charge CGSE. Sa masse est $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g. Le rapport des forces est

$$F_e/F_g = e^2/(Gm_p^2) = 1{,}24 \cdot 10^{36},$$

où $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ dyne$\cdot$cm^2/g^2 est la constante gravitationnelle. La valeur de ce rapport est indépendante de la distance entre les protons puisque les deux forces F_e et F_g varient en raison inverse du carré de la distance. Comme la masse de l'électron $m_e = 9{,}11 \times \times 10^{-28}$ g est 1836 fois plus petite que celle du proton, le rapport des forces pour deux électrons est 1836^2 fois plus grand que pour les protons et vaut $4{,}17 \cdot 10^{42}$.

Qu'adviendrait-il si la Terre perdait tous ses électrons? Comme la Terre contient pratiquement autant de protons que de neutrons, après perte de tous les électrons, chaque proton aurait été repoussé par la Terre avec une force $0{,}62 \cdot 10^{36}$ fois plus grande que le poids propre du proton. Cette force équivaut à un poids d'un million de

tonnes. Ces forces gigantesques ne se manifestent pas parce que dans les conditions usuelles tous les corps sont électriquement neutres, les charges positives portées par les noyaux atomiques étant exactement compensées par les charges négatives des électrons. Lorsqu'on électrise un corps on n'affecte que très peu la compensation mutuelle des charges positives et négatives. Supposons, par exemple, que l'on communique à une bille de rayon $a = 1$ cm une charge $q = 100$ unités CGSE $= {}^1/_3 \cdot 10^{-7}$ C, ce qui représente une charge notable. (L'intensité du champ électrique à proximité de la surface de la bille atteint en effet la valeur $E = q/a^2 = 100$ unités CGSE $= 30\,000$ V/cm.) Si on établit entre deux billes métalliques de cette dimension se trouvant dans l'air à une distance de 1 cm l'une de l'autre une différence de potentiel égale à 30 000 volts, on verra jaillir une étincelle (dans un air sec à température et pression normales). Si on veut communiquer à la bille une charge q positive, on doit extraire de la bille un nombre d'électrons égal à $n_e = q/e \approx 2 \cdot 10^{11}$. Si la masse de la bille est $M = 30$ g, le nombre total de neutrons et de protons qu'elle renferme est $N_p + N_n = \frac{M}{m_p} = \frac{30}{1{,}67 \cdot 10^{-24}} \approx 2 \cdot 10^{25}$. L'excédent du nombre de protons sur le nombre d'électrons est très petit, égal à $n_e/N_p \sim 10^{-14}$ du nombre total des protons. La diminution de la masse de la bille due à l'électrisation est égale à $n_e m_e \approx$ $\approx 2 \cdot 10^{-16}$ g, donc environ 10^{-17} de la masse de la bille. Il n'existe aucun procédé permettant de déceler une diminution de masse aussi faible. Si nous supposons qu'à l'électrisation les électrons ont été extraits de la couche superficielle de la bille, il est instructif d'estimer l'épaisseur δ de cette couche. Le nombre total de protons et de neutrons contenus dans cette couche est $\sim n_e$ et sa masse est $\Delta M \sim$ $\sim n_e m_p \sim 10^{-13}$ g. Comme $\Delta M/M = 3\delta/a$, nous trouvons $\delta \sim$ $\sim 10^{-15}$ cm.

5. Lorsqu'on introduit un corps dans un champ électrique, les électrons se déplacent à l'encontre du champ, tandis que le déplacement des noyaux atomiques, qui sont beaucoup plus lourds, est extrêmement faible. Il se produit ainsi une séparation partielle des charges positives et négatives. Dans des régions isolées du corps apparaissent des charges macroscopiques de signes opposés. C'est le phénomène d'*induction électrique* ou d'*influence électrique*; les charges qui apparaissent ainsi sont appelées *charges induites*. Toute l'influence des substances sur le champ électrique se réduit à l'apparition des charges induites qui créent un champ électrique supplémentaire se superposant au champ des charges primaires. Si on connaît toutes les charges primaires et toutes les charges induites, on peut calculer le champ résultant sans se soucier de la présence de la substance qui avait été placée dans le champ. Le champ total s'obtient en superposant les champs coulombiens excités dans le vide par toutes les charges primaires et induites.

§ 11. Comportement des conducteurs dans un champ électrique

1. Les déplacements des charges électriques sont essentiellement différents dans les corps métalliques et dans les corps isolants. Les métaux renferment des *électrons libres* qui peuvent se déplacer à toute distance dans les limites du corps métallique. Par suite les charges induites qui apparaissent dans un champ électrique sur les extrémités opposées d'un corps métallique peuvent être séparées mécaniquement les unes des autres. Prenons deux cylindres métalliques A et B placés sur des supports isolants et reliés à des électroscopes (fig. 32). Rapprochons-les jusqu'à ce qu'ils soient en contact. Si nous approchons maintenant une boule chargée C, on observera une déviation des aiguilles des deux électroscopes. Si on éloigne la boule C, les aiguilles reviennent à zéro. Ecartons l'un de l'autre les deux cylindres en présence de la boule chargée C, puis éloignons cette dernière. Nous constaterons que les cylindres A et B, les tiges et les aiguilles des électroscopes sont chargés. Si la boule C portait une charge positive, le cylindre A portera une charge négative et le cylindre B portera une charge positive. Pour s'en rendre compte on prendra une tige de verre que l'on aura préalablement frottée avec une peau. En touchant avec cette tige le cylindre A, on constate que la déviation de l'électroscope correspondant diminue. Si on avait touché de la même façon le cylindre B, la déviation de son électroscope aurait augmenté.

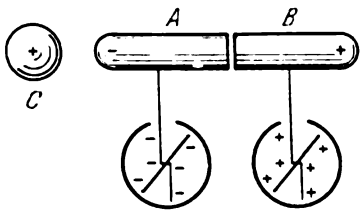


Fig. 32

2. Si un champ électrique macroscopique pouvait exister à l'intérieur d'un conducteur homogène, il aurait mis en mouvement les électrons libres, et le conducteur aurait été le siège d'un courant électrique. Une distribution d'équilibre des charges électriques aurait été impossible. L'état d'équilibre électrique implique que le champ macroscopique $\boldsymbol{E}$ soit nul en tout point à l'intérieur du conducteur *). La divergence du vecteur $\boldsymbol{E}$ sera nulle elle aussi ainsi que $\bar{\rho}$, en vertu du théorème de Gauss (10.6). Ainsi, *à l'équilibre, la densité spatiale des charges électriques dans tout conducteur homogène est égale à zéro. Les charges électriques se répartissent à la surface du conducteur et on n'en trouve pas à l'intérieur.* Nous avons indiqué au § 10, pt. 4 que l'épaisseur de la couche superficielle, où la neutralité électrique de la substance est rompue, est tellement petite qu'on

*) Dans un conducteur non homogène cette condition peut ne pas être satisfaite par suite de l'action de forces d'origine non électrostatique.

peut la négliger en électrostatique macroscopique. On peut donc utiliser un modèle mathématique idéalisé où l'électricité se comporte comme un fluide continu disposé à la surface du conducteur comme si c'était une surface géométrique.

Les charges électriques se répartissent le long de la surface des conducteurs parce qu'entre ces charges s'exercent des forces coulombiennes de répulsion et d'attraction. Imaginons qu'il existe des charges électriques à l'intérieur d'un conducteur. Selon le théorème de Earenshaw aucune configuration statique de charges ne peut être stable à l'intérieur d'un conducteur. Les forces d'attraction entre charges de signes opposés chercheront à les rapprocher les unes des autres, tandis que les forces de répulsion entre charges de même signe chercheront à les éloigner les unes des autres aussi loin que possible et les repousser à la surface du conducteur. Il en résulte que la densité superficielle des charges électriques sera maximale dans les parties les plus éloignées, donc aux proéminences où la courbure est la plus grande, par exemple sur les pointes. La formule (8.6) qui montre que le champ E doit varier très fortement à proximité d'une pointe confirme cette conclusion.

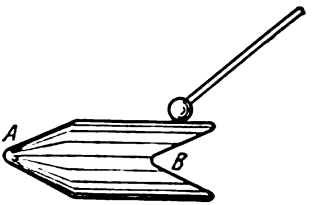


Fig. 33

3. On peut étudier la répartition de l'électricité sur la surface d'un conducteur à l'aide d'un *corps d'épreuve* en forme d'une petite bille métallique fixée à un support isolant. Soit un corps métallique (dont la forme est représentée sur la figure 33), placé sur un support isolant. Après lui avoir communiqué une charge électrique, touchons sa pointe A avec le corps d'épreuve, puis approchons ce dernier d'un électroscope qui accusera une déviation. Si nous répétons l'expérience après avoir touché avec le corps d'épreuve une face latérale du corps métallique, nous constaterons que la déviation de l'électroscope sera plus petite que dans le premier cas. Si enfin on touche avec le corps d'épreuve l'encoche B, le corps d'épreuve ne fera pas dévier l'aiguille de l'électroscope. Ces expériences simples montrent que la densité d'électricité est maximale en A et minimale en B.

Prenons un treillis métallique souple et collons sur ses deux faces des bandelettes de papier fin (fig. 34). Fixons le treillis à l'aide de deux supports isolants et communiquons-lui une charge électrique. Tendu, le treillis est plan, et les bandelettes de papier se trouvant sur ses deux faces s'en écartent d'un même angle. Si on déforme le treillis, les bandelettes se trouvant sur la face convexe s'en écartent davantage et celles du côté concave s'en écartent d'un plus petit angle que dans le cas précédent.

Sur les pointes d'un conducteur chargé la densité superficielle d'électricité peut être tellement grande que l'électricité commence

à s'en échapper. Dans le champ non homogène et de grande intensité qui règne à proximité d'une pointe les molécules d'air acquièrent des charges par l'effet d'influence et sont attirées par la pointe. Dès qu'une molécule vient à toucher la pointe, elle prend une charge de même signe que celle de la pointe et s'en trouve aussitôt repoussée. La force de répulsion est plus grande que la force d'attraction qui s'exerçait juste avant, car la première s'exerce sur une molécule

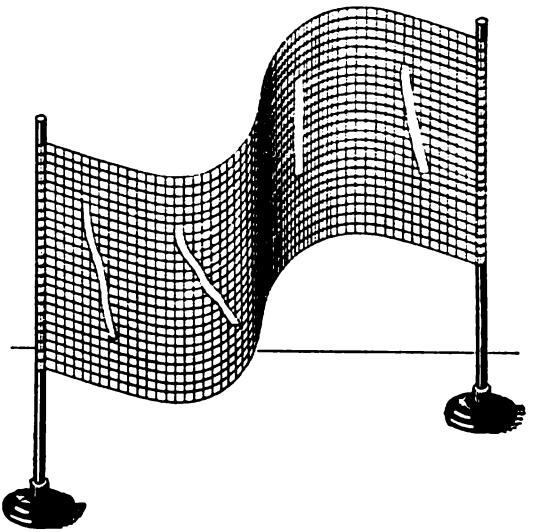


Fig. 34

chargée et la seconde sur une molécule neutre. De ce fait les molécules chargées s'éloignent des pointes avec des vitesses plus grandes que celles qu'elles avaient en s'en approchant. Il apparaît ainsi un flux de particules d'air chargées, allant de la pointe vers l'extérieur, que l'on appelle le *vent électrique*. Ce courant d'air est suffisamment fort pour souffler une bougie.

Un appareil de démonstration appelé *tourniquet de Franklin* (1706-1790) permet de mettre en rotation des croisillons en fil de fer fin grâce à l'écoulement des molécules chargées de ses pointes (fig. 35). L'appareil fonctionne de la même façon que la roue de Segner. Dans une autre expérience de démonstration (fig. 36) les molécules chargées s'écoulant de deux pointes mettent en rotation un cylindre de faible masse tournant autour d'un axe vertical (rotor électrique).

Dans des champs électriques intenses le mécanisme de l'effet de pointe devient plus compliqué. Dans un champ intense à proximité d'une pointe les molécules d'air s'ionisent et l'air devient conducteur

d'électricité. Il apparaît alors un courant électrique dirigé vers la pointe ou en sens inverse (*rupture électrique*). Ce courant enlève les charges accumulées sur la pointe ; c'est le principe des paratonnerres.

4. Au passage d'une frontière entre deux milieux la composante tangentielle du champ électrique ne varie pas (cf. § 6, pt. 6).

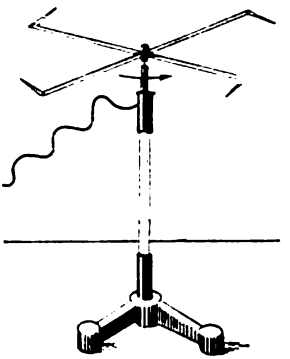


Fig. 35

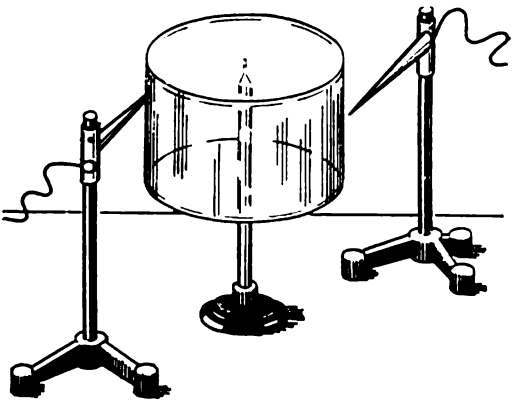


Fig. 36

En électrostatique le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur est nul. Il s'ensuit que dans l'espace extérieur le champ $\boldsymbol{E}$ doit être orthogonal à la surface du conducteur. S'il n'en était pas ainsi, les charges superficielles auraient été mises en mouvement

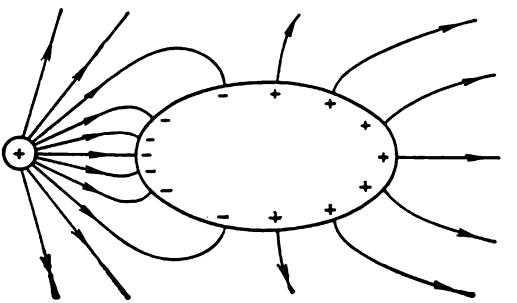


Fig. 37

sous l'action de la composante tangentielle du champ $\boldsymbol{E}$ et l'équilibre des charges aurait été impossible. Les lignes de force sont donc toujours orthogonales à la surface et s'y arrêtent sans pénétrer dans le conducteur (fig. 37).

A l'aide de la formule (6.9) il est facile de calculer l'intensité du champ électrique régnant à proximité de la surface d'un con-

ducteur. En posant dans (6.9) $E_{1n} = 0$ (à l'intérieur du conducteur) et $E_{2n} = E$ (en dehors du conducteur) nous obtenons $E = 4\pi\sigma$ et sous forme vectorielle

$$\boldsymbol{E} = 4\pi\sigma\boldsymbol{n} \tag{11.1}$$

(la normale $\boldsymbol{n}$ est orientée de la surface vers le milieu environnant).

Selon les formules générales (6.13) et (6.15) la force électrique $\boldsymbol{f}$ agissant sur l'unité d'aire de la surface chargée d'un conducteur est

$$\boldsymbol{f} = \frac{\sigma}{2}\boldsymbol{E} = 2\pi\sigma^2\boldsymbol{n} = \frac{E^2}{8\pi}\boldsymbol{n}. \tag{11.2}$$

Cette force est toujours orientée vers l'extérieur, i.e. tend à éloigner les charges qui se trouvent à la surface.

5. Nous allons démontrer maintenant plusieurs propositions dont l'ensemble constitue le *théorème de Faraday*. Considérons un conducteur homogène comportant une cavité contenant des charges électriques (fig. 38). Traçons une surface fermée S embrassant la cavité et contenue toute entière dans le conducteur. Comme l'intensité du champ électrique est nulle sur la surface S, la charge totale embrassée par S est également nulle. Ainsi *la somme des charges induites sur la surface interne d'une enceinte conductrice est égale et de signe opposé à la somme des charges qu'embrasse cette enceinte.*

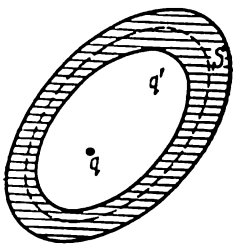


Fig. 38

A l'équilibre les charges induites q' se répartissent sur la surface interne de l'enceinte conductrice de façon à compenser complètement le champ coulombien des charges q qu'elle embrasse. Cette compensation a lieu non seulement sur les parois de l'enceinte conductrice, mais aussi dans tout l'espace extérieur. Pour le démontrer imaginons que le milieu extérieur soit rempli tout entier d'un milieu conducteur neutre. A l'équilibre le champ y est nul, mais ce milieu n'exerce aucune action sur le champ électrique puisque ses charges positives et négatives se compensent mutuellement en tout point. Il en résulte que si on supprime ce milieu laissant en place l'enceinte conductrice, le champ n'en sera nulle part affecté. Dans tout l'espace que remplissait le milieu conducteur, le champ restera nul. Ainsi *le champ coulombien dû aux charges embrassées par une enceinte conductrice et aux charges induites sur sa surface interne est nul dans tout l'espace extérieur.*

Considérons maintenant le cas où toutes les charges électriques se trouvent dans le milieu extérieur. Si le corps conducteur est massif, aucun champ électrique n'existe à l'intérieur. Enlevons une partie de la substance (électriquement neutre) de manière à créer

une cavité dans le corps. Nous savons que de ce fait le champ ne sera nulle part modifié et l'équilibre électrique sera maintenu. On en conclut que *s'il n'y a pas de charges dans la cavité, le champ électrique y est nul. Les charges électriques extérieures ne créent aucun champ électrique dans les cavités.* Pour soustraire les corps, des appareils de mesure par exemple, à l'action de champs électriques extérieurs, on les entoure d'une enveloppe conductrice (*écran électrostatique*).

Nous voyons ainsi qu'une enveloppe conductrice fermée divise tout l'espace en une région intérieure et une région extérieure qui sont électriquement indépendantes l'une de l'autre. Par exemple, si on déplace des charges dans le milieu extérieur (intérieur) à l'enveloppe conductrice, on n'observera aucun changement à son intérieur (à l'extérieur de celle-ci). Si on met toutes les charges intérieures en contact avec l'enveloppe conductrice, ces charges seront aussitôt compensées par des charges induites. Le champ intérieur disparaît mais ni le champ extérieur ni la répartition des charges sur la surface externe de l'enveloppe n'en seront affectés.

6. Tous ces résultats furent obtenus expérimentalement par Faraday. Pour les illustrer nous allons décrire quelques expériences de démonstration. Prenons un « *cylindre de Faraday* » qui est un récipient métallique de forme cylindrique de grande longueur, ouvert à un bout. Relions-le à un électroscope (fig. 39) et introduisons dans le cylindre une boule chargée fixée à un manche isolant. Nous observerons une déviation de l'aiguille de l'électroscope. Si la boule est enfoncée profondément dans le cylindre, aucun déplacement de la boule ne pourra modifier l'angle de déviation de l'électroscope, même si la boule vient à toucher la paroi interne du cylindre. Dans ce dernier cas la boule perd sa charge. Pour s'en rendre compte il suffit de la retirer du cylindre et la mettre en contact avec un autre électroscope non chargé. La charge de la boule est passée sur la face externe du cylindre. Dans une expérience très soignée on doit recouvrir l'extrémité ouverte du cylindre d'un couvercle métallique aussitôt après y avoir introduit la boule chargée. Si le cylindre a une longueur suffisante, l'expérience réussit fort bien même sans couvercle.

C'est en se fondant sur des expériences de ce type que Faraday suggéra un procédé de transfert de la charge emmagasinée sur un corps conducteur sur un autre corps conducteur. Ce procédé consiste à ménager dans le second corps une cavité dans laquelle on introduit le premier corps préalablement chargé. Lorsque ce dernier aura été mis en contact avec la paroi interne de la cavité, sa charge sera entièrement transférée au corps creux. Après extraction du premier corps on peut le recharger, le réintroduire dans la cavité et communiquer à celle-ci une nouvelle charge. Comme ce processus peut être répété un grand nombre de fois, on peut communiquer au corps creux une charge théoriquement infiniment grande. En pratique la

grandeur de la charge que peut prendre le corps creux est limitée par l'écoulement des charges résultant de l'ionisation de l'air ambiant. C'est le principe de fonctionnement du générateur électrostatique de Van de Graaff (1901-1967).

Le générateur de Van de Graaff comporte une sphère métallique creuse *1* d'un diamètre de plusieurs mètres montée sur une colonne isolante *2* (fig. 40). Une bande sans fin *3* en tissu caoutchouté est constamment chargée par un système de pointes *4* alimentées par une source de tension électrique. Entre les deux brins de la bande mobile

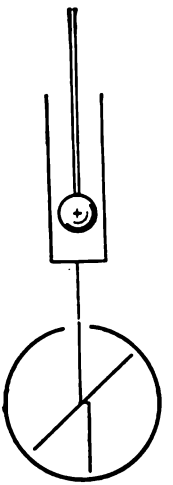


Fig. 39

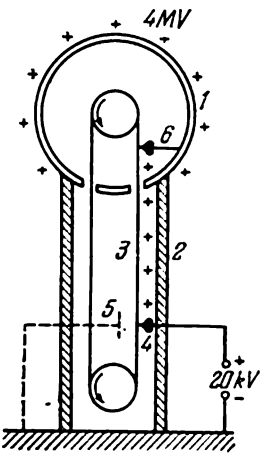


Fig. 40

et à la même hauteur que les pointes se trouve une plaque métallique mise à la terre *5* qui favorise l'écoulement des charges des pointes *4* sur la bande *3*. Un autre système de pointes *6* sert à prélever les charges de la bande et les transmettre à la sphère creuse. Le générateur de Van de Graaff permet de réaliser des tensions de 3 à 5 millions de volts, aussi l'utilise-t-on pour l'accélération des électrons et des ions.

7. Décrivons maintenant une expérience de démonstration utilisant la *cage de Faraday*. C'est un cylindre dont les bases sont en tôle métallique et la paroi latérale en treillis métallique à travers lequel on peut voir ce qui se passe à l'intérieur du cylindre (fig. 41). Sur la surface extérieure du treillis on attache des bandes de papier et le long de l'axe du cylindre on dispose une tige métallique reliée au couvercle de la cage. A l'extrémité inférieure de la tige sont attachées des bandes de papier faisant fonction d'électroscope et que l'on peut faire sortir de la cage à travers un orifice pratiqué dans le fond de la cage. La cage est montée sur des supports isolants. Si on com-

munique des charges électriques à la cage, les bandes de papier collées à l'extérieur de la cage se redressent, tandis que les bandes qui sont à l'intérieur de la cage restent pendantes. Mais si on extrait ces dernières de la cage (par l'orifice du bas), elles se repoussent mutuellement et dévient de leurs positions pendantes. Faraday réalisa en 1836 une expérience analogue en utilisant une grande cage métallique suspendue au plafond par des cordes en soie. Muni d'un électroscope,

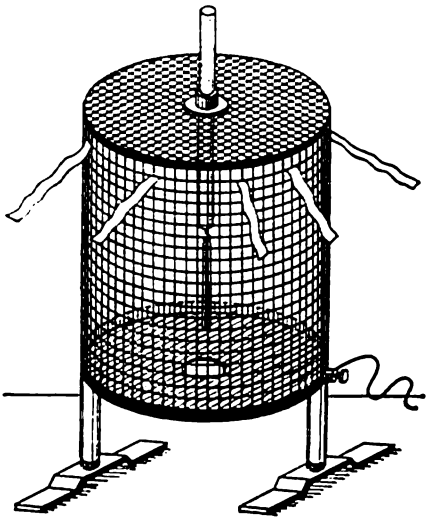


Fig. 41

il se plaça dans la cage, puis fit approcher de la cage des corps métalliques chargés à l'aide d'une machine électrostatique. On voyait des étincelles jaillir entre ces corps et la cage, ce qui témoignait de ce qu'on communiquait à la cage de grandes charges électriques. A l'intérieur de la cage l'électroscope restait inerte et Faraday lui-même n'éprouvait aucune sensation particulière. Les physiciens qui travaillent avec des générateurs de Van de Graaff de haute tension s'installent avec leurs appareils de mesure à l'intérieur de la sphère creuse lorsque la tension atteint des millions de volts et y travaillent sans aucune crainte, assurés de la protection que leur apporte le théorème de Faraday.

§ 12. Polarisation des diélectriques

1. Les diélectriques ne sont pas conducteurs de l'électricité, mais on peut y faire apparaître, tout comme dans les métaux, des charges induites. Approchons par exemple de la boule C d'un électroscope

chargé un corps diélectrique AB électriquement neutre (fig. 42). On constate que l'angle de déviation de l'aiguille de l'électroscope diminue. Cela tient à ce que la boule de l'électroscope induit sur l'extrémité B du corps diélectrique des charges de même signe et sur son extrémité A des charges de signe contraire. Ces charges induites font passer sur la boule C une partie des charges accumulées sur l'aiguille et la tige de l'électroscope, ce qui réduit l'angle de déviation de l'aiguille de l'électroscope.

Essayons de séparer les charges induites qui sont apparues sur le corps diélectrique par le même procédé que nous avons utilisé

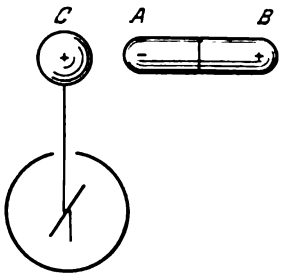


Fig. 42

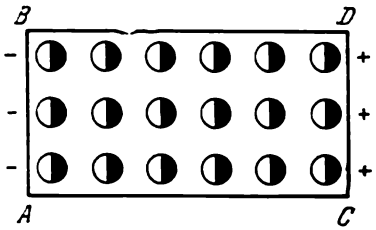


Fig. 43

dans le cas de métaux (cf. fig. 32). Supposons que le corps diélectrique est composé de deux parties A et B en contact mutuel. Si on sépare ces deux parties en présence d'un électroscope chargé et si on décharge ensuite l'électroscope (ou qu'on l'enlève), on constate qu'aucune des parties du diélectrique n'est chargée. Cette expérience montre que dans les diélectriques les charges ne sont pas mobiles, comme le sont les électrons dans les métaux.

2. Les charges que portent les diélectriques ne peuvent se déplacer de leurs positions d'équilibre qu'à des distances atomiques. Supposons, par exemple, que le diélectrique soit constitué de molécules neutres. Sous l'action d'un champ électrique appliqué les centres de masse des électrons se déplaceront dans les molécules par rapport aux centres de masse des noyaux atomiques et les molécules deviennent des dipôles électriques qui s'alignent de manière que leurs extrémités chargées positivement soient orientées dans le sens du champ électrique $\boldsymbol{E}$. On dit alors que le diélectrique est *polarisé*; les déplacements en sens contraires de ses charges positives et négatives est l'effet de *polarisation électrique*. Sur la figure 43 le diélectrique est schématisé par un parallélépipède rectangulaire et ses molécules par de petites billes. La moitié de la molécule chargée positivement est noircie et celle qui est chargée négativement est en clair. On trouve des charges superficielles non compensées négatives sur l'extrémité AB du parallélépipède $ABDC$ et positives sur l'extrémité CD.

Ce sont les charges induites dues à la polarisation du diélectrique. On les appelle *charges de polarisation* ou *charges liées* afin de souligner que leurs déplacements sont limités et qu'elles ne peuvent se déplacer qu'à l'intérieur des molécules électriquement neutres. Dans la masse du diélectrique les charges positives et négatives se compensent mutuellement, de sorte qu'il n'y existe aucune charge de polarisation de grandeur macroscopique. Ce n'est exact que tant que la polarisation du diélectrique est homogène, i.e. tant que ses molécules sont polarisées et orientées de façon identique. Si la polarisation n'est pas homogène, les charges ne se compensent plus exactement et dans la masse du diélectrique peuvent apparaître des charges liées spatiales.

En plus des molécules neutres, les diélectriques peuvent renfermer des *ions* positifs ou négatifs. Un excédent d'ions de l'un ou de l'autre signe dans une partie du diélectrique correspond à la présence dans cette partie de charges macroscopiques non compensées. Ces charges sont dites *libres*. Elles peuvent apparaître dans un diélectrique à la suite de son électrisation par frottement. Toutes les charges accumulées sur les conducteurs sont également des charges libres.

3. On connaît encore un autre mécanisme de polarisation des diélectriques. Il existe des diélectriques dont les molécules possèdent des moments dipolaires même en l'absence de champ électrique. On les appelle molécules *polaires*. En l'absence de champ les molécules polaires exécutent des mouvements thermiques désordonnés et leurs orientations sont quelconques. Lorsqu'on applique un champ électrique les moments dipolaires des molécules cherchent à s'aligner le long du champ, ce qui correspond à la polarisation du diélectrique.

Il existe enfin des diélectriques dont l'édifice cristallin est construit avec des ions de signes contraires (cristaux de NaCl par exemple). Ces cristaux sont dits *ioniques*. Un cristal ionique comporte deux réseaux cristallins imbriqués l'un dans l'autre, dont l'un est constitué d'ions positifs, l'autre d'ions négatifs. On ne peut donc plus parler d'atomes ou de molécules, le cristal tout entier constitue une sorte de molécule géante. Lorsqu'on applique un champ électrique, le réseau d'ions positifs se déplace dans un sens et le réseau d'ions négatifs dans le sens opposé. Cela correspond à la polarisation électrique des cristaux ioniques. On connaît des cristaux ioniques qui sont polarisés même en l'absence de champ électrique extérieur.

4. Pour nos besoins immédiats la connaissance de la constitution des diélectriques et du mécanisme de leur polarisation n'est pas essentielle. La seule chose qui importe est que la polarisation du diélectrique y fait apparaître des charges macroscopiques non compensées. Nous pouvons nous contenter d'un modèle grossier et assimiler l'électricité négative et positive à des fluides continus uniformément mélangés. Lors de la polarisation de ce modèle de diélectrique ces deux fluides se déplacent l'un par rapport à l'autre. Dans les condi-

tions ordinaires ces déplacements sont absolument infimes même à l'échelle atomique parce que les champs appliqués sont très faibles en comparaison des champs électriques intérieurs des atomes et des molécules. Ainsi dans l'atome d'hydrogène l'électron est soumis au champ électrique du noyau dont l'intensité $E = e/r^2 \sim 10^7$ unités CGSE $\approx 10^{11}$ V/m est énorme en comparaison des champs macroscopiques usuels.

5. Pour faciliter l'étude quantitative de la polarisation des diélectriques on utilise le *vecteur polarisation* qui est le moment dipolaire de l'unité de volume du diélectrique résultant de la polarisation. Prenons un bloc de diélectrique homogène en forme de parallélépipède oblique (fig. 44) et plaçons-le dans un champ électrique uniforme dont la direction est parallèle aux arêtes latérales du parallélépipède. Sur les bases du parallélépipède apparaissent alors des charges de polarisation d'une densité superficielle σ_{pol}. Aucune charge de polarisation n'apparaît sur les faces latérales car le déplacement des charges dans la masse du diélectrique est parallèle à ces faces. Si S est l'aire de la base du parallélépipède, le moment dipolaire du diélectrique est $\sigma_{\text{pol}} S \boldsymbol{l}$, où $\boldsymbol{l}$ est le vecteur mené de la base négative du parallélépipède jusqu'à sa base positive parallèlement aux arêtes latérales. Le vecteur polarisation du diélectrique est défini par

$$\boldsymbol{P} = \frac{\sigma_{\text{pol}} S}{V} \boldsymbol{l}, \tag{12.1}$$

où V est le volume du parallélépipède.

Soit $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire de la normale extérieure à la base du parallélépipède portant une charge positive. On a alors $V = S\,(\boldsymbol{ln})$. Portons cette expression dans (12.1) et multiplions scalairement par $\boldsymbol{n}$:

$$\sigma_{\text{pol}} = (\boldsymbol{Pn}) = P_n. \tag{12.2}$$

Dans le cas particulier d'un parallélépipède droit $\sigma_{\text{pol}} = P$. Nou, avons écrit la formule (12.2) pour la base chargée positivements mais elle s'applique également à la base chargée négativement puisque pour cette base la normale extérieure $\boldsymbol{n}$ est orientée en sens inverse, ce qui fait que la projection P_n est négative. Cette formule est vérifiée aussi pour les faces latérales où $\sigma_{\text{pol}} = 0$. Ainsi la formule (12.2) est d'une application générale.

La formule (12.2) montre que la composante normale P_n représente la quantité d'électricité déplacée lors de la polarisation à travers un élément de surface d'aire unité dans le sens de la normale $\boldsymbol{n}$ à cet élément de surface. Cette interprétation reste valable dans le cas d'une polarisation non homogène où le vecteur $\boldsymbol{P}$ varie d'un point à un autre. Pour s'en rendre compte il suffit de diviser en pensée tout le diélectrique en petits volumes dans lesquels la polarisation serait homogène.

6. Nous avons déjà mentionné que dans le cas d'une polarisation non homogène des charges électriques apparaissent non seulement sur la surface du diélectrique, mais aussi à l'intérieur de son volume. Calculons la charge de polarisation apparaissant dans un élément de volume V du diélectrique, délimité par une surface fermée S (fig. 45).

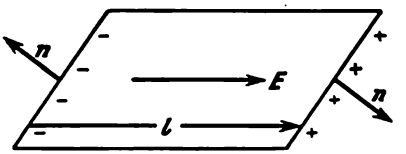


Fig. 44

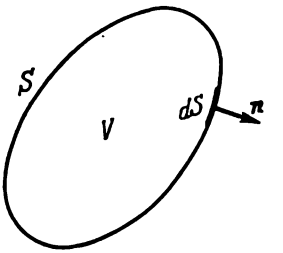


Fig. 45

La charge qui se trouve déplacée par polarisation à travers l'élément de surface dS dans le sens négatif de la normale $\boldsymbol{n}$ est égale d'après (12.2) à $-P_n\,dS$. La charge de polarisation qui pénètre à travers toute la surface S dans le volume V est égale à

$$q_{\text{pol}} = -\oint P_n\,dS = -\oint (\boldsymbol{P}\,d\boldsymbol{S}). \tag{12.3}$$

Si la polarisation est homogène $q_{\text{pol}} = 0$.

§ 13. Application du théorème de Gauss aux diélectriques

1. Nous avons montré au § 11 que l'action qu'exerce un diélectrique sur un champ électrique se ramène à l'action des charges de polarisation. On peut donc appliquer aux diélectriques la relation (5.5) en ajoutant aux charges libres q les charges de polarisation q_{pol}:

$$\oint E_n\,dS = 4\pi\,(q + q_{\text{pol}}). \tag{13.1}$$

En y portant l'expression de q_{pol} tirée de (12.3) nous obtenons

$$\oint (E_n + 4\pi P_n)\,dS = 4\pi q. \tag{13.2}$$

Introduisons un nouveau vecteur

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}, \tag{13.3}$$

que l'on appelle *vecteur induction électrique*. On écrira alors

$$\oint D_n\,dS = 4\pi q. \tag{13.4}$$

Cette égalité exprime le *théorème de Gauss relatif au champ électrique dans les diélectriques*. Nous voyons que le flux du vecteur $\boldsymbol{D}$ à travers une surface fermée n'est dû qu'aux charges libres et c'est ce résultat qui justifie l'introduction du vecteur $\boldsymbol{D}$. Dans le vide les vecteurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$ sont confondus.

2. La forme différentielle de (13.4) est la suivante:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{13.5}$$

où ρ est la densité spatiale des charges *libres*. Rappelons que les théorèmes (13.4) et (13.5) sont utilisables non seulement en électrostatique, mais aussi pour les champs variables dans le temps. Ces théorèmes s'intègrent dans le système des équations électrodynamiques fondamentales de Maxwell.

En portant (13.3) dans (13.5) on obtient

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi (\rho - \operatorname{div} \boldsymbol{P}).$$

Mais comme on a aussi

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi (\rho + \rho_{\text{pol}})$$

on en déduit

$$\rho_{\text{pol}} = -\operatorname{div} \boldsymbol{P}. \tag{13.6}$$

3. Le théorème de Gauss relatif au vecteur induction dans les diélectriques se présente sous la même forme que lorsqu'il concerne l'intensité du champ électrique dans le vide. Par suite toutes les relations mathématiques qu'on en avait déduites pour le vide restent valables pour tout diélectrique homogène à condition de remplacer le vecteur $\boldsymbol{E}$ par le vecteur $\boldsymbol{D}$. On obtient ainsi des formules (6.1) à (6.3) et (6.5) les relations suivantes:

$$D = 2\pi\sigma, \tag{13.7}$$

$$D = \begin{cases} 4\pi\rho x & \text{à l'intérieur d'une plaque,} \\ 4\pi\rho a & \text{en dehors d'une plaque} \end{cases} \tag{13.8}$$

$$D = \begin{cases} {}^4/_3\pi\rho r & \text{à l'intérieur d'une sphère,} \\ {}^4/_3\pi\rho \dfrac{a^3}{r^2} & \text{en dehors d'une sphère.} \end{cases} \tag{13.9}$$

L'induction d'une charge ponctuelle dans un diélectrique homogène est

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{r^3}\boldsymbol{r}. \tag{13.10}$$

§ 14. Conditions aux limites

1. Nous avons déduit de la relation (5.5) la condition aux limites (6.9) que doivent vérifier les composantes normales du vecteur $\boldsymbol{E}$ sur une surface chargée. En procédant de la même façon nous déduisons du théorème de Gauss pour les diélectriques (13.4) qu'à la

frontière de deux diélectriques doit être vérifiée l'égalité suivante:

$$D_{2n}-D_{1n}=4\pi\sigma, \qquad (14.1)$$

où σ est la densité superficielle des charges libres sur la surface de séparation des diélectriques.

La différence entre les formules (14.1) et (6.9) résulte de l'existence de charges de polarisation apparaissant sur la surface de séparation des diélectriques. Comme la densité superficielle de ces charges de polarisation est égale à $\sigma_{pol} = P_{1n} - P_{2n}$ (fig. 46), on écrira $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi(\sigma + \sigma_{pol})$ ou

$$(E_{2n} + 4\pi P_{2n}) - (E_{1n} + 4\pi P_{1n}) = 4\pi\sigma. \qquad (14.2)$$

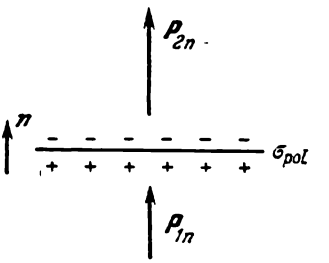


Fig. 46

Cette dernière formule est identique à (14.1).

A la surface de séparation d'un diélectrique d'avec un métal le vecteur induction est défini par

$$\boldsymbol{D} = 4\pi\sigma\boldsymbol{n}. \qquad (14.3)$$

La normale unitaire $\boldsymbol{n}$ y est menée du métal vers le diélectrique.

S'il n'y a pas de charges libres sur la surface de séparation de deux diélectriques

$$D_{1n} = D_{2n}. \qquad (14.4)$$

Ainsi lorsqu'on traverse une frontière non chargée de deux diélectriques, la composante normale du vecteur $\boldsymbol{D}$ y est continue. En ce qui concerne le vecteur $\boldsymbol{E}$, ses composantes tangentielles restent continues sur n'importe quelle surface de séparation de milieux différents:

$$E_{1t} = E_{2t}. \qquad (14.5)$$

On démontre cette égalité de la même façon que pour le cas d'un champ électrique dans le vide (cf. § 6 et § 17).

2. Disposant des conditions aux limites (14.4) et (14.5), on peut formuler une méthode de principe pour la mesure des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$ dans les diélectriques. La méthode usuelle de mesure de $\boldsymbol{E}$, fondée sur la mesure de la force appliquée à une charge d'épreuve, fonctionne parfaitement dans le vide, mais n'est pas toujours utilisable lorsqu'il s'agit de mesures sur les substances. En effet l'expression $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ est vérifiée dans le vide, mais ne constitue qu'une approximation, et encore pas toujours, dans le cas de substances. D'autre part, il est bien souvent impossible d'introduire une charge d'épreuve dans une substance, comme par exemple dans le cas où on voudrait mesurer l'intensité ou l'induction du champ électrique dans un diélectrique solide. Le seul *procédé de principe* que l'on pourrait mettre en œuvre dans tous les cas pour mesurer $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$ à l'intérieur du diélectrique consiste à ménager une *cavité* dans le diélectri-

que et y introduire la charge d'épreuve. Le champ que l'on mesurerait par ce procédé ne coïnciderait, en général, ni avec le vecteur $\boldsymbol{E}$ ni avec le vecteur $\boldsymbol{D}$, le résultat des mesures dépendant de la *forme de la cavité*. Ce n'est que pour des formes bien définies de la cavité que les mesures pourront donner directement les vecteurs $\boldsymbol{E}$ ou $\boldsymbol{D}$. Deux cas sont à considérer.

Premier cas. La cavité se présente sous forme d'un canal cylindrique étroit et long, parallèle au champ $\boldsymbol{E}$ (fig. 47). La quantité de matière que l'on doit extraire pour ménager ce canal est infiniment petite, de sorte que son extraction ne modifie qu'infiniment

Fig. 47

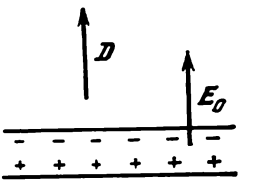


Fig. 48

peu le champ dans le diélectrique environnant. Ce n'est qu'aux deux extrémités du canal qu'apparaissent des charges de polarisation dont l'influence sur le champ régnant à grande distance de ces charges est négligeable. Par raison de symétrie le champ $\boldsymbol{E}_0$ dans le canal est parallèle au champ extérieur $\boldsymbol{E}$. En appliquant la condition aux limites (14.5) on trouve $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0$. Ainsi la mesure de $\boldsymbol{E}$ se ramène à mesurer $\boldsymbol{E}_0$.

Deuxième cas. La cavité se présente sous la forme d'un cylindre infiniment court dont les bases sont normales au vecteur $\boldsymbol{D}$ (fig. 48). Comme dans le cas précédent, la quantité de substance extraite de cette cavité infiniment petite n'affecte qu'infiniment peu le champ dans le diélectrique environnant. Sur les frontières de cette cavité apparaissent des charges de polarisation de signes opposés. Les champs que créent ces charges à l'extérieur de la cavité se compensent mutuellement presque exactement, tandis qu'ils se renforcent mutuellement à l'intérieur de la cavité, de sorte que le champ $\boldsymbol{E}_0$ qui y règne est notablement modifié. Par raison de symétrie le champ $\boldsymbol{E}_0$ est normal aux bases de la cavité. Dans la cavité l'intensité et l'induction de champ se confondent ($\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{D}_0$). On déduit de (14.4) que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}_0$. La mesure de $\boldsymbol{D}$ se trouve ainsi ramenée à la mesure de $\boldsymbol{E}_0$.

§ 15. Polarisabilité et permittivité diélectrique

1. Le théorème de Gauss (13.4) ou (13.5) est l'une des équations fondamentales de l'électrostatique. Une autre équation fondamentale de l'électrostatique sera établie au § 17 lorsqu'on aura introduit la notion de potentiel. Dans le vide où le champ est caractérisé par le seul vecteur $\boldsymbol{E}$, ces deux équations sont amplement suffisantes et constituent le *système complet* d'équations de l'électrostatique. Dans les substances au vecteur $\boldsymbol{E}$ vient s'ajouter encore un vecteur ($\boldsymbol{P}$ ou $\boldsymbol{D}$). Aussi doit-on adjoindre aux équations de l'électrostatique encore une équation vectorielle. La définition même du vecteur polarisation $\boldsymbol{P}$ fournit un procédé de principe pour établir cette équation supplémentaire. Connaissant la structure atomique d'une substance, on pourrait en principe calculer les déplacements des électrons et des noyaux atomiques résultant de l'action d'un champ électrique extérieur sur cette substance. On pourrait alors calculer le vecteur $\boldsymbol{P}$ et obtenir ainsi l'équation qui nous manque. Il tombe sous le sens qu'en fonction des conditions concrètes, ce procédé devrait fournir des relations aussi complexes que variées. Il n'existe aucune relation universelle entre les vecteurs $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{E}$ pouvant s'appliquer à toutes les substances. Cette voie n'est donc pas praticable et nous devons recourir à l'expérience pour trouver l'équation qui nous intéresse.

2. L'expérience montre que pour toute une classe de diélectriques et pour de nombreux phénomènes, la relation entre les vecteurs $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{E}$ est *linéaire* et *homogène*. Cela tient à ce que les intensités des champs électriques macroscopiques sont généralement faibles en comparaison des champs microscopiques régnant au sein des atomes et des molécules (cf. § 12, pt. 4). Si le milieu est isotrope, les vecteurs $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{E}$ sont colinéaires et on peut donc écrire

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}, \tag{15.1}$$

où α est un facteur sans dimension appelé *polarisabilité du diélectrique*. Sa valeur dépend de la densité et de la température du diélectrique. La relation entre $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$ s'écrit

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{15.2}$$

où la quantité sans dimension

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha \tag{15.3}$$

est la *permittivité diélectrique du diélectrique*. C'est cette grandeur qui caractérise les propriétés individuelles d'un diélectrique. Pour le vide $\alpha = 0$, $\varepsilon = 1$.

3. Dans les cristaux les vecteurs $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{E}$ ont des directions différentes, aussi à la place de (15.1) doit-on utiliser une relation linéaire et homogène plus gé-

nérale :

$$P_x = \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z,$$
$$P_y = \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z,$$
$$P_z = \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z,$$

ou de façon plus compacte

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij}E_j \quad (i, j = x, y, z), \tag{15.4}$$

où α_{ij} sont des facteurs sans dimension dont les valeurs dépendent du choix des axes de coordonnées. L'ensemble de ces neuf facteurs est appelé *tenseur de polarisabilité d'un diélectrique donné*. De même

$$D_i = \sum_j \varepsilon_{ij}E_j \quad (i, j = x, y, z), \tag{15.5}$$

où ε_{ij} sont de nouvelles constantes sans dimension dont l'ensemble constitue le *tenseur de permittivité diélectrique de la substance cristalline*. Les ε_{ij} sont liés aux α_{ij} par les relations

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 4\pi\alpha_{ij}, \tag{15.6}$$

où δ_{ij} est le tenseur unitaire défini par les conditions : $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. A l'aide de la loi de la conservation de l'énergie on démontre que les tenseurs α_{ij} et ε_{ij} sont symétriques, i.e.

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \tag{15.7}$$

4. Toutes les relations approchées données ci-dessus, aussi importantes soient-elles, ne font pas partie des relations fondamentales de l'électrostatique et de l'électrodynamique. Leur domaine de validité est limité car il existe des diélectriques pour lesquels ces relations ne sont pas vérifiées. Nous avons déjà mentionné que les cristaux ioniques pouvaient être polarisés même en l'absence de tout champ électrique extérieur. Un autre exemple de corps jouissant de la même propriété sont les *électrets*. Ce sont des diélectriques qui se comportent à l'instar des aimants permanents. Les électrets conservent pendant longtemps leur polarisation et sont donc capables de créer un champ électrique dans l'espace environnant. On peut fabriquer un électret en soumettant à un intense champ électrique un diélectrique à l'état fondu constitué de molécules polaires. Ce peut être, par exemple, un mélange de cire et de résine que l'on soumet à l'action d'un champ électrique de l'ordre de $\sim 10^6$ V/m. Après solidification du diélectrique on supprime le champ appliqué. Le diélectrique solidifié conserve sa polarisation pendant plusieurs heures et même pendant plusieurs jours. En fin de compte la polarisation disparaît par suite de lents processus de relaxation se produisant dans le diélectrique. On connaît des électrets qui peuvent durer pendant plusieurs années. On peut décrire de façon approchée le comportement des électrets et des diélectriques analogues dans un champ électrique par une relation de la forme

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0 + \alpha\boldsymbol{E}, \tag{15.8}$$

où les quantités P_0 et α sont indépendantes de l'intensité E du champ électrique.

5. Nous allons décrire maintenant une expérience de démonstration utilisant une bouteille de Leyde. Il est recommandé d'utiliser une bouteille de Leyde dont l'armature extérieure est constituée d'un tube métallique de grande longueur. On y introduit un tube diélectrique en quartz et dans celui-ci l'armature intérieure constituée d'une tige métallique munie d'un manche isolant. Après avoir mis à la terre l'armature extérieure, on charge la bouteille à l'aide d'une machine électrostatique, ensuite on débranche la machine électrostatique et on démonte la bouteille. On extrait d'abord l'armature intérieure en tirant le manche isolant, puis on retire le tube de quartz et on met en contact les deux armatures métalliques. Celles-ci se trouvent ainsi débarrassées de toute charge électrique. Si on reconstitue la bouteille on constate qu'elle est chargée. On peut procéder à plusieurs montages et démontages successifs, mais à chaque fois on constatera que la bouteille est chargée. Ce résultat démontre que le tube de quartz reste à l'état polarisé même lorsqu'il n'est pas entouré par les armatures chargées. Le quartz polarisé crée dans l'espace environnant un champ électrique qui induit des charges électriques sur les armatures de la bouteille reconstituée.

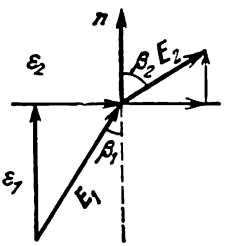


Fig. 49

On observe des phénomènes beaucoup plus compliqués dans les substances ferroélectriques (cf. § 39), où la relation entre les vecteurs P et E est non linéaire et dépend de variations précédentes du champ électrique.

Le cas le plus simple où les formules (15.1) et (15.2) sont vérifiées est assez fréquent et c'est le plus important pour la pratique. Dans ce qui suit, sauf mention spéciale, c'est ce cas que nous examinerons.

6. Il nous reste à préciser le comportement des lignes de force à leur passage à travers la surface de séparation des deux diélectriques (fig. 49). Si cette surface ne porte pas de charges libres, les conditions aux limites

$$E_{1t} = E_{2t}, \qquad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

doivent être vérifiées. En introduisant les angles β_1 et β_2 entre les lignes de force et la normale à la surface de séparation, on peut écrire ces conditions sous la forme suivante:

$$E_1 \sin \beta_1 = E_2 \sin \beta_2,$$
$$\varepsilon_1 E_1 \cos \beta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos \beta_2,$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{15.9}$$

Ce résultat montre que les lignes de force subissent une *réfraction* à la surface de séparation de deux diélectriques. Lorsqu'on passe d'un diélectrique de plus faible ε à un autre dont ε est plus grand, l'angle β devient plus grand, i.e. la ligne de force s'écarte davantage de la normale pour se rapprocher de la surface de séparation. C'est ce qui donne lieu à une concentration des lignes de force dans le diélectrique de plus grande permittivité. Cette proposition est illustrée par la figure 50 représentant une plaque diélectrique placée dans un champ électrique homogène.

Lorsqu'on introduit un diélectrique creux de grande permittivité dans un champ électrique, du fait de la réfraction des lignes de force

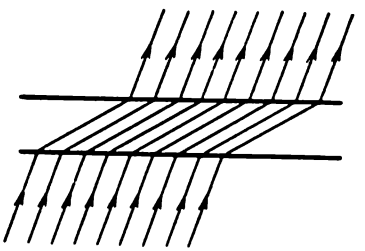


Fig. 50

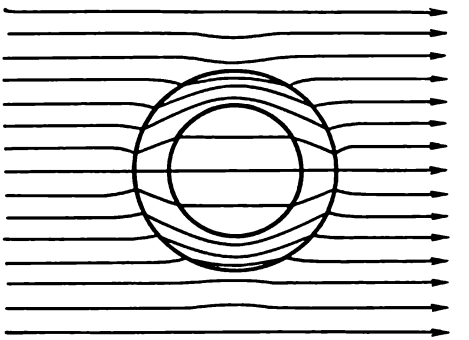


Fig. 51

celles-ci tendent à se concentrer dans la masse du diélectrique (fig. 51). Dans les cavités la densité des lignes de force est plus petite que dans le champ extérieur. Une cavité dans un diélectrique se comporte donc comme un *écran* et de ce point de vue rappelle le comportement des cavités dans les métaux. Mais à la différence de ces derniers, l'effet d'écran des diélectriques est moins efficace. L'effet d'écran est d'autant plus important que la permittivité du diélectrique est grande.

§ 16. Champ électrique d'une sphère uniformément polarisée

1. Avant polarisation la sphère contenait un mélange homogène d'électricité positive et négative avec des densités spatiales $+\rho$ et $-\rho$. Déplaçons toutes les charges positives d'une même distance δl par rapport aux charges négatives. (Sur la figure 52 on a fortement agrandi le déplacement δl. Dans les cas réels d'importance pratique, il est petit même à l'échelle atomique.) La sphère subit ainsi une polarisation homogène avec un vecteur $\boldsymbol{P} = \rho\delta l$. La figure laisse

apparaître que le champ électrique E d'une sphère uniformément polarisée est une somme vectorielle des champs créés par deux sphères portant des charges égales et opposées, légèrement décalées l'une par rapport à l'autre. Nous allons considérer deux cas.

Cas 1. *Calcul du champ électrique à l'intérieur d'une sphère uniformément polarisée.* Soient O et O' les centres des sphères positivement et négativement chargées et r et r' les rayons vecteurs menés par ces centres. D'après la formule (6.5) les champs créés par ces sphères sont respectivement égaux à :

$$E_1 = -\frac{4\pi}{3}\rho r, \quad E_2 = \frac{4\pi}{3}\rho r'.$$

La somme géométrique de ces champs est

$$E^{(i)} = \frac{4\pi}{3}\rho(r' - r) = -\frac{4\pi}{3}\rho\delta l$$

ou

$$E^{(i)} = -\frac{4\pi}{3}P. \qquad (16.1)$$

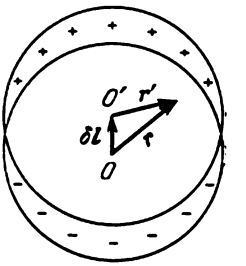


Fig. 52

Cas 2. *Calcul du champ extérieur créé par une sphère uniformément polarisée.* Notons q la charge de la sphère positive. Chacune des sphères excite dans l'espace environnant un champ égal à celui qui aurait été créé si toute la charge était concentrée au centre de la sphère. Par conséquent, le champ que crée une sphère uniformément polarisée dans l'espace extérieur coïncide avec le champ d'un dipôle ponctuel de moment dipolaire $p = q\delta l = VP$, V étant le volume de la sphère. Ainsi, à l'extérieur de la sphère

$$E^{(e)} = V\left[\frac{3(Pr)}{r^5}r - \frac{P}{r^3}\right].$$

Pour trouver $E^{(e)}$ sur la surface de la sphère on posera $V = \frac{4\pi}{3}r^3$. On obtient ainsi

$$E^{(e)} = 4\pi(Pn)n - \frac{4\pi}{3}P, \qquad (16.2)$$

où n est le vecteur unitaire de la normale extérieure à la surface de la sphère.

2. On réalise la polarisation uniforme d'une sphère en plaçant celle-ci dans un champ homogène extérieur E_0. Pour démontrer que la polarisation sera uniforme, il suffit de s'assurer que seront vérifiées les conditions à l'infini et les conditions aux limites relatives à la surface de la sphère. Ces dernières imposent que de part et d'autre de cette surface soient égales les composantes tangentielles des vecteurs E et les composantes normales des vecteurs D. Le champ total E se compose du champ extérieur E_0 et du champ créé par la sphère polarisée. A l'infini le champ total doit se réduire au champ E_0. Cette condition est évidemment satisfaite puisque le champ de la sphère polarisée variant en raison inverse du cube de la distance devient nul à l'infini. A l'intérieur de la sphère $E =$

$= E_0 + E^{(i)}$ et à l'extérieur $E = E_0 + E^{(e)}$. Selon (16.1) et (16.2) les composantes tangentielles de ces deux champs sont égales sur la surface de la sphère. En dehors de la sphère l'induction est égale à $E_0 + E^{(e)}$ et à l'intérieur de la sphère elle vaut $E_0 + E^{(i)} + 4\pi P$. Compte tenu de (16.1) et (16.2) on en déduit que sur la surface de la sphère

$$D^{(e)} = E_0 + 4\pi (Pn)\, n - \frac{4\pi}{3} P,$$

$$D^{(i)} = E_0 - \frac{4\pi}{3} P + 4\pi P.$$

Ces relations montrent que les composantes normales de ces vecteurs sont égales. La proposition énoncée plus haut est démontrée puisque les conditions aux limites sont vérifiées.

D'après (16.1) le champ total régnant à l'intérieur de la sphère est

$$E = E_0 - \frac{4\pi}{3} P. \tag{16.3}$$

Eliminons le vecteur P à l'aide de la relation $P = \alpha E$. Nous obtenons ainsi une relation entre les champs intérieur et extérieur:

$$\left(1 + \frac{4\pi}{3}\alpha\right) E = E_0 \tag{16.4}$$

ou

$$E = \frac{3}{\varepsilon + 2} E_0. \tag{16.5}$$

Le vecteur polarisation à l'intérieur de la sphère est

$$P = \alpha E = \frac{3\alpha}{\varepsilon + 2} E_0 = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0.$$

Ainsi une sphère de rayon a soumise à l'action d'un champ extérieur homogène E_0 acquiert un moment dipolaire $p = VP$ ou

$$p = a^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0. \tag{16.6}$$

3. Calculons maintenant l'intensité du champ E' créé dans une cavité sphérique pratiquée dans la masse d'un diélectrique uniformément polarisé. Nous supposerons que la polarisation P du diélectrique en dehors de la cavité est homogène ; par suite, le champ électrique E sera homogène dans le diélectrique car $P = \alpha E$. Si on comblait la cavité avec le même diélectrique uniformément polarisé, au champ E' régnant dans la cavité viendrait se superposer le champ d'une sphère uniformément polarisée $-\frac{4\pi}{3} P$. La somme de ces champs doit redonner le champ E, i.e. $E' - \frac{4\pi}{3} P = E$. On en tire

$$E' = E + \frac{4\pi}{3} P. \tag{16.7}$$

Après élimination du vecteur P on obtient

$$E' = \frac{\varepsilon + 2}{3} E. \tag{16.8}$$

PROBLÈMES

1. Trouver une expression approchée de la force s'exerçant dans un champ électrique non uniforme sur de petites billes de rayon a, l'une diélectrique, l'autre métallique.

Solution. Si le champ extérieur $\boldsymbol{E}_0$ était uniforme, la bille diélectrique aurait acquis un moment dipolaire donné par (16.6). Ce même résultat reste approximativement valable dans un champ non uniforme. En utilisant encore la formule (4.8) nous trouvons l'expression de la force cherchée

$$F = a^3 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_0^2}{2} \right),$$

l'axe X étant dirigé suivant le vecteur $\boldsymbol{E}_0$. En posant $\varepsilon = \infty$ nous trouvons la force agissant sur la bille métallique

$$F = \frac{a^3}{2} \frac{\partial E_0^2}{\partial x}.$$

La force $\boldsymbol{F}$ est orientée dans le sens de la croissance du champ $\boldsymbol{E}_0$. Ce sont les forces de ce type qui sont responsables du phénomène qui marqua les débuts de l'étude de l'électricité, i.e. l'attraction des corps légers par un corps électrisé.

2. Quelle est la loi de variation avec la distance r de la force F d'interaction d'une petite bille chargée avec une petite bille non chargée?

Réponse. $F \sim 1/r^5$.

3. Dans une sphère portant une charge uniforme de densité spatiale ρ on a creusé une cavité sphérique dont le centre O' est décalé d'une distance R par rapport au centre O de la sphère. Calculer le champ électrique dans la cavité.

Réponse. $\boldsymbol{E} = {}^4/_3\pi\rho\boldsymbol{R}$, avec $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{OO'}$. Ce champ est homogène.

Indication. Combler en pensée la cavité avec des charges électriques de signes contraires de densités $+\rho$ et $-\rho$. On pourra alors considérer le champ dans la cavité comme résultant de la superposition des champs de deux sphères, l'une chargée positivement et l'autre négativement. Revoir un problème analogue dans le t. I (§ 55, problème 7).

4. On immerge dans un liquide diélectrique homogène et illimité, de permittivité ε une sphère homogène ayant la même permittivité et uniformément chargée avec une densité spatiale ρ. Cette sphère comporte une cavité sphérique dans laquelle on place une sphère de rayon a fabriquée avec le même matériau et portant une charge de même signe et de même densité spatiale ρ. L'espacement entre la surface interne de la cavité et le surface de la petite sphère est négligeable. Connaissant la distance entre les centres des deux sphères, calculer la force $\boldsymbol{F}$ s'exerçant sur la petite sphère.

Solution. Le champ que crée la grande sphère dans sa cavité est homogène et vaut $4\pi\rho\boldsymbol{R}/(3\varepsilon)$, où $\boldsymbol{R} = \overrightarrow{OC}$ est le vecteur mené du centre O de la grande sphère vers le centre C de la petite sphère. En multipliant ce champ par la charge de la petite sphère, on trouve

$$\boldsymbol{F} = (4\pi\rho)^2 a^3 \boldsymbol{R}/(9\varepsilon).$$

§ 17. Caractère potentiel du champ électrostatique

1. Une charge ponctuelle fixe Q crée dans le vide le champ électrique $\boldsymbol{E} = \frac{Q}{r^3}\boldsymbol{r}$. Considérons une seconde charge ponctuelle q se déplaçant dans ce champ de la position initiale *1* dans la position finale *2*

le long d'une courbe arbitraire *12* (fig. 53). Le travail produit lors de ce déplacement par les forces du champ s'exprime par l'intégrale curviligne

$$A_{12} = \int_{12} q\,(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{r}) = qQ \int_{12} \frac{\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Or $\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{r} = r\,dr$, ce qui est facile à démontrer par dérivation de l'identité $r^2 = r^2$. Aussi l'intégrale curviligne se ramène-t-elle à l'intégrale définie

$$A_{12} = qQ \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = qQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (17.1)$$

Ainsi, quels que soient les points *1* et *2*, le travail A_{12} ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions des points initial et final. Les champs de forces satisfaisant à cette condition sont

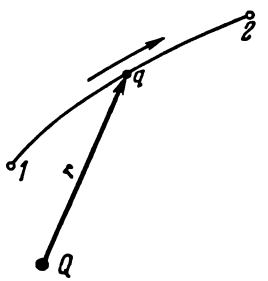


Fig. 53

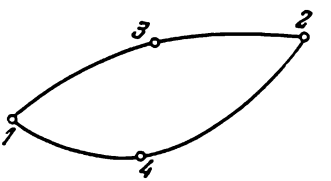


Fig. 54

dits *à potentiel* ou *conservatifs* (cf. t. I, § 24). Il s'ensuit que *le champ électrostatique d'une charge ponctuelle dérive d'un potentiel.*

Ce résultat s'applique aux champs électriques créés par n'importe quel système de charges ponctuelles fixes. C'est une conséquence directe du principe de superposition des champs électriques et du théorème de mécanique bien connu selon lequel le travail de la résultante de plusieurs forces est égal à la somme des travaux de ces forces.

Dans le cas général on peut subdiviser en pensée tout système de charges en des parties suffisamment petites dont chacune peut être assimilée à une charge ponctuelle. Parmi ces charges actives doivent figurer les charges induites sur les conducteurs et les diélectriques. On en conclut que *tout champ électrostatique régnant dans le vide ou*

dans une substance dérive d'un potentiel. Cette proposition serait naturellement applicable aux champs microscopiques E_{micro} si les charges qui les produisent étaient fixes. Le champ macroscopique E_{macro} aurait été lui aussi un champ à potentiel puisqu'il résulte du moyennage du champ à potentiel E_{micro}. Mais comme les électrons et les noyaux atomiques sont toujours en mouvement, leurs champs électriques ne dérivent pas d'un potentiel. C'est pour cela que l'on n'arrive pas, dans le cas général, à déduire les équations de l'électrostatique macroscopique des équations établies pour les champs microscopiques. On devrait utiliser pour cela les équations des champs microscopiques créés par des charges mobiles, par exemple les équations de la théorie électronique de Lorentz. Nous ne chercherons cependant pas à fonder l'électrostatique sur les équations de cette théorie. D'ailleurs les équations macroscopiques de Maxwell, qui sont postulées, permettent de démontrer (ce que l'on fera par la suite) que le champ électrostatique macroscopique est un champ à potentiel.

2. Supposons que dans un champ électrostatique une charge est transportée du point *1* au point *2* d'abord suivant le chemin *132* puis suivant le chemin *142* (fig. 54). Le travail produit par les forces du champ est le même dans les deux cas: $A_{132} = A_{142}$. Si la charge est transportée suivant le chemin fermé *13241*, sur le trajet *241* le travail change de signe: $A_{241} = -A_{142}$ et par suite $A_{132} + A_{241} = A_{13241} = 0$. Cela conduit à affirmer que lorsqu'on déplace une charge dans un champ électrostatique suivant un trajet fermé le travail produit est nul. Si on déplace une charge unitaire le travail s'exprime par l'intégrale curviligne $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s}$. Cette intégrale est appelée *circulation du vecteur* $\boldsymbol{E}$ le long du contour fermé considéré. Ainsi pour tout contour fermé

$$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = 0. \tag{17.2}$$

Ce résultat permet de donner une autre définition du champ à potentiel, équivalente d'ailleurs à la définition donnée plus haut. *Le champ du vecteur* $\boldsymbol{E}$ *est dit à potentiel si la circulation de ce vecteur le long de tout contour fermé est nulle.*

L'équation (17.2) est la deuxième équation fondamentale de l'électrostatique (cf. § 15).

3. L'équation (17.2) implique que *les lignes de force d'un champ électrostatique ne peuvent être fermées.* Pour le démontrer raisonnons par l'absurde, i.e. supposons que la ligne de force soit fermée. Prenons-la pour contour d'intégration C. En parcourant ce contour dans le sens positif de la ligne de force, on voit que la quantité figurant sous le signe d'intégration $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s}$ et par suite l'intégrale elle-même

seront essentiellement positives. Or ce résultat est en contradiction avec l'équation (17.2), ce qui démontre notre proposition.

Il est également exclu que les lignes de force d'un champ à potentiel soient quasi fermées. On entend par là les lignes de force jouissant de la propriété suivante. Une ligne de force issue d'un point quelconque A décrit des sinuosités et revient dans le voisinage aussi petit que l'on veut de ce point, sans jamais passer par le point A. Raisonnons encore par l'absurde. Soient A et B des points infiniment proches

Fig. 55

l'un de l'autre et appartenant à la ligne de force. Fermons la ligne de force par un segment infinitésimal reliant les points A et B. Comme l'intégrale $\int E\,ds$ le long de ce segment est infiniment petite, la circulation $\oint E\,ds$ le long du contour fermé ainsi réalisé serait différente de zéro. Or cela est impossible.

4. La mise en œuvre de l'équation (17.2) fournit une démonstration rigoureuse de la condition aux limites (14.5) imposée au vecteur E. Soit $ABCD$ un contour rectangulaire infiniment petit dont les côtés AD et BC se situent de part et d'autre de la frontière de séparation de deux milieux (fig. 55). Appliquons la formule (17.2) à ce contour. Posons que les côtés AB et CD sont infiniment courts par rapport aux côtés AD et BC afin de pouvoir négliger leur contribution à la circulation du vecteur. On écrira donc

$$\oint_{ABCD} E\,ds = (E_{2t} - E_{1t})\,l,$$

où l est la longueur du côté BC ou AD. Comme la circulation est nulle on a

$$E_{1t} = E_{2t}. \tag{17.3}$$

§ 18. Le potentiel électrique

1. Lorsqu'il s'agit de champs à potentiel on peut introduire la notion de *potentiel* ou plus exactement celle de *différence de potentiel. On appelle différence de potentiel* $\varphi_1 - \varphi_2$ *entre les points* 1 *et* 2 *le travail produit par les forces du champ lors du déplacement d'une charge positive unité suivant un chemin arbitraire reliant les points* 1 *et* 2. Cette définition n'est valable que parce que le travail *ne dépend pas*

du chemin suivi, n'étant fonction que des positions de ses points initial et final. Si on attribue au potentiel d'un point arbitraire O du champ une valeur quelconque φ_0, les potentiels de tous les autres points de ce champ seront définis de façon univoque. Si on modifie la valeur φ_0, les potentiels du point O et de tous les autres points seront modifiés d'une même constante additive. Il s'ensuit que *le potentiel n'est connu qu'à une constante additive près*. La valeur de cette constante ne joue aucun rôle puisque les phénomènes physiques ne dépendent que de l'intensité du champ électrique et que cette dernière est liée aux *différences de potentiel* en différents points de l'espace et non pas aux valeurs absolues du potentiel en ces points. L'intensité du champ électrique ne dépend donc absolument pas de la valeur de la constante additive. En physique théorique on prend pour potentiel de zéro le potentiel en un point infiniment éloigné de l'espace. En pratique on adopte pour potentiel de zéro le potentiel de la Terre.

Le travail fourni par les forces du champ lors du déplacement d'une charge q suivant un chemin quelconque reliant le point initial 1 et le point final 2 a pour expression

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{18.1}$$

Dans les systèmes gaussien et CGSE l'unité de potentiel est définie comme la différence de potentiel entre deux points tels que le travail fourni par le champ électrique lors du déplacement de l'unité d'électricité électrostatique entre ces points soit égal à 1 erg. Cette unité n'a pas de dénomination propre. L'unité pratique de potentiel est le *volt*. Le volt représente la différence de potentiel qui doit exister entre deux points du champ pour que le travail de déplacement d'une charge de 1 coulomb d'un point à l'autre soit égal à 1 joule. En approximation

$$1\,V = \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{C}} = \frac{10^7\,\mathrm{erg}}{3\cdot 10^9\ \text{un. ch. C.G.S.E.}} = \frac{1}{300}\ \text{un. pot. C.G.S.E.}$$

2. Etablissons une relation qui existe entre le potentiel et l'intensité du champ électrique. Notons 1 et 2 deux points infiniment rapprochés se trouvant sur l'axe X; de sorte que $x_2 - x_1 = dx$. Le travail de déplacement de l'unité de charge du point 1 au point 2 est $E_x\,dx$. Ce même travail est égal à $\varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi$. En égalant les deux expressions on trouve $d\varphi = -E_x\,dx$. Le même raisonnement vaut pour les axes Y et Z, de sorte que l'on obtient ainsi trois relations

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{18.2}$$

que l'on peut réunir en une seule formule vectorielle:

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right). \tag{18.3}$$

Puisque E est un vecteur, l'expression entre parenthèses représente également un vecteur que l'on appelle *gradient de scalaire* φ et que l'on dénote grad φ ou $\nabla\varphi$. Ce vecteur peut être considéré comme le produit du vecteur symbolique (ou opérateur) (4.6) par le scalaire φ. Ainsi, par définition

$$\operatorname{grad}\varphi \equiv \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{18.4}$$

On peut maintenant écrire la formule (18.3) sous la forme concise

$$E = -\operatorname{grad}\varphi = -\nabla\varphi. \tag{18.5}$$

Tout champ vectoriel $E(x, y, z)$ peut être caractérisé par trois fonctions scalaires — les projections $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$, $E_z(x, y, z)$. Le caractère potentiel du champ lui impose une limitation tellement stricte qu'on peut le caractériser par une seule fonction scalaire — le potentiel $\varphi(x, y, z)$. Cette fonction une fois connue, la formule (18.3) ou (18.5) permet de calculer l'intensité du champ. Ces formules montrent de façon évidente que la constante additive ne joue aucun rôle dans l'expression du potentiel puisqu'elle s'élimine par dérivation. Ces mêmes formules montrent aussi que l'intensité du champ a pour dimension le quotient du potentiel par la longueur. En pratique on exprime souvent l'intensité du champ électrique en volts par centimètre ou en volts par mètre. De façon approchée

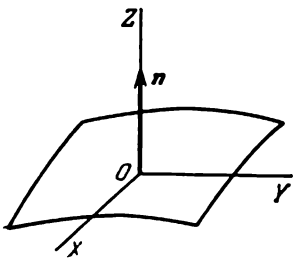


Fig. 56

$$1\ \mathrm{V/cm} \approx \frac{1}{300}\ \text{un. C.G.S.E.}, \quad 1\ \mathrm{V/m} \approx \frac{1}{30\,000}\ \text{un. C.G.S.E.}$$

3. Pour mettre en évidence la signification géométrique du gradient on introduit la notion de *surfaces équipotentielles* qui sont les surfaces sur lesquelles le potentiel a une valeur constante. Le potentiel ne varie que lorsqu'on passe d'une surface équipotentielle à une autre. Prenons un point arbitraire O sur une surface équipotentielle et introduisons un système local de coordonnées dont l'origine est en O (fig. 56). Orientons l'axe Z le long de la normale $\boldsymbol{n}$ à la surface équipotentielle dans le sens des potentiels φ croissants. Adoptons ce sens pour sens positif de la normale $\boldsymbol{n}$. Il est clair que le plan XY est alors confondu avec le plan tangent à la surface équipotentielle et au point O on a $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$. D'autre part $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}$, $\partial\varphi/\partial z \equiv \partial\varphi/\partial n$. La formule (18.4) peut s'écrire

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\boldsymbol{n}. \tag{18.6}$$

Comme la fonction φ croît le plus rapidement suivant la normale $\boldsymbol{n}$, on peut donner la définition suivante du gradient. Le *gradient* d'une fonction $\varphi(x, y, z)$ est un vecteur orienté dans le sens de la croissance maximale de cette fonction et ayant pour longueur la dérivée de la fonction φ suivant cette même direction. Cette définition présente l'avantage d'être *invariante*, donc indépendante du choix du système de coordonnées.

Menons un vecteur unitaire $\boldsymbol{s}$ suivant une direction quelconque. La projection du vecteur $\boldsymbol{A} \equiv \operatorname{grad} \varphi$ sur cette direction est $A_s = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{s} \operatorname{grad} \varphi)$. Or si on fait coïncider un axe de coordonnées avec la direction $\boldsymbol{s}$, la mise en œuvre de l'une des formules (18.2) montre que $A_s = \partial\varphi/\partial s$. On obtient ainsi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = (\boldsymbol{s} \operatorname{grad} \varphi). \tag{18.7}$$

La dérivée de la fonction φ suivant une direction quelconque est égale à la projection du vecteur gradient de cette fonction sur cette même direction. Il est évident que cette dérivée est maximale lorsque le vecteur $\boldsymbol{s}$ est dirigé suivant grad φ, i.e. suivant la normale à la surface équipotentielle.

4. Le sens du vecteur $\boldsymbol{E}$ est opposé à celui du vecteur gradient de potentiel φ. Les lignes de force électriques sont les lignes suivant lesquelles le potentiel φ varie *le plus rapidement*. Comme elles sont *normales* aux surfaces équipotentielles, la représentation graphique de ces surfaces permet d'illustrer la configuration du champ. Le plus souvent on les représente de façon que la différence de potentiel $\Delta\varphi$ entre toutes les surfaces soit constante. Plus $\Delta\varphi$ est petit, plus l'image de la répartition spatiale du potentiel et du champ est détaillée. On peut également tracer sur ce même graphique les lignes de force orthogonales aux surfaces équipotentielles. Lorsque $\Delta\varphi$ est constant, l'intensité du champ est d'autant plus grande que les surfaces équipotentielles sont plus rapprochées ; là où elles s'écartent le plus les unes des autres, l'intensité de champ $\boldsymbol{E}$ est minimale. La surface extérieure d'un conducteur est l'une des surfaces équipotentielles, par suite les lignes de forces y sont orthogonales. A l'intérieur du conducteur $\boldsymbol{E} = 0$ et par suite le potentiel φ a même valeur en tous ses points ; la surface équipotentielle dégénère en volume équipotentiel.

PROBLÈMES

1. Démontrer la formule

$$\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A} \operatorname{grad} \varphi) + \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{A}. \tag{18.8}$$

2. Démontrer la formule

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}, \tag{18.9}$$

où $\boldsymbol{a}$ est un vecteur constant.

3. On a disposé dans le vide trois sphères concentriques à enveloppes métalliques infiniment minces de rayon $R_1 < R_2 < R_3$; la première et la troisième sphères ont été mises à la terre et à la seconde on a communiqué la charge électrique Q. Calculer l'intensité du champ électrique dans tout l'espace.

Réponse. Le champ électrique est radial et son intensité est

$$E = \begin{cases} 0, \text{ si } r < R_1 \text{ ou } R_3 < r < \infty, \\ \dfrac{R_1(R_2 - R_3)}{R_2(R_3 - R_1)} \dfrac{Q}{r^2}, \text{ si } R_1 < r < R_2, \\ \dfrac{R_3(R_2 - R_1)}{R_2(R_3 - R_1)} \dfrac{Q}{r^2}, \text{ si } R_2 < r < R_2, \end{cases}$$

où r est la distance jusqu'au centre des sphères.

4. Trois plaques métalliques A, B et C sont disposées parallèlement les unes aux autres (fig. 57); les plaques A et B sont fixes et reliées à un élément galvanique qui maintient une différence de potentiel constante V entre ces plaques. La plaque médiane C est d'abord en contact avec la plaque A, puis à

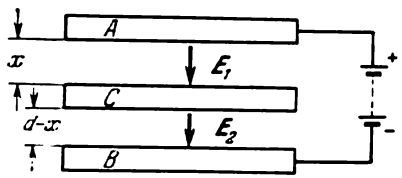


Fig. 57

l'aide d'un manche isolant on la déplace vers la plaque B. En négligeant les effets de bord, calculer les intensités des champs E_1 et E_2 dans l'espace compris entre les plaques en fonction de la distance variable x.

Réponse. $E_1 = Vx/d^2$, $E_2 = V(x + d)/d^2$.

5. On dispose une plaque d'électret polarisé d'épaisseur h entre les armatures d'un condensateur à air plan qui sont interconnectées. Le vecteur de polarisation $\boldsymbol{P}$ de la plaque est orthogonal à ses faces latérales. En négligeant la dépendance de la polarisation $\boldsymbol{P}$ de l'électret avec l'intensité du champ électrique, calculer l'intensité et l'induction du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la plaque, sachant que la distance AB entre les armatures est d.

Réponse. Dans la lame d'air $E = D = 4\pi hP/d$. A l'intérieur de la plaque $E = -4\pi(d - h)P/d$, $D = 4\pi hP/d$.

§ 19. Calcul du potentiel connaissant l'intensité du champ électrique

Si on connaît le potentiel $\varphi(x, y, z)$, sa dérivation par rapport aux coordonnées donne l'intensité du champ électrique. Le problème inverse du calcul du potentiel implique une *intégration*. On utilise alors les formules (18.2) ou des formules analogues. Nous donnons ci-dessous quelques exemples simples de calcul du potentiel.

1. *Calcul du potentiel du champ électrique d'une charge ponctuelle q dans un diélectrique homogène.* L'induction du champ est donnée

par la formule (13.10); on en tire

$$E = E_r = \frac{q}{\varepsilon r^2} = -\frac{d\varphi}{dr},$$

et après intégration

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r} + \text{const}.$$

Afin que $\varphi = 0$ pour $r = \infty$ il faut que la constante d'intégration soit égale à zéro; par suite

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}. \tag{19.1}$$

2. *Calcul du potentiel du champ électrique d'un système de charges ponctuelles dans un diélectrique homogène.* En appliquant le principe de superposition on tire de (19.1)

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \sum \frac{q_i}{r_i}, \tag{19.2}$$

où r_i est la distance entre la charge i et le point d'observation. La sommation est étendue à toutes les charges.

3. *Calcul du potentiel du champ créé par une distribution continue de charges électriques.* En considérant les charges contenues dans les volumes élémentaires et celles réparties sur les éléments de surface comme des charges ponctuelles et en appliquant la formule (19.2) on peut écrire pour le potentiel φ dans un diélectrique homogène

$$\varphi(r) = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\rho(r')\,dV'}{|r-r'|} + \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\sigma(r')\,dS'}{|r-r'|}, \tag{19.3}$$

où dV' et dS' désignent les volumes élémentaires et les éléments de surface chargés dont les centres se trouvent au point r'. L'intégration est étendue à toutes les charges spatiales et superficielles. Dans le cas d'un diélectrique non homogène, l'intégration doit concerner également les charges de polarisation. La prise en compte de ces charges implique l'influence du milieu, et il est donc inutile d'introduire la permittivité ε:

$$\varphi(r) = \int \frac{\rho(r') + \rho_{\text{pol}}(r')}{|r-r'|}\,dV' + \int \frac{\sigma(r') + \sigma_{\text{pol}}(r')}{|r-r'|}\,dS'. \tag{19.4}$$

La formule (19.3) est un cas particulier de cette formule. L'influence des charges de polarisation y est prise en considération par l'intermédiaire de ε.

4. *Calcul du potentiel du champ créé par un plan infini uniformément chargé dans un diélectrique homogène.*

Dans ce cas

$$\varphi = \begin{cases} -2\pi\sigma x/\varepsilon + C & \text{pour } x > 0, \\ +2\pi\sigma x/\varepsilon + C & \text{pour } x < 0. \end{cases} \tag{19.5}$$

On place l'origine des coordonnées sur le plan chargé, l'axe X est orthogonal à ce plan. La constante C est la même dans les deux expressions puisque le potentiel ne subit pas de discontinuité lorsqu'on traverse le plan chargé.

Aucune valeur de la constante C ne permet de rendre nul le potentiel à l'infini puisqu'on y trouve non seulement le champ mais encore des charges électriques. Lorsqu'il s'agit de plans de dimensions finies, les formules (19.5) ne sont valables que pour des valeurs de x petites par rapport aux dimensions du plan chargé. Lorsque celles-ci sont comparables à x, l'expression de φ devient fort compliquée. A très grande distance le plan se comporte comme une charge ponctuelle. Dans le cas où le plan chargé est de dimension finie, on arrive toujours à choisir pour la constante C une valeur qui rend nul le potentiel à l'infini, mais il faut connaître pour cela l'expression du potentiel non seulement à proximité mais à toute distance du plan.

PROBLÈMES

Dans ce qui suit on suppose que le diélectrique est homogène.

1. Calculer le potentiel du champ créé par un dipôle ponctuel.

Réponse.

$$\varphi=\frac{(pr)}{\varepsilon r^3}. \tag{19.6}$$

2. Par dérivation de (19.6) calculer l'intensité du champ électrique d'un dipôle ponctuel.

3. Calculer le potentiel du champ électrique d'une sphère de rayon a de charge spatiale uniforme.

Réponse. Le potentiel φ dans l'espace extérieur à la sphère est donné par (19.1). A l'intérieur de la sphère le potentiel est

$$\varphi=\frac{2\pi\rho}{3\varepsilon}(3a^2-r^2). \tag{19.7}$$

4. Calculer le potentiel du champ créé par une sphère de rayon a portant une charge superficielle uniforme.

Réponse. Le potentiel φ dans le milieu extérieur est donné par (19.1). A l'intérieur de la sphère le potentiel est

$$\varphi=\frac{q}{\varepsilon a}=\text{const}. \tag{19.8}$$

5. Calculer le potentiel du champ créé par une plaque infinie plane-parallèle d'épaisseur $2a$ uniformément chargée.

Réponse. Le potentiel à l'intérieur de la plaque est

$$\varphi=-\frac{2\pi\rho}{\varepsilon}(x^2+a^2)+C, \tag{19.9}$$

et dans le milieu extérieur il est donné par

$$\varphi=\begin{cases}-4\pi\rho ax/\varepsilon+C & \text{pour } x>a,\\ +4\pi\rho ax/\varepsilon+C & \text{pour } x<a.\end{cases} \tag{19.10}$$

L'origine des coordonnées est placée sur le plan médian de la plaque, l'axe X est orthogonal à ce plan.

6. Calculer le potentiel du champ créé par un fil rectiligne infiniment mince de longueur infinie, uniformément chargé avec une densité linéaire $\varkappa$.

Réponse.

$$\varphi = -\frac{2\varkappa}{\varepsilon} \ln r + C, \tag{19.11}$$

où r est la distance jusqu'au fil.

7. Calculer le potentiel du champ créé par un cylindre de rayon a et de longueur infinie uniformément chargé en volume.

Réponse.

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{\varepsilon} \rho (a^2 - r^2) + C & \text{pour} \quad r \leqslant a, \\ -\frac{2\pi a^2 \rho}{\varepsilon} \ln \frac{r}{a} + C & \text{pour} \quad r \geqslant a. \end{cases} \tag{19.12}$$

8. Calculer le potentiel du champ créé par un cylindre de rayon a, de longueur infinie uniformément chargé en surface.

Réponse.

$$\varphi = \begin{cases} C & \text{pour} \quad r \leqslant a, \\ -\frac{2\pi a \sigma}{\varepsilon} \ln \frac{r}{a} + C & \text{pour} \quad r \geqslant a. \end{cases} \tag{19.13}$$

9. Démontrer que les surfaces équipotentielles du champ créé par deux lignes parallèles de longueur infinie uniformément chargées d'électricité de signes opposés sont des cylindres à bases circulaires dont les axes sont parallèles et coplanaires aux lignes chargées.

Indication. L'équation de la surface équipotentielle est de la forme $r_1/r_2 = \text{const}$, r_1 et r_2 étant les distances aux deux lignes. En exprimant cette équation en fonction des coordonnées, on démontre facilement que les surfaces équipotentielles sont cylindriques.

§ 20. Mesure à l'électromètre des différences de potentiel. Sonde électrique

1. Un électroscope dont les feuilles ou l'aiguille sont enfermées dans une enveloppe métallique formant blindage peut servir d'*électromètre*, i.e. d'appareil de mesure des différences de potentiel entre deux conducteurs. On relie l'un des conducteurs à la boule de l'électromètre et l'autre au blindage (fig. 58). L'aiguille de l'électromètre sera au potentiel du corps A et le blindage au potentiel du corps B. Un champ électrique sera ainsi créé dont les lignes de force s'étendent de l'aiguille au blindage ou vice versa. L'angle de déviation de l'aiguille dépendra de l'intensité et de la configuration de ce champ. Mais comme le champ régnant à l'intérieur d'une cage métallique fermée ne dépend absolument pas des champs extérieurs, il sera univoquement défini par la différence de potentiel entre l'aiguille et le blindage. On en conclut que l'angle de déviation de l'aiguille de l'électromètre peut servir de mesure de la différence de potentiel entre les corps A et B. On peut étalonner et graduer l'électromètre

afin de lire directement la différence de potentiel en volts. Généralement le corps B est la Terre, ce qui signifie que le blindage est mis à la terre. L'électromètre indique alors le potentiel du corps A par rapport à la Terre.

2. En principe on peut relier à la terre aussi bien le blindage que la boule de l'électromètre. N'en dépend que le sens des lignes de force, leur configuration et l'intensité de champ à l'intérieur du blindage n'en dépendant pas. La déviation de l'aiguille sera la même dans les deux cas. Plaçons l'électromètre sur un support en diélectrique, relions le blindage à la terre et chargeons la boule en la touchant avec une tige électrisée. Nous verrons l'aiguille dévier. Relions

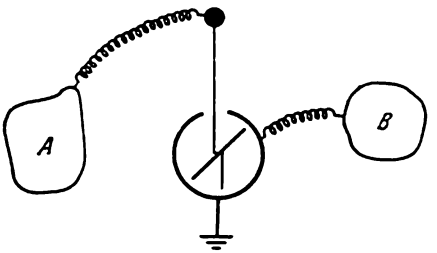


Fig. 58

maintenant la boule à la Terre, isolons le blindage et électrisons-le; l'aiguille accusera la même déviation. Or l'aiguille de l'électromètre, étant entourée d'une enveloppe métallique, est soustraite à l'action des champs extérieurs. Pourquoi observe-t-on une déviation de l'aiguille lorsqu'on électrise le blindage? La raison en est que le blindage n'est pas parfait, n'étant pas fermé car on doit laisser passer à travers le blindage la tige métallique qui relie la boule de l'électromètre à son aiguille. L'électricité que l'on communique à la surface extérieure du blindage induit par influence des charges sur la boule qui s'écoulent le long de la tige vers l'aiguille de l'électromètre. L'aiguille et la boule étant chargées attirent sur la surface intérieure du blindage une partie de l'électricité se trouvant sur la surface extérieure. Ainsi apparaît un champ électrique non seulement à l'extérieur du blindage, mais aussi à l'intérieur de celui-ci.

L'électromètre ne peut donc être utilisé comme appareil de mesure que si son aiguille n'est que partiellement protégée contre l'action des champs extérieurs, à condition toutefois que la liaison de l'aiguille avec les corps extérieurs soit faible. A cet effet il faut que les dimensions de l'orifice pratiqué dans le blindage, de la boule de l'électromètre et de la partie extérieure de la tige reliant la boule à l'aiguille soient petites. S'il n'en était pas ainsi, sur ces parties de l'électromètre des charges appréciables pourraient être induites par des corps

extérieurs étrangers et l'écoulement de ces charges sur l'aiguille fausserait la mesure de la différence de potentiel. Pour cette même raison les fils reliant les corps A et B à la boule et au blindage de l'électromètre doivent être fins.

3. L'expérience suivante est tout aussi instructive. Une boule d'épreuve attachée à un manche isolant est reliée par un fil souple à la boule de l'électromètre dont le blindage est mis à la terre (fig. 59). Lorsqu'on déplace la boule d'épreuve sur la surface d'un corps métallique C chargé, la déviation de l'aiguille ne change pas.

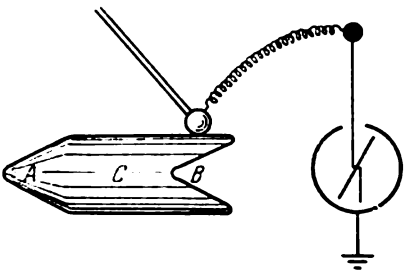


Fig. 59

Ce résultat est évident puisque l'électromètre mesure la différence de potentiel entre les boules et que le potentiel de la boule d'épreuve ne dépend pas de la position de son point de contact avec le corps chargé C. Dans une expérience analogue décrite au § 11 (cf. fig. 33) l'électromètre ne sentait pas la charge prélevée sur le creux B. Ce résultat négatif ne signifie nullement que la densité superficielle d'électricité est nulle en B. C'est la sensibilité de la méthode qui est insuffisante. L'expérience dont il est question ici permet d'affirmer avec certitude que la densité d'électricité en B est faible mais différente de zéro, car autrement on n'aurait observé aucune déviation de l'aiguille lorsque la boule d'épreuve non chargée est mise en contact avec le corps C en B. La charge transférée du corps C à la boule d'épreuve et à l'électromètre ne dépend pas du point de contact ; la position du point de contact ne peut influer que sur le temps de charge de l'électromètre, qui bien que très petit est toujours fini. La charge est rapide lorsque la boule d'épreuve se trouve en contact avec la pointe A et lente lorsque le contact se fait en B.

4. Pour mesurer le potentiel en différents points d'un diélectrique liquide ou gazeux on peut utiliser la méthode de la *sonde électrique*. C'est un petit corps métallique (par exemple un petit bout de fil métallique émergeant d'un tube diélectrique, une petite bille ou un petit disque) relié à la boule d'un électromètre dont le blindage est mis à la terre. On introduit la sonde là où on désire mesurer le potentiel. La déviation de l'électromètre indiquera évidemment la

différence de potentiel entre l'aiguille et le blindage ou, ce qui revient au même, entre la sonde et la Terre. Toutefois la sonde connectée à l'électromètre modifie en général notablement le potentiel du point de l'espace où elle se trouve par suite de l'apparition de charges induites sur la sonde et sur la boule de l'électromètre.

Considérons d'abord le cas où la petite sonde A est isolée (fig. 60, *a*). Dès qu'on l'introduit dans un champ électrique, la sonde se polarise, ce qui implique que les charges positives et négatives se déplacent un peu en sens contraires. Mais comme ces déplacements sont petits, l'introduction de la sonde ne perturbera le champ que très faiblement autour de la sonde. Des charges induites de signes contraires feront leur apparition sur la boule et l'aiguille de l'électromètre. Si nous relions la sonde A et la boule B de l'électromètre par un fil fin (fig. 60, *b*), il ne restera sur la sonde A que de l'électricité d'un signe, l'électricité de signe opposé s'écoulant sur l'électromètre. Comme la quantité d'électricité transférée est très petite, le potentiel de la boule B et de la tige de l'électromètre ne variera pratiquement pas. Quant à la sonde A, vu ses petites dimensions, la perte d'une petite charge suffit pour modifier notablement son potentiel : la sonde A prend le potentiel de la boule et de la tige de l'électromètre. Ainsi, le fait de relier la sonde à l'électromètre ne modifie pratiquement pas l'angle de déviation de l'aiguille de l'électromètre, mais cette indication n'a aucun rapport avec le potentiel qui existait au point A avant introduction de la sonde.

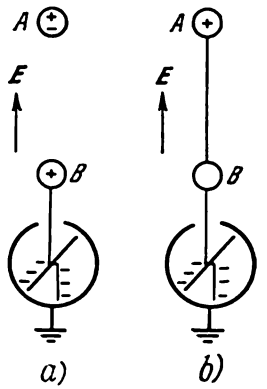


Fig. 60

Afin que la mesure du potentiel soit possible, il faut que la sonde placée au point A et la boule de l'électromètre qui lui est reliée prennent le potentiel qui existait au point A avant introduction de la sonde. On y arrive en éliminant les charges qui sont induites sur la sonde. La *sonde à gouttes* est constituée par un récipient contenant un liquide conducteur et dans le fond duquel on pratique un petit orifice par lequel le liquide s'écoule goutte à goutte. Ces gouttes évacuent les charges induites sur la sonde. Les charges de signe contraire sont transférées alors sur la tige et l'aiguille de l'électromètre. De ce fait l'angle de déviation de l'aiguille varie. L'état stationnaire est atteint lorsque la sonde ne porte aucune charge; son potentiel est alors celui de l'espace environnant et comme la sonde est reliée à la boule B de l'électromètre, celui-ci aura le même potentiel et indiquera le potentiel qu'il s'agit de mesurer.

Il existe d'autres procédés encore pour évacuer les charges induites sur la sonde. On utilise par exemple la *sonde à flamme* qui est

constituée par l'extrémité d'un fil métallique émergeant d'un tube en diélectrique fonctionnant comme un bec à gaz. Du fait de la température élevée de la flamme, l'air ambiant se trouve légèrement ionisé et est par suite conducteur. Les ions ainsi formés enlèvent les charges induites sur la sonde et sont évacués par le courant gazeux ambiant. Le même principe est utilisé dans la *sonde radioactive*. Le corps de la sonde est recouvert d'une couche de substance radioactive qui ionise le gaz ambiant. Dans ces deux cas la sonde prend le potentiel qui existait dans la région de l'espace avant que la sonde

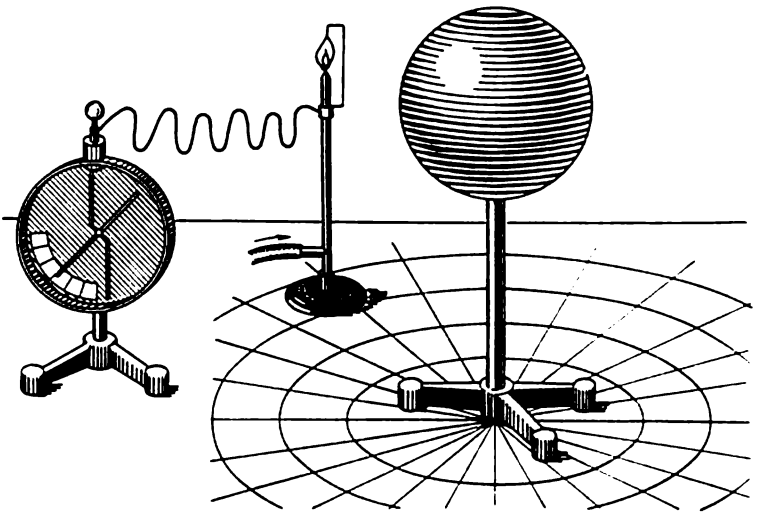


Fig. 61

y fut introduite. La même chose se produit dans les liquides conducteurs (électrolytes) où on introduit des électrodes chargées. Les charges induites sont évacuées par conduction du liquide lui-même.

5. Une expérience de démonstration facile à réaliser permet d'illustrer le principe de fonctionnement des sondes. Une sonde à flamme non allumée est placée à côté d'une grande sphère métallique isolée (fig. 61). Tant que la flamme n'est pas allumée, l'aiguille de l'électromètre ne dévie pas même si la sphère est fortement chargée. Mais dès qu'on enflamme le gaz d'éclairage sortant du tube de la sonde, l'aiguille de l'électromètre dévie fortement. En approchant l'électromètre de la sphère chargée, la déviation augmente, et diminue si on l'éloigne. L'aiguille ne bouge pas lorsqu'on déplace la sonde sur une surface équipotentielle sphérique concentrique à la surface de la sphère.

§ 21. Champ électrique de la Terre

1. La sonde électrique permet de mesurer l'intensité du champ électrique dans les diélectriques, les gaz par exemple. Il suffit pour cela de mesurer le potentiel φ en divers points de l'espace et de calculer le gradient de potentiel. Il est cependant plus facile de mesurer directement l'intensité du champ électrique. Un des procédés de mesure de l'intensité est le suivant. On dispose deux plaques métalliques en positions parallèles normalement à la direction du champ (on réalise ainsi un condensateur à air, fig. 62). Les plaques sont interconnectées à travers un galvanomètre balistique à l'aide duquel on mesure la charge qui traverse le circuit. Etant interconnectées, les plaques ont même potentiel, de sorte que le champ est nul dans l'espace compris entre les plaques. Le champ électrique n'existe qu'en dehors des plaques et son intensité est liée à la densité superficielle d'électricité par la relation $E=4\pi\sigma$ (dans les gaz on peut négliger la différence entre D et E). Si la distance entre plaques est petite devant leurs dimensions, on peut ne pas tenir compte de l'effet de bord et poser que σ est constant. On fait tourner rapidement les plaques de 90° afin de les placer en position verticale. Pendant cette rotation le galvanomètre balistique enregistre le passage d'une charge $q = S\sigma$, où S est l'aire d'une plaque. Connaissant q on trouve d'abord σ puis l'intensité E du champ.

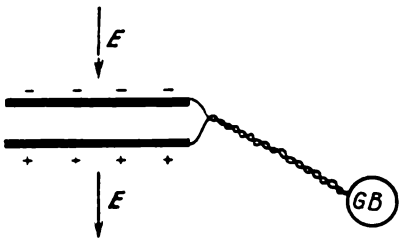


Fig. 62

2. Les mesures de ce type ont montré que le globe terrestre est chargé négativement et que le champ électrique terrestre varie dans le temps. On distingue les variations régulières (diurnes et annuelles) et les variations irrégulières. Au niveau du sol l'intensité moyenne du champ terrestre est de 130 V/m. Entre deux niveaux distants de la taille d'un homme existe une différence de potentiel de 200 V environ. Les hommes ne s'aperçoivent pas de cette différence de potentiel et ne sont pas électrocutés parce que le corps humain est bon conducteur de l'électricité. Comme tout conducteur, le corps humain affecte fortement le champ électrique. Les lignes de force tombent normalement sur la surface du corps humain et les surfaces équipotentielles le contournent exactement comme dans le cas des corps métalliques. Tous les points du corps humain se trouvent au même potentiel.

Connaissant l'intensité du champ terrestre à proximité du sol, on calcule facilement que la charge négative totale de la Terre est égale à $6 \cdot 10^5$ C environ. A une altitude de 1 km l'intensité du champ terrestre est égale à 40 V/m environ, à une altitude de 10 km il ne dépasse pas quelques volts par mètre ; à 50 km d'altitude on le décèle à peine. La majeure partie de la chute de potentiel se produit à basse altitude. La différence de potentiel totale entre la surface terrestre et les couches supérieures de l'atomosphère est de 400 000 V environ. Ces données indiquent que l'atmosphère terrestre est chargée positivement.

3. L'air est conducteur de l'électricité du fait de la présence d'ions formés par action du rayonnement cosmique sur les atomes et les molécules de l'air. Etant conductrice, l'atmosphère est le siège de courants électriques qui tendent à décharger la Terre. La densité moyenne de ces courants électriques est de l'ordre de 10^{-6} μA/m^2. Le courant électrique total arrivant sur la Terre est de 1800 A environ. Nous avons indiqué plus haut que la charge de la Terre est $\sim 6 \cdot 10^5$ C. A l'aide de ces données un calcul simple montre que la charge de la Terre devrait diminuer de deux fois toutes les quatre minutes. La Terre devrait

donc perdre toute sa charge au bout d'une demi-heure environ. Comme cela ne se produit pas, il doit exister des processus fournissant à la Terre des charges négatives et grâce auxquels la charge moyenne de la Terre est maintenue constante. Pendant longtemps on se demandait quelle pouvait être la nature de ces processus, mais actuellement il semble bien établi que la charge de la Terre est maintenue constante du fait des orages atmosphériques.

Les orages sont un des plus grandioses phénomènes naturels. Quoique la nature électrique des éclairs soit connue depuis longtemps, nos connaissances sur l'électricité atmosphérique comportent beaucoup de lacunes. On ne connaît qu'imparfaitement le mécanisme de formation des charges électriques atmosphériques, mais on peut considérer comme bien établi que la charge du globe terrestre est maintenue constante par les décharges électriques (foudres atmosphériques tombant sur la surface de la Terre). Chaque coup de foudre apporte en moyenne de 20 à 30 C d'électricité négative. R. Feynman (né en 1918) avance dans son cours de physique bien connu les arguments suivants en faveur de cette théorie. On mesure, par temps clair, au-dessus de la surface de la mer, le courant électrique allant vers la Terre. On constate que, moyenné sur la surface du globe, ce courant présente des variations diurnes. Le courant maximal est près de 15 % supérieur au courant moyen diurne et se manifeste vers 19 heures (Greenwich). L'intensité du champ électrique terrestre présente les mêmes variations diurnes. Le plus curieux est que l'instant du maximum est *le même* sur toute la Terre (l'instant est repéré par rapport à un même faisceau horaire). Ce résultat ne paraît pas tellement surprenant en remarquant que les couches supérieures de l'atmosphère (l'ionosphère) présentent une grande conductibilité électrique. L'eau de mer est également un bon conducteur. On se trouve donc en présence de deux enveloppes conductrices sphériques entre lesquelles s'établit le champ électrique terrestre, tout comme dans le cas d'un condensateur sphérique. Ces enveloppes étant conductrices, il ne peut y exister de différence de potentiel notable. D'autre part, il a été établi que le maximum d'activité orageuse dont on prend la moyenne sur toute la surface du globe terrestre se manifeste également vers 19 heures (heure de Greenwich), ce qui confirme l'hypothèse selon laquelle il existe un lien entre les orages atmosphériques et le champ électrique de la Terre.

PROBLÈME

La Terre est constamment irradiée par des rayons cosmiques de haute énergie venant de l'espace extérieur au système solaire. Pour l'essentiel les rayons cosmiques sont constitués de protons dont l'énergie moyenne $\mathscr{E}$ atteint plusieurs milliards d'électrons-volts. L'intensité I du flux de protons atteignant l'atmosphère terrestre est égale à un proton par cm² par seconde environ. Évaluer le temps requis pour que les protons des rayons cosmiques élèvent le potentiel de la Terre jusqu'à une valeur telle qu'ils ne puissent plus atteindre la surface terrestre du fait des forces de répulsion électriques. Expliquer pourquoi les protons continuent à arriver sur Terre après la durée calculée.

Réponse. $t = \dfrac{\mathscr{E}}{4\pi R I e^2} \approx 10^6$ s ≈ 10 j (R — rayon de la Terre, e — charge du proton; le résultat numérique correspond à la valeur $\mathscr{E}/e \sim 10^9$ V). En réalité le potentiel de la Terre ne peut prendre cette valeur, car parallèlement à l'arrivée des protons il existe un processus inverse grâce auquel l'atmosphère terrestre perd des charges positives sous forme de protons et d'ions positifs s'échappant dans l'espace cosmique sous l'action du champ électrique ainsi créé.

§ 22. Problème mathématique général de l'électrostatique

1. Si on connaît le potentiel φ en fonction des coordonnées spatiales, le calcul de sa différentielle permet de calculer par la formule (18.5) l'intensité du champ électrique. Connaissant la permittivité diélectrique du milieu, on peut alors déterminer le vecteur induction $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ et à l'aide du théorème de Gauss (13.5) calculer la densité spatiale des charges libres ρ. La densité superficielle des charges libres sera calculée à l'aide de (14.1) d'après le saut de la composante normale du vecteur $\boldsymbol{D}$.

Inversement, si on connaît les densités des charges libres et liées, l'intégration des expressions (19.3) ou (19.4) permet de trouver le potentiel et de là toutes les autres grandeurs. En règle générale l'intégration analytique de (19.3) ou (19.4) est irréalisable, mais le calcul numérique est toujours possible.

Les problèmes réels que pose l'électrostatique sont beaucoup plus compliqués puisqu'on ne connaît ni les charges liées ni la répartition des charges libres sur la surface des conducteurs et qu'il faudrait commencer à les déterminer. Le problème mathématique général de l'électrostatique peut être formulé de la façon suivante.

Supposons connues la répartition et la forme de tous les conducteurs disposés dans un milieu diélectrique, la permittivité ε du milieu entre les conducteurs et la densité spatiale des charges électriques libres en tout point du diélectrique. On connaît en outre l'une des données suivantes: a) le potentiel de tous les conducteurs, b) les charges de tous les conducteurs, c) les charges de certains conducteurs et les potentiels des autres conducteurs. Il s'agit de calculer l'intensité du champ électrique en tout point de l'espace et la répartition de l'électricité sur la surface des conducteurs.

2. Le problème consiste à calculer le potentiel φ en fonction des coordonnées spatiales x, y, z. Il faut trouver d'abord la forme de l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire cette fonction. Ecrivons le théorème de Gauss (13.5) sous la forme $\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{E}) = 4\pi\rho$ et remplaçons $\boldsymbol{E}$ par son expression (18.5):

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -4\pi\rho, \tag{22.1}$$

ou sous forme analytique

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = -4\pi\rho. \tag{22.1a}$$

Si le diélectrique est homogène (ε ne dépendant pas des coordonnées), on aura

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \tag{22.2}$$

ou

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{22.2a}$$

Introduisons l'*opérateur* dit *de Laplace* (ou *laplacien*):

$$\Delta\equiv\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{22.3}$$

On écrira alors

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\equiv\Delta\varphi\equiv\nabla^2\varphi \tag{22.4}$$

et l'équation (22.2a) peut s'écrire sous la forme concise:

$$\Delta\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}. \tag{22.5}$$

Cette équation est appelée *équation de Poisson*. Lorsqu'il n'y a pas de charges libres ($\rho = 0$) l'équation de Poisson se ramène à l'*équation de Laplace*:

$$\Delta\varphi = 0. \tag{22.6}$$

Le problème général de l'électrostatique se ramène à trouver une solution de l'équation différentielle (22.1) satisfaisant à toutes les conditions énumérées dans ce qui précède. On peut montrer que ce problème ne peut avoir plus d'une solution *). Pour ne pas avoir à répéter les mêmes calculs, nous remettrons la démonstration de ce *théorème d'unicité* au § 29. Notons que c'est une tâche ardue que de trouver la solution de l'équation différentielle, car on ne connaît des solutions analytiques que pour quelques cas particuliers et peu nombreux. Mais dès qu'on a réussi à trouver la forme de la fonction φ satisfaisant à toutes les conditions du problème, on peut affirmer que cette solution est unique. C'est ce qui fait l'importance du théorème d'unicité.

Il n'est pas toujours nécessaire de connaître les charges ou les potentiels des corps *dans tout l'espace*. S'il s'agit, par exemple, de calculer le champ dans une cavité entourée d'une enveloppe conductrice, il suffit de connaître ces paramètres rien que pour les corps contenus dans la cavité. Si au contraire on doit calculer le champ extérieur, on ne doit disposer que de données sur les charges ou les potentiels relatifs à l'espace extérieur à l'enveloppe conductrice et connaître la charge totale ou le potentiel de la surface extérieure de cette enveloppe. Le théorème d'unicité reste valable pour ces cas particuliers.

Donnons deux exemples d'application du théorème d'unicité.

---

*) Si on ne connaît que les charges de tous les conducteurs, le potentiel φ sera défini à une constante additive près, qui n'est pas essentielle.

3. L'électricité est répartie dans le vide avec une densité spatiale ρ. Le potentiel φ_0 du champ électrique doit vérifier l'équation $\Delta\varphi_0 = -4\pi\rho$. Remplissons tout l'espace d'un diélectrique homogène de permittivité ε tout en laissant les charges libres dans leurs positions primitives. Le potentiel en sera modifié et devra satisfaire à l'équation (22.5). En comparant les deux équations et en appliquant le théorème d'unicité, nous obtiendrons $\varphi = \varphi_0/\varepsilon$. Ce résultat montre que l'introduction d'un diélectrique homogène donne lieu à une diminution du potentiel et donc à une diminution de l'intensité du champ électrique de ε fois. Ce résultat subsiste si le système comporte des charges superficielles.

4. Pour donner un autre exemple, reprenons le théorème de Faraday (cf. § 11, pt. 5). Une partie des résultats découlant de ce théorème avait été obtenue intuitivement sur la base de considérations physiques. Le théorème d'unicité permet d'en donner une justification rigoureuse. Soit une cavité entourée d'une enveloppe conductrice et ne renfermant aucune charge électrique. A l'intérieur de la cavité le potentiel satisfait à l'équation de Laplace (22.6) ; sur ses parois il doit avoir une valeur constante C. La solution de l'équation (22.6) satisfaisant à cette condition est évidente: $\varphi(x, y, z) = C$. En vertu du théorème d'unicité il ne peut y avoir d'autres solutions. par suite à l'intérieur de la cavité $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi = 0$, ce qui démontre le théorème de Faraday.

§ 23. Méthode des images électriques

1. Dans ce paragraphe et les suivants nous analyserons des problèmes sur le calcul des champs électrostatiques. Tous ces problèmes seront résolus à l'aide d'artifices dont le premier est la *méthode des images électriques.*

Considérons plusieurs charges électriques ponctuelles réparties dans l'espace. Soit S une surface équipotentielle divisant l'espace en deux demi-espaces I et I' (fig. 63). Notons q_1, q_2, . . . les charges ponctuelles du demi-espace I et q'_1, q'_2, . . . celles du demi-espace I'. Toute charge ponctuelle peut être considérée comme le cas limite d'un petit corps conducteur, une petite bille métallique par exemple. Le théorème d'unicité s'applique à ce cas. Ayant fixé la grandeur et la répartition des charges q_1, q_2, . . ., ainsi que le potentiel de la surface S, le champ dans le demi-espace I est déterminé de façon univoque. Il en est de même du demi-espace I'. Par conséquent si on rendait la surface S conductrice, le champ dans tout l'espace n'en sera pas modifié, mais les champs régnant dans les demi-espaces I et I' seront indépendants l'un de l'autre. Nous obtenons ainsi la solution de deux problèmes analogues. Le premier de ces problèmes s'énonce comme suit.

Dans le demi-espace I, d'un côté du corps conducteur S se trouvent les charges ponctuelles q_1, q_2, . . . Calculer le champ électrique dans ce demi-espace. Ce champ se compose des champs créés par les charges q_1, q_2, . . . et par les charges induites sur la surface du corps S. En vertu du théorème d'unicité le champ que créent les charges induites dans le demi-espace I est équivalent à celui que créent les charges q_1', q_2', . . . Pour calculer le champ cherché on

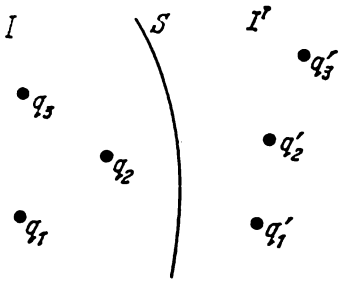


Fig. 63

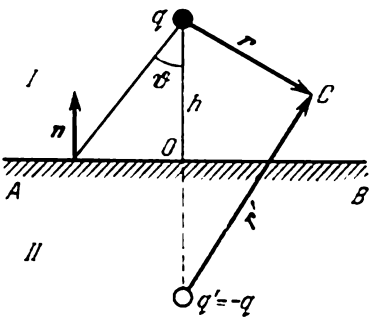


Fig. 64

peut enlever le corps conducteur S et le remplacer par les charges ponctuelles q_1', q_2', . . . L'ensemble de ces charges est appelé *image électrique* des charges q_1, q_2, . . . par rapport à la surface S. Ainsi le problème relatif au champ créé par des charges se trouvant d'un côté d'une surface conductrice se ramène à trouver les images électriques des charges par rapport à cette surface.

Deux exemples illustreront cette méthode.

2. *Charge ponctuelle q disposée au-dessus de la surface illimitée plane d'un conducteur.* L'image électrique de la charge q par rapport au plan AB est une charge de signe contraire $q' = -q$ disposée de l'autre côté du plan AB à la même distance de ce plan que la charge q (fig. 64). En effet le potentiel du champ des charges ponctuelles q et q' en un point quelconque C au-dessus de la surface du conducteur est

$$\varphi = q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right). \tag{23.1}$$

Comme le potentiel s'annule sur la surface AB, c'est une surface équipotentielle. Par suite la formule (23.1) donne le potentiel du champ dans le demi-espace supérieur I. Le champ est évidemment nul dans le demi-espace inférieur II qui est occupé par le milieu conducteur. Cela signifie que la charge q induit sur le plan AB des charges telles qu'elles créent dans le demi-espace supérieur I le même champ que produirait une charge ponctuelle auxiliaire $q' = -q$. Il en résulte que les charges induites attirent la charge q avec la même force

qu'exercerait la charge auxiliaire $q' = -q$, i.e. avec une force égale à $F = q^2/(2h)^2$, h étant la distance entre la charge q et le plan AB. C'est pour cela que l'on appelle cette force *force d'image électrique*. Dans le demi-espace inférieur II les charges induites compensent le champ de la charge q.

La densité superficielle de l'électricité est donnée par la formule

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_n = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Un calcul simple conduit au résultat suivant:

$$\sigma = -\frac{q}{2\pi h^2} \cos^3 \vartheta. \tag{23.2}$$

La charge totale induite sur le plan infini AB est égale et de signe contraire à la charge q. Il est facile de s'en assurer par intégration directe de l'expression (23.2) sur le plan AB ou plus simplement en

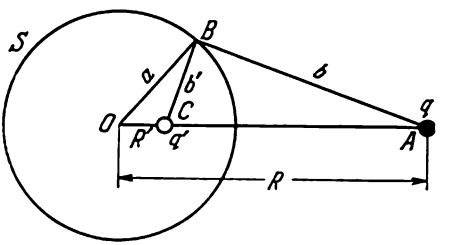


Fig. 65

utilisant le théorème de Gauss. Entourons la charge q et les charges induites par une surface sphérique de centre O et de rayon infini. Sur l'hémisphère englobant le milieu conducteur le champ et son flux sont nuls. Sur l'autre hémisphère entourant le vide le champ se confond avec le champ d'un dipôle ponctuel et varie donc en raison inverse du cube de la distance. La surface de l'hémisphère croît, elle, proportionnellement au carré de la distance. Il s'ensuit que le flux du vecteur E s'annule pour $r \to \infty$. Selon le théorème de Gauss, la charge totale englobée par la sphère doit être également nulle. Or cette charge est égale à $q + q_{\text{ind}}$, q_{ind} étant la charge totale induite sur le plan AB. Donc $q_{\text{ind}} = -q$.

3. *Charge ponctuelle q se trouvant au voisinage d'une sphère conductrice* (fig. 65). Supposons que la sphère S de rayon a soit mise à la terre, ce qui signifie que son potentiel est égal à zéro. La grandeur q de la charge ponctuelle et sa distance $R = OA$ au centre de la sphère sont supposées connues. Avec ces données la solution du problème électrostatique se trouve définie de façon univoque. Selon le théorème de Faraday, le champ à l'intérieur de la sphère est égal à zéro. Il reste donc à calculer le champ dans l'espace extérieur. Choisissons

sur la droite OA un point C tel que le triangle OBC soit semblable au triangle OBA. Plaçons au point C une charge ponctuelle auxiliaire q'. Si b et b' sont les longueurs des segments BA et BC, le potentiel des charges q et q' au point B sera égal à $(q/b + q'/b')$. Ce potentiel sera nul si

$$q' = -\frac{b'}{b} q = -\frac{a}{R} q. \tag{23.3}$$

Ce résultat montre que la grandeur de q' ne dépend pas de la position du point B sur la sphère S. Il en résulte que le potentiel créé par les charges q et q' est nul en tout point de la surface de la sphère S, ce qui signifie que la charge q' est l'image électrique de q par rapport à la sphère S. En dehors de la sphère, aux distances r et r' des charges q et q' le potentiel est donné par l'expression

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}. \tag{23.4}$$

La charge totale q_{ind} induite sur la sphère S est égale et de même signe que la charge q'. Pour le démontrer traçons une surface fermée arbitraire Σ entourant la sphère S mais n'entourant pas la charge q. Sur la surface Σ le champ $\boldsymbol{E}$ coïncide avec le champ des charges ponctuelles q et q', la charge q étant extérieure à la surface Σ. Le flux Φ de ce champ à travers la surface Σ sera $\Phi = 4\pi q'$. En vertu du théorème de Gauss ce même flux vaut $\Phi = 4\pi q_{\text{ind}}$. Par conséquent, $q_{\text{ind}} = q'$.

Si le potentiel de la sphère S est égal à φ_0, on devra introduire une charge fictive supplémentaire $q_0 = a\varphi_0$ que l'on placera au centre O de la sphère S. Le champ dans l'espace extérieur sera donné par la superposition des champs des trois charges: q, q' et q_0. En effet le potentiel des charges q et q' étant nul, sur la sphère S le potentiel n'est dû qu'à la charge q_0 et a pour valeur $q_0/a = \varphi_0$.

Remarquons encore que les charges électriques q et q' sont *réciproques*. On entend par là que si q' est l'image électrique de la charge q, cette dernière est l'image électrique de la charge q'. Cette remarque permet d'appliquer cette méthode au cas où la charge ponctuelle est placée à l'intérieur d'une cavité sphérique pratiquée dans un milieu conducteur.

4. Admettons maintenant que la sphère S est isolée et porte une charge q_0. Il est facile de se rendre compte que pour déterminer le champ dans l'espace extérieur il faut ajouter aux charges q et q' une troisième charge fictive égale à $q_0 - q'$ et placée au centre O de la sphère. Dans le cas particulier où $q_0 = 0$, les charges q et q' créent dans l'espace extérieur le même champ que produirait un dipôle de longueur R', de moment dipolaire $p = -q'R'$ et dirigé suivant le champ $\boldsymbol{E}$ dû à la charge q. Si nous éloignons à l'infini la charge q tout en l'augmentant de manière que le champ $\boldsymbol{E}$ au centre

de la sphère reste invariable, on obtiendra à la limite un champ électrique homogène dans lequel se trouve placée la sphère conductrice. On aura alors $p = -q'R' = a^3q/R^2 = a^3E$, ce qui s'écrit sous forme vectorielle

$$p = a^3E. \tag{23.5}$$

Nous avons déjà obtenu ce résultat au § 16.

PROBLÈMES

1. Calculer la force d'attraction entre une charge ponctuelle q et une sphère métallique (cf. fig. 65). Considérer deux cas différents: 1) la sphère est mise à la terre; 2) la sphère est isolée et sa charge totale est nulle.

Réponse. 1) $F = \frac{Ra}{(R^2-a^2)^2}q^2$; 2) $F = \left(\frac{Ra}{(R^2-a^2)^2} - \frac{a}{R^3}\right)q^2$.

2. Avec les mêmes données que dans le problème ci-dessus, calculer le travail A qu'il faudrait fournir pour éloigner à l'infini la charge ponctuelle q.

Réponse. 1) $\frac{aq^2}{2(R^2-a^2)}$; 2) $\frac{a^3q^2}{2R^2(R^2-a^2)}$.

3. On place une charge ponctuelle q à l'intérieur d'une enveloppe conductrice sphérique non chargée en un point A se trouvant à une distance $OA = a$

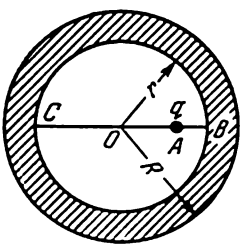


Fig. 66

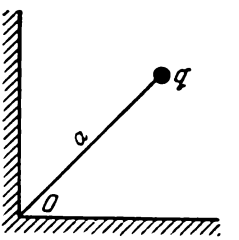


Fig. 67

du centre de la sphère (fig. 66). Le rayon de la surface intérieure de l'enveloppe est r et le rayon de sa surface extérieure est R. Calculer: 1) la densité superficielle des charges électriques induites sur la surface extérieure de l'enveloppe; 2) le potentiel de l'enveloppe en prenant pour zéro le potentiel d'un point à l'infini; 3) la densité superficielle des charges induites aux points B et C de la surface intérieure de l'enveloppe.

Réponse. 1) $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$; 2) $\varphi = \frac{q}{R}$; 3) $\sigma_B = \frac{q}{4\pi(r-a)^2}\left(1 + \frac{a}{r}\right)$, $\sigma_C = \frac{q}{4\pi(r+a)^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)$.

4. Calculer la force s'exerçant sur une charge ponctuelle q placée sur la bissectrice d'un angle dièdre droit formé par deux plans conducteurs (fig. 67). La distance de la charge q au sommet de l'angle dièdre est a.

Réponse. $F = \frac{q^2}{4a^2}(2\sqrt{2} - 1)$. La force F est dirigée vers le sommet O de l'angle dièdre.

5. Soit une charge ponctuelle q placée entre deux plans métalliques se coupant sous un angle de 60° (fig. 68). Calculer la limite vers laquelle tend l'in-

tensité E du champ électrique lorsque le point d'observation s'approche de l'arrêt O tout en restant entre les plans métalliques. Que devient le résultat du calcul au cas où la charge ne sera pas ponctuelle?

Solution. Il est facile de s'assurer que l'image électrique de la charge q par rapport à la surface AOB est un ensemble de cinq charges: q_1, q_2, q_3, q_4, q_5. Le champ au point O de ces cinq charges et de la charge q est nul. Si la charge q n'était pas ponctuelle, on obtiendrait le même résultat.

6. La surface plane d'un conducteur infini comporte une bosse sphérique CMD dont le centre O est contenu dans le même plan (fig. 69). Sur la perpendiculaire OM en dehors du conducteur se trouve placée la charge ponctuelle q. Calculer le champ électrique dans tout l'espace.

Solution. Introduisons des images électriques dans les parties sphérique et plane du conducteur, comme indiqué sur la figure 69. Groupons les

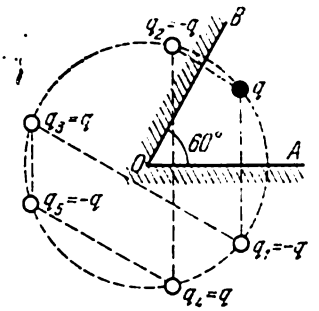


Fig. 68

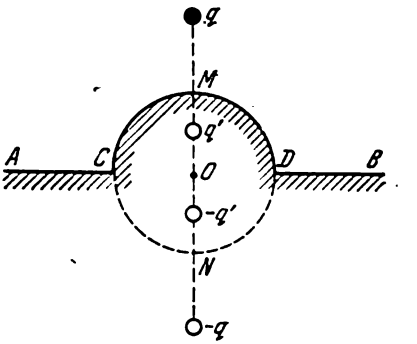


Fig. 69

charges deux à deux: 1) q et $-q$, 2) q' et q'. Chaque couple crée dans le plan $ACDB$ le potentiel égal à zéro. Groupons autrement ces mêmes charges: 1) q et q', 2) $-q$ et $-q'$. Le potentiel de chacun de ces couples est alors nul sur la sphère $CMDN$. Il en découle que le potentiel créé par les quatre charges q, $-q$, q' et $-q'$ sur la surface $ACMDB$ est nul. On en conclut que le champ créé par ces charges dans le demi-espace supérieur est identique à celui que nous nous proposons de calculer.

7. Calculer la force d'attraction F entre un dipôle électrique ponctuel et une plaque métallique infinie sachant que le moment p du dipôle est normal aux plans de la plaque et que sa plus courte distance à la plaque est h. Calculer aussi le travail A_{12} que l'on doit fournir pour déplacer le dipôle de la distance h_1 à la distance h_2 par rapport à la plaque.

Réponse. $F=\frac{3p^2}{8h^4}$, $A_{12}=\frac{p^2}{8}\left(\frac{1}{h_1^3}-\frac{1}{h_2^3}\right)$. On notera que le déplacement du dipôle s'accompagne d'un déplacement des charges qu'il avait induites. Mais comme le déplacement est orthogonal aux lignes de force, il n'exige aucun travail supplémentaire.

§ 24. Charge ponctuelle placée au-dessus de la surface plane d'un diélectrique

Considérons deux diélectriques homogènes de permittivités ε_1 et ε_2 en contact mutuel suivant le plan MN (fig. 70). Au point A du premier diélectrique est placée une charge ponctuelle q. Il s'agit de calculer le champ électrique

créé dans chacun des diélectriques. A proximité du point A le champ doit tendre vers l'infini, comme tout champ coulombien d'une charge ponctuelle q. Il s'ensuit que l'expression du champ créé dans le premier diélectrique doit comporter le terme $qr/(\varepsilon_1 r^3)$. On doit ajouter à ce terme le champ créé par les charges de polarisation induites à la frontière des diélectriques. Supposons que le champ créé par les charges de polarisation dans le premier diélectrique soit équivalent au champ d'une certaine charge ponctuelle q' placée au point A' symétrique au point A par rapport à la surface de séparation (les calculs ultérieurs justifieront cette hypothèse). Le champ électrique dans le premier diélectrique se laisse alors exprimer par l'équation

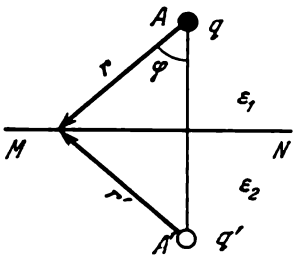


Fig. 70

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r^3} r + \frac{q'}{\varepsilon_1 r'^3} r',$$

où r et r' sont les rayons vecteurs reliant les charges q et q' au point d'observation. Introduisons une seconde hypothèse qui se trouvera également justifiée par les résultats qu'elle permet d'obtenir et selon laquelle le champ dans le deuxième diélectrique sera donné par l'expression

$$E_2 = \frac{q''}{\varepsilon_2 r^3} r,$$

la deuxième charge fictive q'' étant spatialement confondue avec la charge q (nous avons omis de la repérer sur la figure 70). Il nous reste à raccorder l'une à l'autre les expressions de E_1 et de E_2 de manière qu'à la surface de séparation des diélectriques soient vérifiées les conditions aux limites suivantes : continuité des composantes tangentielles du vecteur E et des composantes normales du vecteur D. La première de ces conditions est de la forme

$$\frac{q}{\varepsilon_1} \sin\varphi + \frac{q'}{\varepsilon_1} \sin\varphi = \frac{q''}{\varepsilon_2} \sin\varphi,$$

la seconde est de la forme

$$q \cos\varphi - q' \cos\varphi = q'' \cos\varphi.$$

Il est essentiel que l'angle φ s'élimine entre ces deux équations. Par conséquent, si q' et q'' sont déterminées à partir de ces équations, les conditions aux limites seront satisfaites en tous les points de la frontière des deux diélectriques. On trouve ainsi

$$\begin{gathered} E_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r^3} r - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r'^3} r', \\ E_2 = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r^3} r. \end{gathered} \tag{24.1}$$

Ces expressions satisfont à toutes les données du problème et en vertu du théorème d'unicité donnent sa solution. Lorsque $\varepsilon_2 \to \infty$ elles se ramènent aux expressions correspondantes donnant le champ d'une charge ponctuelle se trouvant au-dessus d'un plan conducteur.

PROBLÈME

Calculer la force agissant sur une charge ponctuelle q à proximité de la surface de séparation plane de deux diélectriques.

Réponse. $F = \frac{1}{4\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{q^2}{h^2}$, h étant la distance entre la charge et la frontière des diélectriques. Si $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, la charge est attirée par la frontière et en est repoussée si $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

§ 25. Champ électrique d'un ellipsoïde conducteur chargé

1. Considérons une couche sphérique délimitée par deux sphères concentriques et uniformément chargée en volume. On sait que le champ électrique dans la cavité entourée par une telle couche est nul. Quoique ce résultat soit une conséquence directe du théorème de Gauss (cf. § 6), il nous importe pour la suite de notre exposé de le déduire de la loi de Coulomb. Faisons passer par un point arbitraire M pris à l'intérieur de la cavité sphérique un faisceau de droites d'ouverture infiniment petite (fig. 71). Ce faisceau découpe dans la couche sphérique chargée deux volumes élémentaires infinitésimaux dV_1 et dV_2 (hachurés sur la figure 71). Faisons passer par les points A, B, A', B' des éléments de surfaces sphériques de centre commun M (dont les traces sont représentées en pointillé sur la figure 71). Le faisceau de droites mené par le point M délimite entre ces surfaces des volumes élémentaires $d\tau_1$ et $d\tau_2$ (non indiqués sur la figure). De toute évidence, $d\tau_1/d\tau_2 = r_1^2/r_2^2$, r_1 et r_2 étant les distances des éléments $d\tau_1$ et $d\tau_2$ du point M. D'autre part $d\tau_1 = dV_1$, $d\tau_2 = dV_2$ et par suite $dq_1/dq_2 = r_1^2/r_2^2$, dq_1 et dq_2 étant les charges contenues respectivement dans les volumes élémentaires dV_1 et dV_2. En se fondant sur la loi de Coulomb on peut affirmer que les champs que créent les charges dq_1 et dq_2 au point M sont égaux et de sens contraires. En faisant passer par le point M des faisceaux de droites dans toutes les directions, on subdivise la couche sphérique chargée en paires de charges infinitésimales analogues, créant au point M des champs qui se compensent mutuellement. Comme le point M a été choisi arbitrairement, on en conclut qu'en tout point de la cavité le champ électrique est nul.

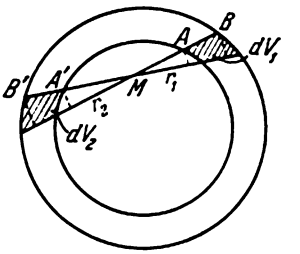


Fig. 71

2. En supposant que toutes les charges électriques contenues dans la couche sphérique soient fixes, nous allons comprimer ou dilater la figure 71 successivement suivant trois directions rectangulaires. Du fait de ces déformations la couche sphérique prend la forme d'une couche ellipsoïdale uniformément chargée et délimitée par deux ellipsoïdes concentriques semblables et disposés de façon semblable. Toute droite menée dans la figure initiale devient par déformation une droite uniformément comprimée ou allongée. Il va de soi que les grandeurs des charges dq_1 et dq_2 restent inchangées. Les volumes élémentaires dV_1 et dV_2 ainsi que les distances r_1 et r_2 changent, mais leurs rapports restent constants, notamment $dq_1/dq_2 = r_1^2/r_2^2$. Il en résulte qu'en tout point se trouvant à l'intérieur de la cavité ellipsoïdale les champs des charges se compensent exactement. Ainsi, *dans une cavité délimitée par une couche ellipsoïdale uniformément chargée, comprise entre deux ellipsoïdes concentriques semblables et disposés de façon semblable, le champ électrique est égal à zéro.*

3. Diminuons indéfiniment l'épaisseur de la couche ellipsoïdale tout en maintenant constante sa charge totale q. A la limite on parvient ainsi à une *distribution superficielle d'électricité* telle que le champ à l'intérieur de la cavité ellipsoïdale soit partout nul. Si on rend conductrice l'enveloppe de la cavité, la répartition d'électricité n'y sera pas perturbée. Cela signifie que l'on arrive

ainsi à une distribution d'équilibre de l'électricité sur la surface d'un ellipsoïde conducteur. Réalisons ce passage à la limite et calculons la valeur de la densité superficielle d'électricité σ sur la surface de l'ellipsoïde. Menons par le centre O de la couche ellipsoïdale un faisceau de droites d'ouverture conique infiniment petite qui découpe dans cette couche un élément de volume dV et sur sa surface un élément de surface dS (fig. 72). Il est évident que $dV = dS\,dN$, dN étant l'épaisseur de la couche à l'endroit considéré. En notant ρ la densité spatiale d'électricité dans la couche, la charge de l'élément de volume dV est égale à $dq = \rho\,dS\,dN$. Lorsque $dN \to 0$, la charge totale de la couche ellipsoïdale étant maintenue constante, on arrive à une distribution superficielle de l'électricité avec une densité superficielle

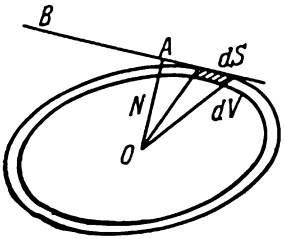


Fig. 72

$$\sigma = \frac{dq}{dS}\,\rho\,dN.$$

Menons par le point considéré de la surface ellipsoïdale le plan tangent AB, abaissons sur ce plan la perpendiculaire OA et notons N la longueur de celle-ci. Pour une direction donnée de la perpendiculaire OA, les volumes des ellipsoïdes semblables et disposés de façon semblable sont évidemment proportionnels à N^3. En notant V le volume de l'ellipsoïde on a $V \sim N^3$ et par suite

$$\Delta V/V = 3dN/N,$$

où ΔV est le volume de la couche ellipsoïdale. Après avoir éliminé dN et en utilisant la relation $q = \rho\,\Delta V$ on obtient

$$\sigma = qN/(3V). \tag{25.1}$$

Si l'équation de la surface ellipsoïdale est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{25.2}$$

on a, d'après un théorème connu de géométrie analytique,

$$N = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}.$$

Comme d'autre part $V = \frac{4\pi}{3}abc$, la formule (25.1) peut s'écrire

$$\sigma = \frac{q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}. \tag{25.3}$$

Les considérations développées dans le présent paragraphe montrent directement qu'*une distribution d'équilibre de l'électricité sur la surface d'un ellipsoïde conducteur reste d'équilibre pour n'importe quelle contraction ou dilatation uniforme de cet ellipsoïde.* Partant de cette proposition on pourrait trouver la distribution d'équilibre de l'électricité sur la surface d'un ellipsoïde en soumettant à une contraction ou à une dilatation uniforme une sphère conductrice chargée. Ce procédé est le plus simple de tous et conduit à la même formule (25.3).

Connaissant la distribution d'électricité sur la surface d'un ellipsoïde, on peut par intégration sur cette surface trouver le potentiel et connaissant ce dernier on peut calculer l'intensité du champ électrique en tout point de l'espace. Mais comme ce procédé de calcul est laborieux, on utilise certains artifices qui simplifient les calculs (voir problèmes 3 et 4 ci-après).

PROBLÈMES

1. Calculer la densité superficielle d'électricité sur une plaque elliptique conductrice infiniment mince que l'on obtient par compression uniforme d'un ellipsoïde le long de l'axe Z.

Réponse.

$$\sigma=\frac{q}{4\pi ab}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}. \tag{25.4}$$

2. Un ellipsoïde conducteur chargé est mentalement divisé en plusieurs parties par des plans équidistants perpendiculaires à l'un de ses axes principaux. Démontrer que quel que soit le nombre de ces parties, les charges qu'elles portent seront toujours égales. Dans le cas particulier d'un ellipsoïde allongé et infiniment mince, l'électricité s'y trouvera uniformément répartie sur toute sa longueur.

3. Trouver les conditions requises pour que les surfaces de la famille $\lambda(x, y, z) = \text{const}$ soient équipotentielles.

Solution. Il est imposé que le potentiel φ doit être constant si la fonction λ est constante. Il en résulte que le potentiel ne doit être fonction que de λ: $\varphi = \varphi(\lambda)$. En dérivant φ par rapport à la coordonnée x on trouve

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi'\frac{\partial\lambda}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\varphi''\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\varphi'\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}.$$

En écrivant des expressions analogues pour y et z et en les sommant on obtient

$$\Delta\varphi = \varphi''(\operatorname{grad}\lambda)^2 + \varphi'\,\Delta\lambda.$$

Compte tenu de l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$, il en découle

$$\frac{\Delta\lambda}{(\operatorname{grad}\lambda)^2}=-\frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}.$$

Ainsi, pour que l'équation $\lambda(x, y, z) = \text{const}$ représente une famille de surfaces équipotentielles, il faut que le premier membre de cette relation ne soit fonction que de λ:

$$\frac{\Delta\lambda}{(\operatorname{grad}\lambda)^2}=\Phi(\lambda). \tag{25.5}$$

Si la fonction $\Phi(\lambda)$ est connue, le potentiel φ s'obtient en intégrant l'équation

$$\frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi'(\lambda)}=-\Phi(\lambda), \tag{25.6}$$

opération qui se réduit à effectuer deux quadratures.

4. Calculer le potentiel du champ électrique d'un ellipsoïde conducteur chargé.

Solution. Soit $\lambda(x, y, z)$ une fonction implicite définie par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \tag{25.7}$$

($a \geqslant b \geqslant c > 0$). L'équation $\lambda(x, y, z) = \text{const}$ représente une famille de surfaces homofocales du second ordre. Pour $c^2 + \lambda > 0$ c'est une famille d'ellipsoïdes; pour $b^2 + \lambda > 0$, $c^2 + \lambda < 0$ c'est une famille d'hyperboloïdes à une nappe; pour $a^2 + \lambda > 0$, $b^2 + \lambda < 0$, $c^2 + \lambda < 0$, on obtient une famille d'hyperboloïdes à deux nappes. Dans tous les cas l'équation $\lambda(x, y, z) = \text{const}$ peut représenter une famille de surfaces équipotentielles. Pour le démontrer il suffit

de s'assurer que la condition (25.5) est vérifiée. Introduisons la notation

$$F_n = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^n} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^n} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^n}.$$

En dérivant (25.7) par rapport à x on obtient

$$\frac{2x}{a^2+\lambda} - F_2 \frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{2x}{(a^2+\lambda)\, F_2}.$$

Après une deuxième dérivation on trouve

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} = \frac{2}{(a^2+\lambda)\, F_2} - \frac{2x}{(a^2+\lambda)^2\, F_2} \frac{\partial\lambda}{\partial x} - \frac{2x}{(a^2+\lambda)\, F_2^2} \left[\frac{2x}{(a^2+\lambda)^2} - 2F_3 \frac{\partial\lambda}{\partial x} \right] =$$

$$= \frac{2}{(a^2+\lambda)\, F_2} - \frac{8x^2}{(a^2+\lambda)^3\, F_2^2} + \frac{8F_3 x^2}{(a^2+\lambda)^2\, F_2^3}.$$

En écrivant des expressions analogues pour les dérivées par rapport à y et z et en les sommant, on obtient

$$(\operatorname{grad}\lambda)^2 = \frac{4}{F_2},$$

$$\Delta\lambda = \frac{2}{F_2} \left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda} \right),$$

ce qui montre que la condition (25.5) est satisfaite et que

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda} \right). \tag{25.8}$$

Ainsi le problème se trouve ramené à intégrer l'équation

$$\frac{\varphi''(\lambda)}{\varphi'(\lambda)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda} \right). \tag{25.9}$$

Supposons maintenant que les dénominateurs figurant dans le second membre de l'équation (25.9) sont positifs. Les surfaces équipotentielles (25.7) seront alors représentées par des ellipsoïdes homofocaux. Pour $\lambda = 0$ on obtient l'ellipsoïde (25.2). Donc si on trouve le potentiel $\varphi(x, y, z)$ à partir de l'équation (25.9), il prendra une valeur constante sur la surface de l'ellipsoïde (25.2) et représentera la solution du problème. L'intégration de l'équation (25.9) donne

$$\varphi'(\lambda) = A\, [(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^{-1/2},$$

où A est la constante d'intégration. En intégrant une seconde fois et en prenant pour zéro de potentiel le potentiel à l'infini, on trouve

$$\varphi(\lambda) = A \int_{\infty}^{\lambda} [(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^{-1/2}\, d\lambda.$$

On détermine la constante A en exigeant qu'à grande distance la fonction φ se ramène au potentiel d'une charge ponctuelle $\varphi = q/r$. Pour les grandes valeurs de λ l'ellipsoïde (25.7) devient une sphère de rayon $r = \sqrt{\lambda}$ et l'intégrale

précédente se ramène à

$$\varphi(\lambda) = A \int_{\infty}^{\lambda} \lambda^{-3/2}\, d\lambda = -2A\lambda^{-1/2} = -\frac{2A}{r}.$$

On aboutit ainsi à l'expression

$$\varphi = \frac{q}{2} \int_{\lambda}^{\infty} [(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)]^{-1/2} d\lambda. \tag{25.10}$$

L'intégrale qui figure dans (25.10) est une intégrale *elliptique*. Si l'ellipsoïde est de révolution, l'intégration ne fait apparaître que des fonctions élémentaires. Pour un *ellipsoïde de révolution allongé* ($b = c$)

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{\sqrt{b^2+\lambda}}{\sqrt{a^2+\lambda}-\sqrt{a^2-b^2}}. \tag{25.11}$$

Introduisons les notations : $A = \sqrt{a^2+\lambda}$ et $f = \sqrt{a^2-b^2}$. La quantité $2A$ est le *grand axe* de l'ellipsoïde équipotentiel passant par le point d'observation et $2f$ est la distance entre les *foyers* de la famille d'*ellipsoïdes homofocaux* considérée. L'expression (25.11) peut être prise sous la forme

$$\varphi = \frac{q}{2f} \ln \frac{A+f}{A-f}. \tag{25.11a}$$

Pour un *ellipsoïde de révolution aplati* ($a = b$)

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\sqrt{\lambda+c^2}}. \tag{25.12}$$

Introduisons la longueur du petit axe de l'ellipsoïde équipotentiel passant par le point d'observation : $2B = 2\sqrt{c^2+\lambda}$, et la distance interfocale $2f = 2\sqrt{a^2-c^2}$. Le potentiel s'écrit alors

$$\varphi = \frac{q}{f} \operatorname{arc\,tg} \frac{f}{B}. \tag{25.12a}$$

5. Une tige diélectrique infiniment mince est uniformément chargée d'électricité avec une densité linéaire constante. Montrer que les surfaces équipotentielles du champ électrique créé seront représentées par des ellipsoïdes homofocaux dont les foyers se trouvent aux extrémités de la tige.

6. Une plaque diélectrique infiniment mince de rayon a est chargée d'électricité avec une densité superficielle

$$\sigma = \frac{q}{2\pi a \sqrt{a^2-r^2}},$$

où r est la distance au centre de la plaque. Montrer que les surfaces équipotentielles du champ créé sont des ellipsoïdes de révolution homofocaux aplatis dont la ligne focale est disposée sur la circonférence délimitant la plaque.

§ 26. Capacité des conducteurs et des condensateurs

1. Considérons un conducteur isolé chargé d'électricité et immergé dans un diélectrique immobile. Posons que le potentiel du champ électrique créé est égal à zéro à l'infini. Si on double la charge

électrique du conducteur, son potentiel s'en trouvera doublé. D'une manière générale la charge q d'un conducteur est proportionnelle à son potentiel φ:

$$q = C\varphi. \tag{26.1}$$

La valeur du coefficient C dépend de la forme et des dimensions du conducteur, de la permittivité du diélectrique dans lequel est plongé le conducteur, ainsi que de sa distribution dans l'espace. Ce coefficient est appelé *capacité du conducteur isolé*. Par exemple, pour une sphère de rayon a entourée d'un diélectrique homogène, $\varphi = q/(\varepsilon a)$ et par suite

$$C = \varepsilon a. \tag{26.2}$$

2. Une notion plus importante est celle de *capacité d'un condensateur*. Tout condensateur est constitué de deux armatures métalliques entre lesquelles se trouve une couche de diélectrique. Supposons que les armatures du condensateur se présentent sous forme de deux enveloppes métalliques fermées et concentriques, l'armature interne étant entourée de toute part par l'armature externe. Dans ce cas le champ régnant entre les armatures est absolument indépendant des champs électriques extérieurs. D'après le théorème de Faraday, les charges accumulées sur les surfaces des armatures qui se font face doivent être égales en grandeur et de signes contraires. Dans un condensateur réel dont les armatures ne sont jamais entièrement fermées, ce résultat n'est vérifié qu'approximativement, quoique à très peu de chose près. Le fait que dans ce cas le champ intérieur du condensateur soit pratiquement indépendant des champs extérieurs tient à ce que les armatures sont très rapprochées. Les charges sont alors concentrées presque entièrement sur les surfaces internes des armatures du condensateur, donc sur des surfaces qui se font face. En notant q la charge de l'une des armatures (pour fixer les idées, ce sera une armature positive) et $\varphi \equiv (\varphi_1 - \varphi_2)$ la différence de potentiel entre les armatures, on a

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{26.3}$$

La constante C ne dépend que des dimensions et de la construction du condensateur. On l'appelle *capacité du condensateur*.

Prenons deux condensateurs. Dans l'un l'espace compris entre les armatures est rempli d'un diélectrique homogène de permittivité ε, tandis que dans l'autre cet espace est occupé par le vide (ce dernier type est appelé condensateur *à air*, ce qui n'est pas parfaitement exact). Par ailleurs ces deux condensateurs sont identiques. A charges égales, la différence de potentiel entre les armatures du premier condensateur est ε fois plus petite qu'entre les armatures du second (cf. § 22, pt. 3). Par conséquent la capacité C du condensateur à diélec-

trique sera ε fois plus grande que celle du condensateur à air (C_0):

$$C = \varepsilon C_0. \tag{26.4}$$

3. Dans tous les systèmes d'unités de mesure on prend pour unité de capacité la capacité d'un condensateur qui portant une charge unité présente entre ses armatures une différence de potentiel égale à l'unité. Dans les systèmes gaussien et C.G.S.E., selon la formule (26.2), l'unité de capacité correspond à la capacité d'une bille isolée de rayon égal à 1 cm et placée dans le vide. Dans ces systèmes la dimension de la capacité se confond avec la dimension d'une longueur. C'est pour cela que l'unité de capacité est le *centimètre*. L'unité pratique de capacité est le *farad*. Le farad est la capacité d'un condensateur entre les armatures duquel apparaît une différence de potentiel de 1 volt lorsqu'il est chargé d'une quantité d'électricité égale à 1 coulomb. De toute évidence

$$1\text{F} = \frac{1\text{C}}{1\text{V}} = \frac{3\cdot 10^9 \text{ un. ch. C.G.S.E.}}{\frac{1}{300} \text{ un. pot. C.G.S.E.}} = 9\cdot 10^{11} \text{ cm}.$$

Pour qu'une sphère isolée placée dans le vide possède une capacité de 1 F, il faut que son rayon soit égal à $9\cdot 10^{11}$ cm $= 9\cdot 10^6$ km. C'est donc une très grande capacité et en pratique on utilise le *microfarad*, qui est égal au millionième du farad, et le *picofarad* qui est égal au millionième du microfarad. Une bille de 0,9 cm de rayon, placée dans le vide, possède une capacité de 1 picofarad.

4. *Capacité d'un condensateur sphérique.* Les armatures sont des sphères de rayon R_1 pour la sphère intérieure et de rayon R_2 pour la sphère extérieure (fig. 73). Entre ces armatures s'établit la différence de potentiel

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

La capacité du condensateur est

$$C = \frac{\varepsilon}{1/R_1 - 1/R_2} = \varepsilon\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}. \tag{26.5}$$

Si la distance des armatures $d = R_2 - R_1$ est petite devant les rayons R_1 et R_2, les aires des armatures sont peu différentes et approximativement égales à $S \approx 4\pi R_1^2 \approx 4\pi R_2^2 \approx 4\pi R_1R_2$. La capacité est alors

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}. \tag{26.6}$$

Cette formule est la même que la formule donnant la capacité d'un condensateur plan que l'on établit ci-après.

5. *Capacité d'un condensateur plan.* Le champ entre les armatures du condensateur est presque partout uniforme (fig. 74), n'étant perturbé que près des bords. Nous négligerons cependant cet *effet de bord* dans le calcul de la capacité du condensateur plan. On peut le

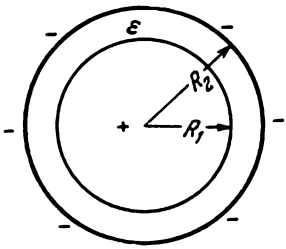


Fig. 73

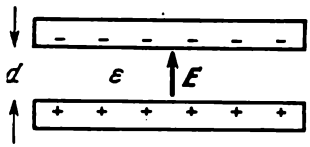


Fig. 74

faire tant que la distance d entre les armatures est très petite devant leurs dimensions linéaires. En notant σ la densité superficielle d'électricité sur l'armature positive et S l'aire de celle-ci, on a $q = \sigma S$. L'intensité du champ électrique est $E = 4\pi\sigma/\varepsilon$, la différence de potentiel est $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = 4\pi\sigma d/\varepsilon$, et la capacité du condensateur est donc

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}.$$

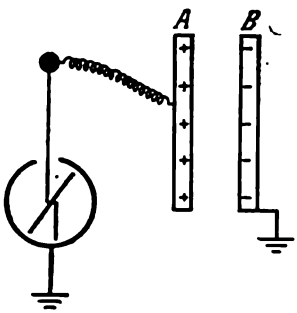


Fig. 75

Les effets de bord imposent des termes correctifs, mais nous omettrons de les préciser.

Considérons un condensateur à air constitué de deux plaques, l'une fixe A et l'autre mobile B (fig. 75). Relions la plaque B à la terre, isolons la plaque A et relions-la à la boule d'un électromètre. Communiquons une charge à la plaque A et commençons à déplacer la plaque B. Lorsque la distance entre les plaques augmente, l'aiguille de l'électromètre dévie plus fortement, et lorsque cette distance diminue, la déviation de l'aiguille devient plus faible. La raison en est que lorsque la distance entre les plaques augmente, la capacité du condensateur diminue. Comme l'électromètre ne prend qu'une quantité d'électricité négligeable, la charge q de la plaque A ne varie pratiquement pas, la différence de potentiel $\varphi = q/C$ augmente et c'est ce qu'indique l'électromètre. Lorsque les plaques se rapprochent l'une de l'autre, la capacité augmente et la différence de potentiel diminue.

Cet effet se laisse interpréter aussi par application de la loi de Coulomb. Lorsqu'on relie la plaque chargée A à l'électromètre, une

partie de la charge s'écoule sur celui-ci. La charge restante est retenue par le champ électrique de la plaque B. Lorsque la plaque B s'approche de la plaque A, le champ augmente et une partie de la charge de l'électromètre passe sur la plaque A, de sorte que la déviation de l'aiguille de l'électromètre diminue. Cette explication montre que l'effet observé résulte de l'effet de bord. L'intensité de champ entre des plaques infinies ne dépend pas de leur distance de séparation; mais pour des plaques de dimensions finies, cela n'est plus vrai, surtout à proximité du bord. Lorsque la plaque de dimension finie B s'approche de la plaque A, celle-ci acquiert des charges induites de signe contraire, tandis que la boule et l'aiguille de l'électromètre acquièrent des charges de même signe. Ce déplacement des charges fait varier infiniment peu la charge du condensateur et l'intensité du champ entre les plaques; mais ces variations sont cependant suffisantes pour que la charge de l'électromètre et la différence de potentiel correspondante varient notablement.

Si en maintenant constante la distance entre les plaques A et B on introduit entre celles-ci une lame de diélectrique, l'électromètre indiquera une différence de potentiel plus petite. Cette expérience fut réalisée par Faraday, ce qui lui permit de mettre en évidence l'influence d'un *milieu intermédiaire* sur le champ électrique existant entre deux corps électrisés. Le résultat que l'on obtient ainsi s'explique par une augmentation de la capacité du condensateur résultant de l'introduction du diélectrique entre ses armatures. On pourrait dire aussi que des charges induites apparaissent sur le diélectrique et que celles-ci font passer une partie de l'électricité de l'électromètre sur les armatures du condensateur. Dans la même expérience une feuille métallique se comporte comme un diélectrique de permittivité ε infiniment grande et son introduction entre les plaques équivaut à une diminution de la distance d entre les armatures du condensateur.

Cette expérience peut être réalisée aussi dans des conditions différentes (fig. 76). On relie les armatures d'un condensateur à air par l'intermédiaire d'un galvanomètre balistique aux pôles d'un élément galvanique qui maintient constante la différence de potentiel entre les armatures. Si on introduit entre les armatures une lame de diélectrique la capacité et la charge du condensateur devront augmenter. Le circuit sera alors parcouru par un bref courant électrique et le galvanomètre balistique accusera une déviation.

6. *Capacité d'un condensateur cylindrique.* Un condensateur cylindrique se compose de deux armatures cylindriques coaxiales entre lesquelles se trouve une couche de diélectrique (fig. 77). La bouteille de Leyde en est un exemple. Notons a et b les rayons des armatures intérieure et extérieure et l la longueur du condensateur. En négligeant les effets de bord

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln (b/a)}. \tag{26.7}$$

Lorsque la distance $d = b - a$ entre les armatures est petite devant a et b, cette formule, comme il est facile de s'en assurer, se ramène à la formule (26.6).

7. *Capacité de deux fils rectilignes parallèles.* Notons l la longueur de chaque fil, a et b leurs rayons et $2h$ la distance entre ces fils. En

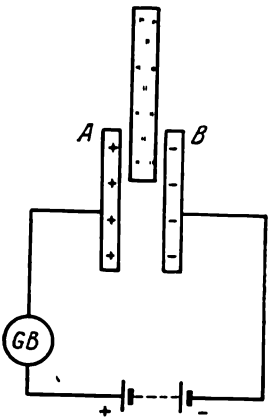


Fig. 76

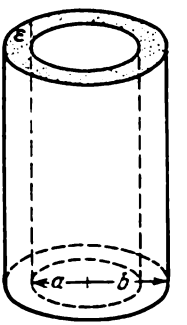


Fig. 77

posant $l \gg 2h \gg a$ et $2h \gg b$, on peut utiliser la formule (19.11) et écrire

$$\varphi = -2q \ln r_1/(\varepsilon l) + 2q \ln r_2/(\varepsilon l) + \text{const},$$

r_1 et r_2 étant les distances des fils jusqu'au point d'observation. En posant d'abord $r_1 = a$, $r_2 = 2h$, puis $r_1 = 2h$, $r_2 = b$, on trouvera les potentiels φ_1, φ_2 des fils ainsi que la différence de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$. On arrive ainsi à la formule donnant la capacité du système

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln \frac{4h^2}{ab}}. \tag{26.8}$$

Dans le cas particulier où $a = b$

$$C = \frac{\varepsilon l}{4 \ln (2h/a)}. \tag{26.9}$$

A l'aide de la méthode des réflexions par rapport à un miroir, on déduit de cette formule une expression de la capacité d'un fil cylindrique rectiligne suspendu au-dessus d'un plan conducteur infini (fil télégraphique suspendu au-dessus du sol). Si le fil est parallèle au plan et la distance entre eux est égale à h, la capacité sera

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \ln (2h/a)}, \tag{26.10}$$

donc deux fois plus grande que dans le cas précédent.

8. Les condensateurs sont souvent associés en batteries. Le montage peut être réalisé soit *en parallèle* (fig. 78), soit *en série* (fig. 79). On utilise aussi un *montage mixte* (série-parallèle). Pour simplifier on ne considérera que le cas de deux condensateurs. Dans le cas d'un montage en parallèle, les différences de potentiel entre les armatures des deux condensateurs sont égales, tandis que leurs charges s'ad-

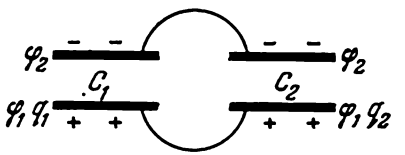


Fig. 78

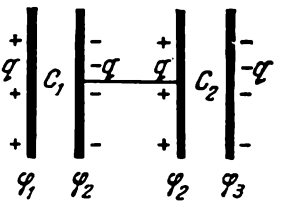


Fig. 79

ditionnent : $q = q_1 + q_2$. En divisant par la différence de poteniel totale $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, on trouve la capacité de cette batterie :

$$C = C_1 + C_2. \tag{26.11}$$

Dans le cas d'un montage en série, les armatures médianes reliées entre elles sont électrisées par influence, de sorte qu'elles portent des charges égales et de signes contraires. Ainsi les charges des deux condensateurs sont égales. Les différences de potentiel s'additionnent :

$$\varphi_1 - \varphi_3 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3).$$

Comme d'autre part

$$\varphi_1 - \varphi_3 = q/C, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = q/C_1, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = q/C_2,$$

on obtient

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \tag{26.12}$$

Il est facile de généraliser les formules (26.11), (26.12) au cas de plusieurs condensateurs. On utilise le montage en parallèle pour augmenter la capacité du condensateur. Le montage en série est utilisé dans les cas où pour éviter la décharge disruptive on cherche à répartir une grande différence de potentiel entre plusieurs condensateurs.

9. Appliquons la formule (26.12) au calcul de la capacité d'un *condensateur plan stratifié*. Le condensateur est constitué de deux armatures métalliques parallèles entre lesquelles se trouvent plusieurs couches planes de diélectriques différents (fig. 80). Imaginons qu'on introduise entre les couches de diélectriques des feuilles mé-

talliques infiniment minces. Ni les charges sur les armatures, ni les intensités des champs électriques régnant dans les diélectriques n'en seront affectées. Ainsi, ni la différence de potentiel entre les armatures, ni la capacité du condensateur ne changent pas. Cependant l'introduction des feuilles métalliques transforme le condensateur stratifié en une batterie de plusieurs condensateurs montés en série. En appliquant les formules (26.6) et (26.12) on trouve

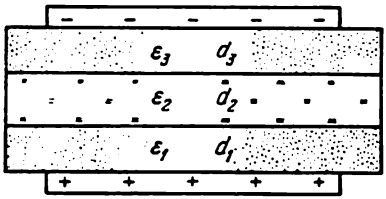


Fig. 80

$$\frac{1}{C}=\frac{4\pi}{S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}+\ldots\right), \qquad (26.13)$$

où d_1, d_2, ... sont les épaisseurs des couches de diélectriques et ε_1, ε_2, ... leurs permittivités.

PROBLÈMES

1. On réalise une batterie avec trois condensateurs de capacités $C_1 = 2\mu F$, $C_2 = 2\mu F$, $C_3 = 4\mu F$ auxquels on peut appliquer les tensions limites: $V_1 = 1000$ V, $V_2 = 450$ V et $V_3 = 250$ V. Quel montage permet d'assurer la plus haute tension? Quelle est la valeur de cette tension et quelle est la capacité correspondante de la batterie?

Réponse. Pour le montage en série; $V = 1125$ V; $C = 0{,}8\mu F$.

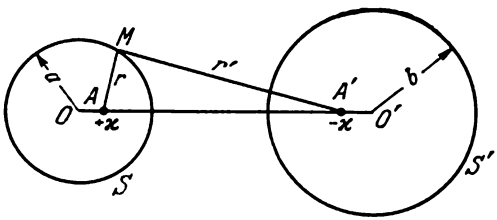


Fig. 81

2. Calculer la capacité de l'unité de longueur de deux cylindres circulaires, parallèles et infiniment longs, de rayons a et b, dont les axes se trouvent à une distance l l'un de l'autre.

Solution. Considérons deux droites parallèles A et A' infiniment longues et uniformément chargées d'électricité de signes contraires (fig. 81). Les surfaces équipotentielles seront représentées par des cylindres circulaires (voir problème 9 du § 19). Notons S et S' deux cylindres extérieurs l'un à l'autre. Caractérisons les positions des axes O et O' de ces surfaces cylindriques par les conditions $OA \cdot OA' = a^2$, $O'A' \cdot O'A = b^2$ (cf. § 23, pt. 3). Les potentiels des surfaces S et S' seront

$$\varphi=\frac{2\varkappa}{\varepsilon}\ln\frac{a}{d}, \qquad \varphi'=-\frac{2\varkappa'}{\varepsilon}\ln\frac{b}{d'},$$

où $d = OA$, $d' = O'A'$. Si les charges $\varkappa$ et $\varkappa'$ étaient transférées des lignes A et A' sur les surfaces cylindriques S et S', le champ à leur intérieur deviendrait

nul, mais le champ extérieur ne changerait pas. On arrive ainsi à la distribution des charges imposée par l'énoncé du problème. Ayant calculé la différence de potentiel $\varphi - \varphi'$ on trouve la capacité par unité de longueur

$$C = \frac{\varepsilon}{2 \ln \frac{ab}{dd'}} \tag{26.14}$$

Pour déterminer d et d' on dispose des équations

$$d(l - d') = a^2, \quad d'(l - d) = b^2,$$

d'où on trouve

$$d = \frac{l^2 + a^2 - b^2 - \sqrt{(l^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2l^2}}{2l},$$
$$d' = \frac{l^2 + b^2 - a^2 - \sqrt{(l^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2l^2}}{2l} \tag{26.15}$$

Considérons maintenant le cas où le cylindre S' est contenu tout entier dans le cylindre S (fig. 82). Les raisonnements, les calculs et la formule finale (26.14) restent les mêmes que ci-dessus, mais le calcul de $d = OA$ et de $d' = O'A'$ se fait à l'aide des équations

$$d'(d - l) = b^2, \quad d(d' + l) = a^2$$
$$(a > b > l).$$

On en déduit

$$d = \frac{a^2 - b^2 - l^2 + \sqrt{(a^2 - b^2 - l^2)^2 - 4a^2l^2}}{2l},$$
$$d' = \frac{a^2 - b^2 - l^2 - \sqrt{(a^2 - b^2 - l^2)^2 - 4b^2l^2}}{2l}. \tag{26.16}$$

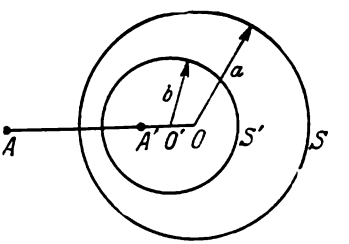


Fig. 82

3. Montrer que dans le cas de cylindres de faibles rayons la formule (26.14) se ramène à la formule (26.8) et la formule correspondant aux cylindres coaxiaux se ramène à la formule (26.7).

4. Trouver l'expression de la capacité d'un ellipsoïde.

Réponse.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^\infty [(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)]^{-1/2} d\lambda. \tag{26.17}$$

Pour un ellipsoïde de révolution allongé

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2ae\varepsilon} \ln \frac{1+e}{1-e}, \tag{26.18}$$

et pour un ellipsoïde aplati

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2ae\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{26.19}$$

où e est l'excentricité de l'ellipsoïde.

§ 27. Coefficients de potentiel et de capacité

1. Considérons un système de n conducteurs chargés fixes et supposons que l'espace qui les sépare est rempli d'un diélectrique fixe homogène ou non homogène. Un tel système est appelé *condensateur composé*. Supposons qu'il n'y ait pas de charges libres dans le diélectrique et démontrons que dans ces conditions les potentiels des conducteurs seront des *fonctions linéaires homogènes* de leurs charges. On posera comme d'usage que le potentiel du champ est nul à l'infini.

Supposons d'abord qu'aucun des conducteurs n'est chargé. Communiquons ensuite une charge unité au seul i-ème conducteur. De ce fait le champ électrique $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$, le potentiel $V_i(\boldsymbol{r})$ et l'induction $\boldsymbol{D}_i = \varepsilon(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$ seront univoquement déterminés dans tout l'espace. D'après le théorème de Gauss le flux du vecteur $\boldsymbol{D}_i$ à travers la surface du i-ème conducteur sera égal à 4π et le flux à travers les surfaces de tous les autres conducteurs sera nul. Notons V_{ji} la valeur du potentiel $V_i(\boldsymbol{r})$ à l'endroit où se trouve le j-ième conducteur. Les valeurs des coefficients V_{ji} ne dépendent que de la forme, des positions des conducteurs et de la permittivité du diélectrique se trouvant entre les conducteurs. On les appelle *coefficients de potentiel*. Comme les équations de l'électrostatique sont linéaires et homogènes, toute combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$ et $\boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{r})$ à coefficients q_i constants, i.e.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r}), \tag{27.1}$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \varepsilon \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \boldsymbol{D}_i(\boldsymbol{r}), \tag{27.2}$$

vérifie ces équations. En effet le vecteur $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ dérive d'un potentiel puisque tous les champs $\boldsymbol{E}_i(\boldsymbol{r})$ sont à potentiel. Dans un diélectrique le vecteur $\boldsymbol{D}$ satisfait à l'équation $\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$ puisque $\operatorname{div} \boldsymbol{D}_i = 0$. Enfin dans les conducteurs $\boldsymbol{E} = 0$. Ainsi les expressions de $\boldsymbol{E}$ et de $\boldsymbol{D}$ peuvent être considérées comme définissant l'intensité et l'induction d'un certain champ électrostatique. Les charges qui excitent ce champ ne peuvent se trouver dans la masse du diélectrique puisque $4\pi\rho = \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$. Il nous faut donc mettre en évidence la signification physique des coefficients constants q_i que nous avons introduits tout formellement. Pour y arriver, remarquons d'abord que d'après le théorème de Gauss la charge se trouvant sur la surface du i-ème conducteur est égale à

$$Q_i = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_i} (\boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S}) = \frac{1}{4\pi} \sum_j q_j \oint_{S_i} (\boldsymbol{D}_j\, d\boldsymbol{S}) = \frac{q_i}{4\pi} \oint_{S_i} (\boldsymbol{D}_i\, d\boldsymbol{S}) = q_i.$$

En vertu du théorème d'unicité on peut donc affirmer que l'expression (27.1) définit le champ électrostatique créé par le système de n

conducteurs portant respectivement les charges $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Le potentiel du champ (27.1) est donné par l'expression

$$\varphi(r) = \sum_{j=1}^{n} q_j V_j(r). \tag{27.3}$$

En plaçant le point r sur la surface du i-ème conducteur, on détermine le potentiel de ce dernier:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} V_{ij} q_j. \tag{27.4}$$

En résolvant ces équations par rapport à q_i on trouve

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \varphi_j. \tag{27.5}$$

Les constantes C_{ij} sont les *coefficients de capacité* *). Tout comme les coefficients de potentiel, les coefficients de capacité ne dépendent que de la grandeur, de la forme et de la position des conducteurs, ainsi que de la permittivité du milieu intermédiaire. Nous démontrerons au § 28 que les coefficients de capacité et les coefficients de potentiel sont symétriques, i.e. $C_{ij} = C_{ji}$, $V_{ij} = V_{ji}$.

Ainsi *les charges des conducteurs sont des fonctions linéaires et homogènes de leurs potentiels et ces derniers sont à leur tour des fonctions linéaires et homogènes des charges.*

Si le diélectrique occupant l'espace entre les conducteurs est homogène, tous les coefficients de capacité C_{ik} seront proportionnels à sa permittivité ε.

Dans le cas des condensateurs le nombre des conducteurs (les armatures) est égal à deux. On a donc

$$q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2, \quad q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2,$$

avec $q_2 = -q_1$. En résolvant ces équations par rapport à φ_1 et φ_2, on trouve la différence de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$ et la capacité du condensateur:

$$C = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}{C_{11} + C_{22} + C_{12} + C_{21}}. \tag{27.6}$$

2. Il est utile de noter certaines propriétés des coefficients de potentiel et des coefficients de capacité. Sans entrer dans les développements mathématiques, nous nous contenterons de considérations physiques intuitives mais cependant suffisamment convaincantes.

Tous les coefficients de potentiel V_{ij} sont positifs. En effet, si on communique au j-ième conducteur une charge positive q, les autres conducteurs n'étant

*) Dans les anciennes publications les coefficients C_{ij} étaient désignés sous le nom de *coefficients de capacité* lorsque $i = j$, et de *coefficients d'induction* lorsque $i \neq j$. Nous renonçons à cette terminologie désuète.

pas chargés, il tombe sous le sens que le potentiel sera positif en n'importe quel point de l'espace : $\varphi_i = V_{ij}q$. Comme φ_i est positif, V_{ij} doit l'être aussi.

Il est aussi évident que c'est le conducteur chargé qui présente le potentiel maximal. i.e. $\varphi_j > \varphi_i$. Il s'ensuit que $V_{jj} > V_{ij}$ $(i \neq j)$.

Les coefficients de capacité C_{ij} ayant mêmes indices sont positifs, et ceux dont les indices sont différents sont négatifs. Mettons à la terre tous les conducteurs, sauf le i-ème. On aura alors $q_i = C_{ii}\varphi_i$. Les grandeurs q_i et φ_i doivent être de même signe, par suite $C_{ii} > 0$. Mettons à la terre tous les conducteurs sauf le i-ème et le j-ième ; communiquons au conducteur i la charge positive q_i et laissons le conducteur j non chargé. Les potentiels φ_i et φ_j seront alors positifs avec $q_j = 0 = C_{ji}\varphi_i + C_{jj}\varphi_j = 0$. Cette égalité n'est vérifiée que si $C_{ji} < 0$.

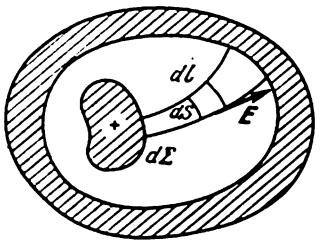


Fig. 83

Démontrons enfin que $\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \geqslant 0$. Supposons que le i-ème conducteur portant une charge positive q_i soit entouré de tous côtés d'une enveloppe conductrice fermée de forme arbitraire et mise à la terre (fig. 83). D'après le théorème de Faraday, une charge induite négative doit apparaître sur l'enveloppe : $q' = -q_i$. Déplaçons à l'infini certaines parties de l'enveloppe afin que ce qui en reste constitue un système de $n - 1$ conducteurs mis à la terre et portant les charges $q_1, q_2, \ldots, q_{i-1}, q_{i+1}, \ldots, q_n$. En valeur absolue la somme de ces charges est plus petite que q_i. Compte tenu des signes, on peut écrire $\sum_{j=1}^{n} q_j \geqslant 0$. En substituant $q_j = C_{ji}\varphi_i$ et en remarquant que $\varphi_i > 0$, on obtient le résultat escompté

PROBLÈMES

1. On approche d'un conducteur isolé portant une charge positive un autre conducteur isolé mais non chargé. Montrer que dans ce cas les potentiels des deux conducteurs doivent augmenter et la différence de potentiel entre eux doit diminuer. Examiner aussi le cas où le premier conducteur portait une charge négative.

2. On communique des charges successives à un conducteur en l'approchant d'une plaque dont la charge Q est à chaque fois rétablie à l'aide d'un générateur. Soit q_1 la charge communiquée au conducteur après la première opération. Déterminer la charge q du conducteur après un très grand nombre d'opérations de charge.

Solution. Lorsqu'on approche le conducteur de la plaque, la charge totale se répartit dans un rapport déterminé entre ces corps. A la première approche le conducteur acquiert la charge q_1, la charge de la plaque est alors égale à $Q - q_1$. Si on répète un grand nombre de fois l'opération de charge, les mises en contact ultérieures du conducteur et de la plaque ne modifieront pratiquement plus la charge du conducteur. La charge de la plaque ne variera pas non plus et sera toujours égale à Q, puisque la plaque est rechargée par le générateur. La charge q se laisse déterminer à l'aide du rapport

$$\frac{q}{Q} = \frac{q_1}{Q - q_1}.$$

3. Trois boules métalliques isolées parfaitement identiques sont disposées aux sommets d'un triangle équilatéral. On touche successivement chacune des

boules avec un fil relié à un conducteur chargé se trouvant à grande distance et dont le potentiel est inconnu mais est maintenu constant. Après cette opération les deux premières boules portent les charges q_1 et q_2. Trouver la charge q_3 de la troisième boule.

Solution. Par raison de symétrie $V_{11} = V_{22} = V_{33} = A$, $V_{12} = V_{21} = V_{23} = B$. Lorsqu'on charge la première boule, on lui communique le potentiel $\varphi_1 = Aq_1$. Lors de la charge des deux autres boules, le potentiel de la première varie, mais sa connaissance n'est pas requise pour résoudre le problème. Lors de la charge de la deuxième boule, le potentiel de celle-ci devient égal aussi à $\varphi_1 = Aq_2 + Bq_1$. De même pour la troisième boule : $\varphi_1 = Aq_3 + B(q_1 + q_2)$. Par conséquent

$$Aq_1 = Aq_2 + Bq_1 = Aq_3 + B(q_1 + q_2),$$

d'où

$$q_3 = \frac{q_2^2}{q_1}.$$

4. Quatre boules métalliques isolées absolument identiques sont disposées aux sommets d'un tétraèdre régulier. On touche successivement chacune des boules avec un fil fin relié à un conducteur chargé se trouvant à grande distance et dont le potentiel est inconnu mais est maintenu constant. Après ces opérations les charges de la première et de la deuxième boule sont respectivement égales à q_1 et q_2. Déterminer les charges des deux autres boules.

Réponse. $q_3 = q_2^2/q_1$, $q_4 = q_2^3/q_1^2$.

§ 28. L'énergie électrique

1. Comme toute autre forme d'énergie, l'énergie électrique ne dépend que de l'*état du système* ; elle ne dépend pas du procédé qui avait été mis en œuvre pour amener le système dans l'état considéré. Calculons d'abord l'énergie d'un condensateur chargé. Cette énergie dépend de façon univoque des charges que portent ses armatures ou de la différence de potentiel entre les armatures. Le procédé de charge n'exerce aucune influence sur la valeur de l'énergie. Utilisons un procédé de charge tel que les calculs soient simples. Tant que le condensateur n'est pas chargé, chacune de ses armatures porte un mélange en quantités égales d'électricité positive et négative. Transportons l'électricité positive par portions infiniment petites dq de l'armature négative sur l'armature positive. Pour effectuer ce transfert, on doit fournir du travail contre le champ électrique

$$\delta A^{\text{ext}} = \varphi\, dq,$$

où φ est la différence de potentiel instantanée entre les armatures. Le travail du condensateur sera égal mais de signe contraire :

$$\delta A = -\varphi\, dq. \tag{28.1}$$

La charge du condensateur peut donner lieu à un dégagement ou à une absorption de chaleur, ainsi qu'à une variation de la densité du diélectrique. Dans la plupart des cas, ces effets sont insignifiants, aussi n'en tiendrons-nous pas compte pour l'instant. Le travail δA^{ext} est alors entièrement utilisé à accroître l'énergie électrique W du

condensateur, i.e.

$$dW = \varphi\, dq = \frac{q\, dq}{C}. \tag{28.2}$$

Si, conformément à nos hypothèses, ni la température ni la densité du diélectrique ne varient lors de la charge, la permittivité ε du diélectrique et la capacité C du condensateur restent également constantes. L'intégration de (28.2) donne alors

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{1}{2} C\varphi^2. \tag{28.3}$$

2. Nous allons donner maintenant une méthode de calcul générale de l'énergie électrique. Considérons plusieurs corps portant les charges $q_1, q_2, \ldots$ et dont les potentiels sont $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$; l'espace entre ces corps est occupé par un diélectrique fixe (homogène ou non homogène). Par $q_1, q_2, \ldots$ on entend ici uniquement les charges *libres* et non pas les charges de polarisation. Les corps qui portent ces charges peuvent être des conducteurs ou des diélectriques. Les conducteurs peuvent avoir des dimensions arbitraires, tandis que les corps diélectriques doivent être suffisamment petits pour que leurs potentiels puissent être considérés comme constants en tous les points de ces corps. Cette condition est toujours réalisable puisqu'on peut subdiviser en pensée chacun des diélectriques en parties suffisamment petites et assimiler ces parties à des corps distincts. Prenons pour état initial l'état des corps non chargés et commençons à transférer des charges puisées à l'infini par portions infiniment petites sur chacun des corps en présence. En raisonnant comme nous l'avons fait dans le cas du condensateur, on trouve

$$W = \int \sum_i \varphi_i'\, dq_i',$$

la sommation s'étendant à tous les corps chargés. On a doté les symboles φ_i et q_i de primes afin d'indiquer que ce sont des grandeurs *variables*, i.e. qui varient pendant la charge des corps. Le calcul de l'intégrale est rendu facile par le fait que sa valeur *ne dépend pas du procédé de charge*. Soient q_i et φ_i la charge et le potentiel du i-ème corps à l'état final. Réalisons la charge de manière qu'à tout instant les charges variables q_i' soient proportionnelles à leurs valeurs finales q_i :

$$q_i' = kq_i,$$

où k est une quantité variable, la même pour toutes les charges q_i. Cette quantité augmente pendant la charge depuis la valeur initiale $k = 0$ jusqu'à la valeur finale $k = 1$. Comme nous supposons que la relation entre $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$ est linéaire ($\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$) l'accroissement de toutes les charges d'un nombre donné de fois entraîne un accroisse-

ment de tous les potentiels du même nombre de fois. On peut écrire donc

$$\varphi_i' = k\varphi_i.$$

Ainsi la seule variable déterminant lors de la charge les valeurs instantanées des charges et des potentiels est maintenant la quantité k. Nous la choisirons donc comme variable d'intégration. De toute évidence $dq_i' = q_i dk$ et par suite

$$W = \sum \varphi_i q_i \int_0^1 k\, dk.$$

Après intégration on obtient

$$W = \frac{1}{2} \sum \varphi_i q_i. \tag{28.4}$$

La restriction concernant les dimensions des corps diélectriques et introduite lors de la déduction de la formule (28.4) peut être levée en écrivant cette formule sous la forme

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi\rho\, dV + \frac{1}{2} \int \varphi\sigma\, dS, \tag{28.5}$$

où ρ est la densité spatiale et σ la densité superficielle d'électricité (libre). Sous cette forme la formule est valable quelle que soit la distribution spatiale des milieux conducteurs et diélectriques. L'intégration doit être étendue à toutes les charges libres.

3. Considérons maintenant le cas particulier où toutes les charges se trouvent sur des conducteurs. On utilisera alors l'expression pour W sous la forme (28.4). Les dimensions et la répartition spatiale des conducteurs peuvent être quelconques. Dans le cas particulier du condensateur il n'y a que deux conducteurs dont les charges sont égales et de signes contraires. La formule (28.4) se ramène alors à la formule (28.3). Supposons maintenant que le nombre de conducteurs est quelconque. Si les charges sur les conducteurs reçoivent des accroissements infiniment petits δq_i, les potentiels φ_i changent eux aussi. L'énergie électrique varie alors de

$$\delta W = \frac{1}{2} \sum \varphi_i\, \delta q_i + \frac{1}{2} \sum q_i \delta\varphi_i.$$

Mais comme cet accroissement est égal à $\delta A^{\text{ext}} = \sum \varphi_i \delta q_i$ on trouve en égalant les deux expressions

$$\sum \varphi_i \delta q_i = \sum q_i \delta\varphi_i. \tag{28.6}$$

A l'aide de cette relation on démontre aisément que les coefficients de potentiel V_{ij} et les coefficients de capacité C_{ij} sont symétriques. Pour simplifier la démonstration nous supposerons que seuls les i-èmes et les j-ièmes conducteurs sont chargés et que le potentiel

φ_j est maintenu constant. On écrira alors

$$\varphi_i \delta q_i + \varphi_j \delta q_j = q_i \delta \varphi_i. \tag{28.6a}$$

D'autre part

$$q_i = C_{ii}\varphi_i + C_{ij}\varphi_j, \quad q_j = C_{ji}\varphi_i + C_{jj}\varphi_j.$$

Comme φ_j est constant

$$\delta q_i = C_{ii}\delta\varphi_i, \quad \delta q_j = C_{ji}\delta\varphi_i.$$

En portant ces expressions dans (28.6a) on trouve

$$C_{ij} = C_{ji}. \tag{28.7}$$

On en déduit ainsi que $V_{ij} = V_{ji}$. Ce dernier résultat se laisse obtenir directement de (28.6).

4. Tenons compte maintenant de ce que la polarisation du diélectrique résultant de l'excitation dans celui-ci d'un champ électrique peut s'accompagner d'une *variation de température* du diélectrique et de l'apparition dans celui-ci de *forces mécaniques* et de *contraintes élastiques*. De ce fait la permittivité diélectrique ε des corps diélectriques peut varier durant leur charge, puisqu'elle dépend de leur température et de leur densité. Cette circonstance n'invalide en rien l'expression du travail élémentaire (28.1). Mais comme l'intégration de (28.1) avait été effectuée en supposant que ε était *constant*, il est évident qu'en procédant ainsi on ne saurait arriver à une expression de l'énergie électrique interne du système. Or les expressions (28.3) à (28.5) définissent une grandeur physique tout aussi importante, à savoir l'*énergie libre du système* ou plus précisément la partie de l'énergie libre liée à l'électrisation des corps. Pour le démontrer faisons passer le système de l'état initial à l'état final en deux étapes successives. Lors de la première étape, en l'absence de tout champ électrique, déformons les corps et communiquons-leur une quantité de chaleur juste suffisante pour que la répartition de la température et de la densité y soit la même que dans l'état final. Notons $\Psi_{\text{élast}}$ l'accroissement correspondant de l'énergie libre du système. De toute évidence cet accroissement ne dépend pas du champ électrique. Si nous communiquons maintenant aux corps du système de l'électricité par portions infiniment petites en maintenant invariables la température et la densité en tout point de l'espace, la permittivité diélectrique du milieu n'en sera pas affectée. Par conséquent, on peut appliquer à cette étape le procédé de calcul du travail que nous avons mis en œuvre pour établir les formules (28.3) et (28.5). Mais la thermodynamique enseigne que le travail extérieur fourni lors d'une transformation quasi statique isotherme est utilisé pour accroître l'énergie libre du système. On en conclut que lors de la deuxième étape l'accroissement de l'énergie libre du système est $\Psi_{\text{él}} = W$. Si on convient de poser qu'à l'état initial l'énergie libre

du système était égale à zéro, l'énergie totale libre du système dans l'état final se laisse exprimer par

$$\Psi = \Psi_{\text{élast}} + W. \tag{28.8}$$

Le premier terme du second membre représente la composante *élastique* de l'énergie libre et le second terme sa composante *électrique*.

§ 29. Localisation spatiale de l'énergie électrique

1. Les formules (28.3) et (28.5) expriment l'énergie électrique en termes de *charges* et de *potentiels* électriques. Mais on peut tout aussi bien exprimer l'énergie électrique en fonction de l'*intensité* et de l'*induction du champ électrique*. Faisons ce calcul en considérant d'abord un condensateur plan à diélectrique homogène. Nous négligerons les perturbations du champ électrique dues aux effets de bord. En notant l la distance entre les armatures, on a $\varphi = El$. D'autre part, $q = \sigma S = SD_n/4\pi$ et par suite $dq = S\,dD_n/4\pi$. En portant ces expressions dans les formules (28.1) et (28.2) on obtient

$$\delta A = -\frac{V}{4\pi}(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D}), \tag{29.1}$$

$$W = V\int \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D}), \tag{29.2}$$

où $V = Sl$ est le volume du condensateur. Si la relation $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ est valable, l'intégration est aisée et donne

$$W = \frac{V}{8\pi}\varepsilon E^2 = \frac{V}{8\pi}(\boldsymbol{ED}) = \frac{V}{8\pi\varepsilon}D^2. \tag{29.3}$$

3. Etendons maintenant le calcul au cas d'un condensateur de forme arbitraire (cf. fig. 83). Divisons la surface de l'armature positive en éléments de surface $d\Sigma$ et faisons passer des lignes de force par les frontières entre ces éléments de surface afin de subdiviser l'espace compris entre les armatures en tubes de force dont un est représenté sur la figure 83. La charge que porte l'armature positive est donnée par l'intégrale $q = \int \sigma d\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int D_n d\Sigma$ prise sur sa surface. Comme il n'y a pas de charges électriques à l'intérieur des tubes de force, le flux du vecteur $\boldsymbol{D}$ à travers la section droite d'un tube de force est le même sur toute sa longueur. En choisissant arbitrairement la position de la section droite dS on écrira $D_n d\Sigma = D_l\,dS$, D_l étant la projection du vecteur $\boldsymbol{D}$ sur la direction de la ligne de force passant par le point considéré. En exprimant la différence de potentiel entre les armatures par l'intégrale prise le long d'une ligne de force, on arrive à mettre l'expression (28.3) sous la forme suivante:

$$W = \frac{1}{2}\varphi q = \frac{1}{2}\int E\,dl\cdot\frac{1}{4\pi}D_l\,dS.$$

Puisque $dldS = dV$, cette intégrale se réduit à l'intégrale de volume

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (ED)\, dV = \int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} dV \tag{29.4}$$

que l'on étend à la totalité de l'espace compris entre les armatures du condensateur.

3. La démonstration que nous venons de donner de la formule (29.4) suppose que le diélectrique ne renferme pas de charges libres. La démonstration générale de cette formule se fonde sur la formule (8.3) de Gauss-Ostrogradski. Supposons d'abord qu'il n'y a pas de charges superficielles dans l'espace considéré. Dans ce cas les vecteurs E et D seront continus et on peut donc les différentier. En portant dans (29.4) $E = -\operatorname{grad} \varphi$ et en utilisant l'identité $\operatorname{div}(\varphi D) = \varphi \operatorname{div} D + D \operatorname{grad} \varphi$, ainsi que le théorème de Gauss (13.5), on obtient

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(\varphi D)\, dV + \frac{1}{2} \int \varphi\rho\, dV,$$

l'intégration étant étendue à tout l'espace infini. La première intégrale du second membre est nulle; pour le démontrer entourons tous les corps chargés d'une surface sphérique éloignée S délimitant un volume V. D'après la formule de Gauss-Ostrogradski

$$\int_V \operatorname{div}(\varphi D)\, dV = \oint_S \varphi\, (D\, dS).$$

Si le rayon r de l'enveloppe sphérique S est assez grand et si la charge totale qu'elle englobe reste finie, on peut assimiler, dans le calcul du champ sur la surface S, cette charge totale à une charge ponctuelle dont le potentiel décroît en raison inverse de r, et l'induction D en raison inverse de r^2. Si la charge totale est nulle, la décroissance de ces grandeurs est encore plus rapide. En tout cas le taux de décroissance du produit φD en fonction de r est toujours supérieur à r^{-3}. La surface S de l'enveloppe sphérique croît plus lentement, proportionnellement à r^2. Il est évident que l'intégrale prise sur la surface S et donc l'intégrale étendue au volume V s'annulent à la limite où $r \to \infty$, ce qu'il fallait démontrer. Ainsi

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi\rho\, dV.$$

En introduisant la charge élémentaire $dq = \rho\, dV$, on peut écrire la relation précédente sous la forme

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi\, dq. \tag{29.5}$$

Il est maintenant inutile de procéder à une étude spéciale des charges superficielles, car il suffit de remarquer que toute surface chargée peut être considérée comme le cas limite d'une couche mince portant des charges en volume. La formule (29.5) est applicable à ces couches minces. En subdivisant les charges élémentaires dq en charges élémentaires volumiques $\rho\, dV$ et en charges élémentaires superficielles $\sigma\, dS$, on arrive au résultat suivant:

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi\rho\, dV + \frac{1}{2} \int \varphi\sigma\, dS, \tag{29.6}$$

qui n'est autre que la formule (28.5).

4. Nous avons démontré ainsi que les formules (29.6) et (29.4) sont équivalentes. La formule (29.6), qui exprime l'énergie W en fonction des *charges* et des *potentiels* des corps, cadre parfaitement avec la *théorie de l'action à distance*. La grandeur W se laisse interpréter comme l'*énergie potentielle des corps électrisés* s'attirant ou se repoussant mutuellement. La formule (29.4) correspond, elle, aux conceptions de la *théorie des champs* puisque l'énergie électrique y apparaît en fonction de l'*intensité* et de l'*induction du champ électrique régnant dans le diélectrique*. Ce type de dépendance conduit à l'idée que l'énergie électrique, tout comme les substances, est distribuée dans l'espace avec une densité spatiale

$$w = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}) = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} \tag{29.7}$$

ou

$$w = \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{D}. \tag{29.8}$$

Cette dernière expression est plus générale que la formule (29.7) puisqu'elle ne fait pas intervenir la relation $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ et n'implique que le fait que le vecteur $\boldsymbol{D}$ est une fonction univoque du vecteur $\boldsymbol{E}$, la forme de cette dépendance pouvant être quelconque.

Disposant ainsi de deux conceptions différentes de la localisation spatiale de l'énergie électrique, il importe de décider à quelle conception on doit donner la préférence. Dans le cadre de l'électrostatique il est en principe impossible d'imaginer une expérience qui permette de fixer son choix entre ces deux formules. Cela tient à ce qu'en électrostatique on ne peut dissocier le champ électrique des charges qui en sont la source, puisque la grandeur et la disposition des charges définissent *univoquement* le champ électrostatique. Inversement, si on connaît la distribution spatiale du champ, on définit de façon *univoque* la densité des charges électriques. La situation est tout autre dans le cas de champs alternatifs. Les champs électromagnétiques alternatifs peuvent exister *indépendamment des charges électriques qui les ont excités*. Les charges peuvent être neutralisées, tandis que le champ qu'elles avaient excité continuera à subsister sous forme d'ondes électromagnétiques auxquelles est liée une certaine réserve d'énergie. Cette réserve d'énergie ne peut être conçue comme l'énergie potentielle des charges électriques en interactions mutuelles à distance puisqu'il n'y a plus de charges. Ainsi la formule (29.6) perd toute signification, tandis que les formules (29.4), (29.7) et (29.8) restent valables dans le cas de champs électromagnétiques variables. On ne saurait affirmer sans étude approfondie que ces formules représentent toujours l'énergie électrique et sa densité, mais on ne peut cependant élever aucune objection contre la possibilité de représenter l'énergie électromagnétique en fonction des intensités des champs électrique et magnétique. Ce n'est que la forme concrète des formules exprimant

cette dépendance qui demande à être précisée. Ainsi, si on considère l'électrostatique comme le cas limite de l'électrodynamique, on devra donner la préférence, *même en électrostatique*, à la théorie des champs avec sa conception de la localisation spatiale de l'énergie.

5. Remarquons, pour conclure, que l'équivalence mathématique des formules (29.4) et (29.6) pour les champs statiques peut être utilisée pour démontrer l'*unicité* de la solution du problème électrostatique formulé au § 22, pt. 1. Supposons que ce problème admet plusieurs solutions et considérons-en deux: 1) $\boldsymbol{E}_1 = -\operatorname{grad}\varphi_1$, $\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon\boldsymbol{E}_1$; 2) $\boldsymbol{E}_2 = -\operatorname{grad}\varphi_2$, $\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon\boldsymbol{E}_2$. D'après le théorème de Gauss, $\operatorname{div}\boldsymbol{D}_1 = 4\pi\rho_1$, $\operatorname{div}\boldsymbol{D}_2 = 4\pi\rho_2$, avec $\rho_1 = \rho_2$, puisque d'après l'énoncé du problème la densité d'électricité libre dans le diélectrique est donnée. Par suite, $\operatorname{div}\boldsymbol{D}_1 = \operatorname{div}\boldsymbol{D}_2$. Considérons maintenant les différences entre les solutions: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Il est évident que $\operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0$, $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$, ce qui implique que les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$ vérifient les équations de l'électrostatique et représentent donc un certain champ électrostatique. Du fait de l'équivalence des formules (29.4) et (29.6) on peut écrire

$$\int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\, dV = \frac{1}{2}\int \varphi\rho\, dV + \frac{1}{2}\int \varphi\sigma\, dS.$$

La première intégrale du second membre est égale à zéro puisque $\rho = 0$. Il ne suffit de prendre l'intégrale de surface que sur les surfaces des conducteurs, puisque sur les surfaces des diélectriques $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = 0$. Comme le potentiel $\varphi^{(i)}$ de chacun des conducteurs est constant, l'intégrale de surface peut être représentée sous la forme

$$\int \varphi\sigma\, dS = \sum_i \varphi^{(i)} \oint_{S^{(i)}} \sigma\, dS = \sum \varphi^{(i)} q^{(i)},$$

où $q^{(i)} = q_1^{(i)} - q_2^{(i)}$ est la charge totale du i-ème conducteur. Si on se fixe le potentiel du i-ème conducteur, on a $\varphi^{(i)} = 0$ et si c'est sa charge qui est fixée, on a $q^{(i)} = 0$. Dans les deux cas $\varphi^{(i)}q^{(i)} = 0$. Ainsi

$$\int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\, dV = 0.$$

Etant donné que ε est positif, $E^2 = 0$. Il en résulte que $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2 = 0$, ce qui démontre l'unicité de la solution du problème électrostatique.

PROBLÈMES

1. Calculer l'énergie électrique d'une sphère de rayon a se trouvant dans le vide, sachant que la charge q de la sphère est répartie de façon uniforme sur sa surface.

Réponse.

$$W = q^2/(2a). \tag{29.9}$$

2. Même problème que ci-dessus pour une sphère dont la charge est uniformément répartie dans son volume.

Réponse.

$$W = 3q^2/(5a). \tag{29.10}$$

§ 30. Energie mutuelle des charges ponctuelles

1. Considérons les charges ponctuelles q_1 et q_2 se trouvant dans le vide à distance infinie l'une de l'autre. Pour les rapprocher à la distance r_{12}, on devra fournir le travail q_1q_2/r_{12}. L'énergie potentielle d'interaction des charges sera

$$U=\frac{q_1q_2}{r_{12}}. \tag{30.1}$$

Dans le cas où il y aurait plusieurs charges ponctuelles

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i\neq k}\sum\frac{q_iq_k}{r_{ik}}. \tag{30.2}$$

Le facteur 1/2 apparaît, car à la sommation l'énergie potentielle de chaque paire de charges intervient deux fois: une fois sous forme du terme q_iq_k/r_{ik} et une seconde fois sous forme du terme q_kq_i/r_{ki} qui est égal au premier. La formule (30.2) peut s'écrire comme suit:

$$U=\frac{1}{2}\sum\varphi_iq_i, \tag{30.3}$$

où φ_i est le potentiel au point où se trouve la charge i et qui est dû à toutes les autres charges:

$$\varphi_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_k}{r_{ik}}. \tag{30.4}$$

2. La formule (30.3) se présente sous une forme identique à celle de la formule (28.4) exprimant l'énergie électrique de conducteurs chargés. En fait ces formules sont essentiellement différentes: l'expression (28.4) peut en effet être transformée en l'intégrale de volume (29.4) qui est toujours positive, tandis que l'expression (30.3) n'admet pas une telle transformation puisqu'elle peut être positive ou négative. La formule (30.3) est négative dans le cas de deux charges ponctuelles de signes contraires. Chacune des charges q_i prise séparément possède de l'énergie électrique que l'on appelle *énergie propre* de la charge q_i; cette énergie propre représente l'énergie de répulsion de parties infiniment petites résultant d'une division en pensée de la charge ponctuelle considérée. On a tenu compte de cette énergie lors de la déduction de la formule (28.4), mais on n'en a pas tenu compte dans la formule (30.3). Dans le cas de la formule (30.3) chaque charge q_i avait été considérée comme un tout invariable et on n'avait tenu compte que du travail dépensé pour rapprocher ces charges invariables sans tenir compte du travail dépensé pour les créer. Dans le cas de la formule (28.4) on avait tenu compte du travail dépensé pour créer les charges q_i en accumulant des portions d'électricité infiniment petites que l'on transférait de l'infini. Par

suite la formule (28.4) caractérise l'*énergie électrique totale d'un système de charges*, tandis que la formule (30.3) ne représente que leur *énergie potentielle mutuelle*. Dans la formule (28.4) φ_i représente le potentiel du conducteur dû à la totalité des charges présentes et dans (30.3) φ_i est le potentiel dû à toutes les charges, la i-ème exceptée.

3. Pour mieux élucider cette question, considérons deux billes infiniment petites dont les dimensions sont invariables. Initialement ces billes ne portent pas de charges électriques et se trouvent à distance infinie l'une de l'autre ; l'électricité est distribuée dans tout l'espace infini avec une densité infiniment faible. Rassemblons maintenant toute l'électricité sur les billes. Comme elles se trouvent à distance infinie l'une de l'autre, elles n'exercent aucune influence mutuelle et tout le travail dépensé ne servira qu'à augmenter les énergies propres des billes. Ces énergies sont respectivement égales à :

$$W_1 = \frac{1}{8\pi} \int E_1^2 \, dV, \quad W_2 = \frac{1}{8\pi} \int E_2^2 \, dV.$$

Rapprochons les billes chargées l'une de l'autre, ce qui exige un travail $U = q_1 q_2 / r_{12}$ (la distance r_{12} entre les billes doit être infiniment grande par rapport à leurs dimensions). L'énergie électrique totale des billes sera

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E_1^2 \, dV + \frac{1}{8\pi} \int E_2^2 \, dV + U.$$

Mais on peut exprimer cette énergie d'une façon différente. Rapprochons les billes non chargées à la distance r_{12}, puis concentrons sur les billes l'électricité présente dans l'espace. On dépensera alors le travail

$$W = \frac{1}{8\pi} \int (E_1 + E_2)^2 \, dV = \frac{1}{8\pi} \int E_1^2 \, dV + \\ + \frac{1}{8\pi} \int E_2^2 \, dV + \frac{1}{4\pi} \int (E_1 E_2) \, dV.$$

En comparant les deux expressions, nous trouvons

$$U = \frac{1}{4\pi} \int (E_1 E_2) \, dV. \tag{30.5}$$

§ 31. Thermodynamique des diélectriques

1. Appliquons les principes de la thermodynamique aux processus de polarisation des diélectriques. On supposera que les diélectriques sont *isotropes*, que le champ électrique soit présent ou non ; c'est le cas de diélectriques gazeux ou liquides. Isolons en pensée une partie du diélectrique suffisamment petite pour qu'elle puisse être considérée comme homogène à un degré d'approximation convenable. On admettra qu'à ce même degré d'approximation sont uniformes

la pression $\mathcal{P}$ et l'intensité du champ électrique régnant dans cette petite partie du diélectrique. Appliquons le premier principe de la thermodynamique à cette partie du diélectrique:

$$\delta Q = dU + \delta A, \tag{31.1}$$

où δQ est la quantité de chaleur fournie au diélectrique et dU l'accroissement d'énergie interne. Le travail δA du diélectrique comporte deux parties: la première $\mathcal{P}dV$ est le travail fourni contre la pression extérieure; la seconde est le travail électrique défini par (29.1). Nous avons précisé dans le tome II le rôle du terme $\mathcal{P}dV$, ce qui nous permet de ne plus revenir sur ce point. Nous supposerons en conséquence que la polarisation du diélectrique ne s'accompagne d'aucune variation notable de son volume ou que ce volume est maintenu constant. En outre, sans restreindre la généralité, nous pouvons rapporter toutes les grandeurs concernées à l'unité de volume du diélectrique, ce qui revient à poser $V = 1$ dans la formule (29.1). Nous obtenons ainsi

$$\delta Q = dU - \frac{1}{4\pi} E\,dD. \tag{31.2}$$

2. Introduisons l'entropie S du système, la température absolue T et les fonctions thermodynamiques suivantes: l'énergie libre

$$\Psi = U - TS, \tag{31.3}$$

le potentiel thermodynamique

$$\Phi = \Psi - \frac{1}{4\pi} ED \tag{31.4}$$

et l'enthalpie

$$I = U - \frac{1}{4\pi} ED. \tag{31.5}$$

Dans le cas de transformations quasi statiques $\delta Q = T\,dS$ et l'équation (31.2) s'écrira

$$dU = T\,dS + \frac{1}{4\pi} E\,dD. \tag{31.6}$$

A l'aide de cette relation et en écrivant les différentielles des expressions (31.3) à (31.5) nous obtenons

$$d\Psi = -S\,dT + \frac{1}{4\pi} E\,dD, \tag{31.7}$$

$$d\Phi = -S\,dT - \frac{1}{4\pi} D\,dE, \tag{31.8}$$

$$dI = T\,dS - \frac{1}{4\pi} D\,dE. \tag{31.9}$$

Les équations (31.6) à (31.9) sont les *équations fondamentales de la thermodynamique des diélectriques*. Pour pouvoir en tirer des

conclusions concrètes on doit leur ajouter une « *équation d'état* ». Comme équation d'état on utilisera une relation de la forme

$$D = f(E, T, \tau), \tag{31.10}$$

où τ est la densité de la substance diélectrique. Comme la thermodynamique ne permet pas d'établir une telle équation d'état, on doit l'obtenir à partir de données expérimentales ou à l'aide de la théorie moléculaire de la polarisation des diélectriques.

3. En admettant que les vecteurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{E}$ sont reliés par l'équation d'état (31.10) et en intégrant l'expression (31.7) avec T et τ constants, on obtient

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} \int E\, dD + \Psi_0(T, \tau), \tag{31.11}$$

où $\Psi_0(T, \tau)$ est la constante d'intégration et représente évidemment l'énergie libre du diélectrique en l'absence de champ électrique. Nous arrivons ainsi à conclure une nouvelle fois que la formule (29.2) représente non pas l'énergie interne, mais l'*énergie libre* du diélectrique, plus précisément la partie de l'énergie libre qui dépend de l'intensité du champ électrique. Ecrivons l'équation d'état sous la forme $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$. La grandeur ε ne dépend que de T et de τ qui sont posés constants lors de l'intégration de l'expression (31.11). L'intégration donne

$$\Psi = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \Psi_0 = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} + \Psi_0. \tag{31.12}$$

Etablissons maintenant une expression de l'énergie interne U du diélectrique. A l'aide de (31.3) et (31.7) on obtient

$$U = \Psi - T\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_{D, \tau}, \tag{31.13}$$

l'équation où on a indiqué de façon explicite que la densité τ doit être posée constante lors de la dérivation, tous nos raisonnements étant fondés sur l'idée que τ = const. En utilisant (31.2) on tire de (31.13) le résultat suivant:

$$U = \left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)\frac{D^2}{8\pi\varepsilon} + U_0(T, \tau)$$

$$= \left(\varepsilon + T\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)\frac{E^2}{8\pi} + U_0(T, \tau), \tag{31.14}$$

où la fonction $U_0(T, \tau)$ représente l'*énergie interne* du diélectrique en l'absence de champ électrique. *Si la permittivité diélectrique ε ne dépend pas de la température, les composantes électriques de l'énergie libre et de l'énergie interne sont égales. Cette égalité ne subsiste pas si ε est fonction de la température.*

4. Si la variation de la polarisation du diélectrique est réalisée dans des conditions *quasi statiques* et *adiabatiques*, elle donne géné-

ralement lieu à une variation de la *température* du diélectrique. Cette variation de température est appelée *effet électrocalorique*. Lors des transformations adiabatiques quasi statiques l'entropie S reste constante. En la considérant comme une fonction de E et de T (τ est maintenu constant), on écrira pour une transformation infinitésimale

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E \Delta T + \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T \Delta E = 0.$$

Il est évident que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E = \frac{1}{T}\left(\frac{T\,\partial S}{\partial T}\right)_E = \frac{1}{T}\left(\frac{\delta Q}{\partial T}\right)_E = \frac{C_E}{T},$$

C_E étant la capacité calorifique de l'unité de volume du diélectrique à intensité E constante du champ électrique. D'autre part on tire de (31.8)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E = \frac{E}{4\pi}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}.$$

Ainsi

$$\Delta T = -\frac{TE}{4\pi C_E}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\,dE. \tag{31.15}$$

Pour une variation finie de l'intensité du champ électrique de E_1 à E_2, la température du diélectrique varie de

$$T_2 - T_1 = -\int_{E_1}^{E_2} \frac{TE}{4\pi C_E}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\,dE. \tag{31.16}$$

5. On définit parfois l'énergie interne et les autres fonctions thermodynamiques de façon différente. A l'aide de la formule de définition (13.3) excluons D de la formule (31.2). On obtient

$$\delta Q = dU - \frac{1}{4\pi}E\,dE - E\,dP.$$

Introduisons une nouvelle fonction d'état

$$U' = U - E^2/(8\pi). \tag{31.17}$$

On écrira alors

$$\delta Q = dU' - E\,dP. \tag{31.18}$$

La fonction U' s'obtient en soustrayant de la fonction U la quantité $E^2/(8\pi)$ que l'on peut interpréter comme la *densité d'énergie électrique dans le vide*. Dans ces conditions U' représenterait la partie de la densité de l'énergie interne du diélectrique, qui est liée à sa *polarisation*. Il n'est cependant pas nécessaire de recourir à cette interprétation dans les applications de la thermodynamique. En thermodynamique la seule chose qui importe est que la grandeur U' soit une *fonction d'état*. On peut donc l'utiliser à la place de l'énergie in-

terne U sans porter préjudice aux développements thermodynamiques. On pourrait appeler U' *énergie de polarisation des diélectriques.* En utilisant cette nouvelle grandeur la relation (31.6) devient

$$dU' = T\,dS + E\,dP. \tag{31.19}$$

L'énergie libre de polarisation d'un diélectrique doit être définie à l'aide de l'expression $F' = U' - TS$. Les définitions (31.4) et (31.5), ainsi que les relations thermodynamiques (31.7) à (31.9) devront être modifiées en conséquence.

PROBLÈME

Calculer la différence entre les capacités calorifiques d'une unité de volume du diélectrique à induction constante (C_D) et à intensité constante du champ électrique (C_E). Comment devra-t-on réaliser l'échauffement du diélectrique pour D = const et E = const?

Réponse.

$$C_D - C_E = \frac{T}{4\pi}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_D\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E = -\frac{T}{4\pi}\frac{E^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)^2. \tag{31.20}$$

L'échauffement du diélectrique doit être réalisé dans un condensateur plan. Si le condensateur est déconnecté de la source de tension, on a D = const, et s'il est connecté à la source de tension, la différence de potentiel entre les armatures est maintenue constante et E = const.

§ 32. L'énergie libre et les forces pondéromotrices

1. En présence d'un champ électrique les diélectriques et les conducteurs sont soumis à des forces que l'on appelle *forces pondéromotrices*, i.e. des forces qui s'exercent sur des *corps pesants.* Ce terme fut introduit à une époque où, en Physique, on admettait l'existence, à côté des substances usuelles, de nombreuses *substances impondérables* (phlogistique, éther, fluides électriques et magnétiques, etc.). Ce terme est maintenant tombé en désuétude puisqu'il n'existe pas de substances impondérables, mais nous le conservons à défaut d'autre. La cause première de l'apparition de forces pondéromotrices est la présence de charges électriques accumulées sur les corps. Mais l'effet d'accumulation des charges sur les corps se trouve compliqué par l'apparition des charges de polarisation et des déformations élastiques dans les conducteurs et les diélectriques. Le calcul des forces pondéromotrices et l'étude simultanée du mécanisme de leur apparition sont, dans le cas général, difficiles à effectuer. La thermodynamique fournit cependant une méthode générale de calcul des forces pondéromotrices tout en écartant l'étude des causes de leur apparition.

2. Nous allons exposer cette méthode en prenant pour exemple un condensateur plan dont l'espace entre les armatures est occupé par un diélectrique. Chargeons le condensateur, puis débranchons-le

de la source d'électricité, ce qui assure la constance des charges électriques accumulées sur les armatures. Entre les armatures apparaissent alors des forces d'attraction. Notons $\boldsymbol{F}$ l'une de ces forces, par exemple celle qui s'exerce sur l'armature chargée positivement (fig. 84). Fixons l'armature chargée négativement et appliquons à l'armature positive une force extérieure $\boldsymbol{F}'$ équilibrant la force $\boldsymbol{F}$. Si on rompt l'équilibre en modifiant d'infiniment peu la force $\boldsymbol{F}'$, l'armature positive commencera à se déplacer d'un mouvement infiniment lent. Comme ce processus peut être réalisé d'une façon infiniment lente (quasi statiquement) et pendant un temps suffisamment long, on peut négliger l'énergie cinétique du mouvement de l'armature positive. La différence entre les forces $\boldsymbol{F}'$ et $\boldsymbol{F}$ sera infiniment petite et par suite les travaux $\delta A'$ et δA de ces forces seront, à des infiniments petits d'ordre supérieur près, égaux et de signes opposés: $\delta A' = -\delta A$. La transformation peut s'accompagner d'un *dégagement* ou d'une *absorption de chaleur*. Nous évacuerons cette chaleur afin que *la température du système reste constante*. Le travail de la force extérieure $\boldsymbol{F}'$ sera alors utilisé à accroître l'énergie libre du système: $\delta A' = d\Psi$, soit

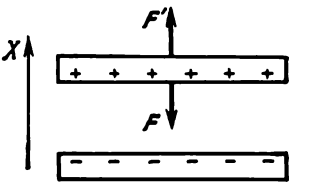


Fig. 84

$$\delta A + (d\Psi)_{q,T} = 0. \tag{32.1}$$

Les indices q et T indiquent que le calcul de l'accroissement de l'énergie libre doit être effectué à q et T constants. Ayant calculé par la formule (32.1) le travail δA, on arrive à calculer ainsi la force $\boldsymbol{F}$.

La formule (32.1) est d'une application tout à fait générale. Elle est valable pour *n'importe quel système* et non seulement pour le condensateur plan, à condition d'entendre par δA le travail de *toutes les forces* se manifestant dans le système lors des déplacements infinitésimaux de tous les corps constituant le système et du milieu diélectrique qui occupe l'espace intermédiaire. Ces déplacements sont appelés *déplacements virtuels* pour les distinguer des *déplacements réels* qui se produisent lorsque le système est en mouvement. Il est opportun de remarquer ici que lors de l'établissement de la formule (32.1) nous avons omis de tenir compte de ce que lors du déplacement de l'armature le diélectrique peut sortir ou s'enfoncer dans le condensateur. On devrait inclure dans le travail δA le travail des forces assurant ce déplacement du diélectrique.

3. Selon la formule (28.8) l'énergie libre totale Ψ se compose d'une partie électrique $\Psi_{\text{él}} = W$ et d'une partie élastique $\Psi_{\text{élast}}$. Le travail virtuel δA peut être également subdivisé en deux parties, telles que

$$\delta A_{\text{él}} + (dW)_{q,T} = 0, \tag{32.2}$$

$$\delta A_{\text{élast}} + (dW_{\text{élast}})_{q,T} = 0. \tag{32.3}$$

C'est en procédant ainsi qu'on arrive à subdiviser les forces pondéromotrices s'exerçant sur les conducteurs et les diélectriques en forces *électriques* et en forces *élastiques*.

On peut calculer la composante électrique $\delta A_{\text{él}}$ du travail virtuel d'une autre façon encore. La formule (32.2) se rapporte au cas où *les charges des corps sont maintenues constantes* pendant leurs déplacements virtuels. Supposons maintenant que les corps du système soient reliés à des sources d'électricité (à des éléments galvaniques par exemple) qui maintiennent constants les *potentiels de tous les corps* pendant leurs déplacements virtuels. Il est évident que les forces pondéromotrices et donc la valeur du travail virtuel $\delta A_{\text{él}}$ ne sauraient dépendre de ce que les déplacements virtuels des corps s'effectuent à charges constants, à potentiels constants ou d'une autre façon. On doit considérer l'introduction des déplacements virtuels comme un *artifice* utilisé pour calculer les forces qui se manifestent dans le système. Les déplacements virtuels n'ont donc aucun rapport direct avec l'origine de ces forces, mais l'accroissement d'énergie libre dW accompagnant les déplacements virtuels dépend essentiellement des conditions dans lesquelles ils s'effectuent. Illustrons cette proposition en prenant pour exemple le cas du condensateur. Lors des déplacements virtuels de ses armatures ou du diélectrique qui se trouve entre les armatures, la capacité C du condensateur varie. Si le condensateur est débranché de la source d'électricité (q = const) l'accroissement de l'énergie libre $W = q^2/(2C)$ sera égal à

$$(dW)_{q,\,T} = \frac{q^2}{2}\,\delta\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{q^2}{2C^2}\,\delta C = -\frac{1}{2}\,\varphi^2\delta C,$$

le travail virtuel étant égal, d'après (32.2), à $\delta A_{\text{él}} = \varphi^2\delta C/2$. Si le condensateur est branché sur un élément galvanique (φ = = const), on obtient, après avoir écrit W sous la forme $W = C\varphi^2/2$,

$$(dW)_{\varphi,\,T} = \frac{1}{2}\,\varphi^2\delta C.$$

Cette expression se distingue de la précédente par le signe. Cette différence de signe tient à ce que dans le deuxième cas l'élément galvanique communique au condensateur une charge supplémentaire $\delta q = \varphi\delta C$ et fournit ainsi le travail $\delta A_{\text{é.g.}} = \varphi\delta q = \varphi^2\delta C$. Dans ce dernier cas l'accroissement de l'énergie libre du système est déterminé par la totalité des travaux extérieurs, i.e.

$$\delta A_{\text{é.g.}} - \delta A_{\text{él}} = \varphi^2\delta C - \varphi^2\delta C/2 = \varphi^2\delta C/2.$$

Par conséquent

$$(dW)_{q,T} = -(dW)_{\varphi,T}, \tag{32.4}$$

$$\delta A_{\text{él}} - (dW)_{\varphi,T} = 0. \tag{32.5}$$

4. Les formules (32.4) et (32.5) que nous venons d'établir sont d'une application générale. Pour s'en assurer considérons un système arbitraire de conduc-

teurs entre lesquels se trouve un diélectrique quelconque. L'énergie libre de ce système est donnée par (28.4) ou

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{ij}\varphi_i\varphi_j=\frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}q_iq_j.$$

Lorsque les conducteurs ou le milieu diélectrique intermédiaire effectuent des déplacements virtuels, les coefficients de capacité et les coefficients de potentiel varient. Si les déplacements s'effectuent à potentiels constants des conducteurs, on a

$$(dW)_{\varphi,\,T}=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\varphi_i\varphi_j\delta C_{ij}.$$

Si ce sont les charges qui sont maintenues constantes, on a

$$(dW)_{q,\,T}=\frac{1}{2}\sum_{i,j} q_iq_j\delta V_{ij}.$$

Démontrons que ces expressions vérifient la relation (32.4). En portant dans (27.5) l'expression de φ_j tirée de la formule (27.4) on obtient

$$q_i=\sum_{j,k} C_{ij}V_{jk}q_k,$$

d'où

$$\sum_j C_{ij}V_{jk}=\delta_{ik}, \tag{32.6}$$

où δ_{ik} est égal à zéro pour $i\neq k$ et à l'unité pour $i=k$. En faisant varier la relation obtenue on trouve

$$\sum_j \delta C_{ij}V_{jk}+\sum_j C_{ij}\delta V_{jk}=0, \tag{32.7}$$

expression où on peut permuter les indices i et j, ainsi que j et k, les coefficients de capacité et de potentiel étant symétriques. En utilisant (32.6) et (32.7) on peut écrire:

$$(dW)_{q,\,T}=\frac{1}{2}\sum_{i,j} q_iq_j\delta V_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} C_{ik}C_{jl}\varphi_k\varphi_l\delta V_{ij}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j,k,l} C_{jl}\varphi_k\varphi_l\sum_i C_{ki}\delta V_{ij}=-\frac{1}{2}\sum_{j,k,l} C_{jl}\varphi_k\varphi_l\sum_i \delta C_{ki}V_{ij}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{i,k,l}\varphi_k\varphi_l\delta C_{ki}\sum_j V_{ij}C_{jl}=-\frac{1}{2}\sum_{i,k,l}\varphi_k\varphi_l\delta C_{ki}\delta_{il}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{i,k}\varphi_k\varphi_l\delta C_{ki}=-(dW)_{\varphi,\,T}.$$

Ainsi la relation (32.4) est démontrée. Dans cette démonstration nous avons supposé que les charges libres n'étaient portées que par les conducteurs, mais la démonstration pourrait être étendue au cas où les diélectriques porteraient également des charges libres. Il suffit pour cela de diviser en pensée les diélectriques en parties suffisamment petites pour pouvoir admettre que les poten-

tiels des différents points de chacune de ces parties sont constants. Pour ces petites parties du diélectrique on peut définir des coefficients de capacité et de potentiel exactement comme dans le cas de conducteurs. Par suite la démonstration ci-dessus s'applique au cas des diélectriques.

5. Considérons maintenant un système arbitraire de conducteurs chargés, placé dans le vide. Remplissons tout l'espace compris entre les conducteurs d'un liquide incompressible de permittivité diélectrique ε en maintenant les charges des conducteurs invariables. De ce fait l'induction $\boldsymbol{D}$ du champ ne sera pas modifiée, tandis que l'intensité $\boldsymbol{E}$ du champ diminuera de ε fois (cf. § 22, pt. 3). La composante électrique de l'énergie libre W diminuera elle aussi de ε fois. Comme le liquide est incompressible, la composante élastique de l'énergie libre Ψ ne variera pas lors des déplacements virtuels. Par conséquent les forces d'interaction s'exerçant entre les conducteurs ne seront déterminées que par les variations de la grandeur W. Et comme cette grandeur se trouve diminuée de ε fois lorsqu'on remplit l'espace entre les conducteurs de liquide diélectrique, les forces d'interaction des conducteurs diminuent d'autant de fois.

6. Pour conclure, reprenons l'exemple du début de ce paragraphe et menons à bonne fin le calcul de la force d'attraction entre les armatures d'un condensateur plan en supposant que tout l'espace est occupé par un liquide homogène incompressible de permittivité diélectrique ε (voir fig. 84). La composante élastique de l'énergie libre peut être négligée puisque pour un liquide incompressible $d\Psi = dW$. Orientons l'axe X dans le sens allant de l'armature négative vers l'armature positive et déplaçons de δx l'armature positive dans la direction de l'axe X, tout en maintenant constantes les charges des armatures. Les charges étant maintenues constantes, l'induction $\boldsymbol{D}$ dans le condensateur et par suite la densité spatiale de l'énergie libre resteront constantes:

$$w = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}.$$

Par suite du déplacement le volume du condensateur s'accroît de $\delta V = S\,\delta x$, S étant l'aire de l'armature. Une partie du liquide pénétrera dans le condensateur et son énergie libre augmentera de $(d\Psi)_{q,T} = w\,\delta V = Sw\,\delta x$ (on néglige les effets de bord). Le travail virtuel fourni par la force $\boldsymbol{F}$ est $\delta A = F\,\delta x = Sf\,\delta x$. En portant ces expressions dans la formule (32.1), on obtient

$$f = -w = -\frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \tag{32.8}$$

Ainsi la force f rapportée à l'unité de surface est numériquement égale à la densité d'énergie libre w. Cette force est négative en ce sens qu'elle est dirigée dans le sens négatif de l'axe X, c'est donc une *force d'attraction.*

7. L'expression (32.8) définit la force d'attraction totale s'exerçant entre les armatures du condensateur (rapportée à l'unité de surface). Cette force totale se compose d'une force élastique $f_{\text{élast}}$ et d'une force électrique $f_{\text{él}}$. Pour mettre en évidence ces deux forces il faut considérer le liquide incompressible comme le cas limite d'un liquide compressible. Il importe de remarquer que le déplacement virtuel δx peut être *quelconque*, sans que la valeur de la force totale f varie. Considérons un déplacement virtuel δx de l'armature positive tel que le liquide ne pénètre pas dans le condensateur. Pour y arriver il faudra introduire des forces de compensation supplémentaires, mais ces forces ne produiront aucun travail, étant appliquées à des parties immobiles du liquide. Si les charges sont maintenues constantes, l'induction $\boldsymbol{D}$ ne variera pas, mais la densité τ du liquide contenu dans le condensateur et par suite sa permittivité ε varieront. Dans le cas d'un liquide compressible, on devra tenir compte de la variation de la composante élastique de l'énergie libre. La variation totale de l'énergie libre $d\Psi = d\Psi_{\text{élast}} + dW$. La variation de la composante élastique de l'énergie libre est

$$d\Psi_{\text{élast}} = -(\mathcal{P} - \mathcal{P}_0)\,\delta V,$$

où $\mathcal{P}$ est la pression hydrostatique du liquide contenu dans le condensateur et $\mathcal{P}_0$ la pression en dehors de celui-ci. La variation de la composante électrique de l'énergie libre est donnée par

$$(dW)_{q,T} = \delta\left(\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}V\right) = \frac{D^2}{8\pi}\delta\left(\frac{V}{\varepsilon}\right) = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\delta V - \frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}V\delta\varepsilon.$$

La permittivité diélectrique ε n'est fonction que de la densité τ du liquide et de la température T, de sorte que

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T \delta\tau.$$

On calcule la variation de la densité du liquide en partant de la condition de conservation de la masse du liquide contenu dans le condensateur: $\tau V = \text{const}$. On en déduit $V\,\delta\tau + \tau\delta V = 0$. On en tire $\delta\tau$ et en remarquant que $\delta V = S\delta x$ on trouve

$$(dW)_{q,T} = \left(\varepsilon + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\frac{E^2}{8\pi}\,S\delta x.$$

En substituant ces expressions dans (32.1), on obtient le résultat suivant:

$$f = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_0) - \left(\varepsilon + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\frac{E^2}{8\pi}. \tag{32.9}$$

Cette formule laisse explicitement apparaître la composante élastique de la force $f_{\text{élast}} = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0$. Pour les liquides incompressibles (plus exactement peu compressibles) à l'état d'équilibre la formule (32.9)

doit se ramener à la formule (32.8), c'est-à-dire on doit avoir

$$\mathcal{P} - \mathcal{P}_0 = \tau \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right)_T \frac{E^2}{8\pi}. \tag{32.10}$$

Nous voyons que la force électrique supplémentaire

$$-\tau \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right)_T \frac{E^2}{8\pi},$$

qui apparaît du fait de la dépendance de la permittivité diélectrique avec la densité du diélectrique, se trouve compensée par la pression hydrostatique. Nous donnerons aux §§ 33 et 34 une justification plus rigoureuse de cette assertion, mais nous noterons ici que cette compensation n'a lieu qu'en statique. Si le champ électrique est variable dans le temps, cette compensation ne se manifeste généralement pas.

PROBLÈMES

1. Trouver l'expression de la force d'attraction s'exerçant entre les armatures d'un condensateur à air plan en admettant qu'elle résulte de l'interaction des charges électriques.

Solution. L'une des armatures du condensateur crée le champ électrique $E_1 = 2\pi\sigma$ qui exerce sur la seconde armature une force $F = S\sigma E_1 = 2\pi\sigma^2 S$. La densité superficielle d'électricité σ est liée à l'intensité E du champ électrique régnant dans le condensateur par la relation $E = 4\pi\sigma$. En éliminant σ on trouve

$$F = \frac{E^2}{8\pi} S. \tag{32.11}$$

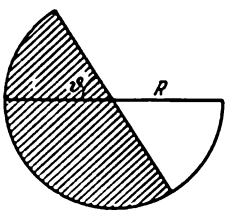


Fig. 85

2. On introduit une plaque à faces planes et parallèles d'un diélectrique solide entre les armatures d'un condensateur à air plan. Entre cette plaque et les armatures subsistent des lames d'air. La force d'attraction mutuelle des armatures en sera-t-elle affectée?

Réponse. La force d'attraction restera la même.

3. Un condensateur de capacité variable se compose de deux armatures métalliques fixes distantes de d entre lesquelles est disposée une lame diélectrique mobile que l'on peut faire tourner autour d'un axe et introduire ainsi dans l'espace compris entre les armatures fixes (fig. 85). Les armatures et la lame diélectrique sont de forme hémi-circulaire de rayon R ; la distance séparant la lame diélectrique des armatures métalliques est très petite devant d. En négligeant les effets de bord, calculer le moment M des forces appliquées à la lame diélectrique lorsque celle-ci ne se trouve pas dans sa position d'équilibre. Le condensateur est chargé jusqu'à ce que la différence de potentiel soit égale à φ ; la permittivité de la lame diélectrique est ε.

Réponse. $M = (\varepsilon - 1) R^2\varphi^2/(16\pi d)$. Le moment M des forces cherche à attirer la lame diélectrique dans le condensateur.

4. Dans le problème précédent nous avons admis que le moment M ne dépendait pas de l'angle de rotation ϑ de la lame diélectrique. Or dans la position d'équilibre caractérisée par $\vartheta = 0$ le moment M doit être nul. Expliquer cette contradiction.

§ 33. Tensions et pressions maxwelliennes

1. Dans ce paragraphe et les paragraphes suivants nous poursuivrons l'étude des forces pondéromotrices se manifestant dans les champs électriques. Calculons les forces pondéromotrices s'exerçant sur la frontière de séparation de deux diélectriques de permittivités ε_1 et ε_2. La densité superficielle des charges libres sur la frontière de séparation peut être nulle ou différente de zéro, sans que cela affecte les calculs que nous donnons ci-après. Considérons d'abord le

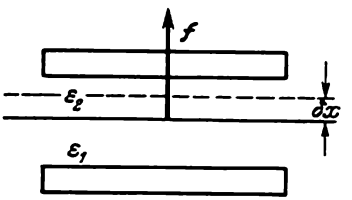


Fig. 86

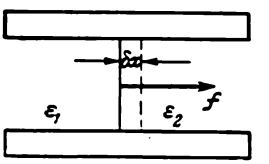


Fig. 87

cas d'un champ électrique *uniforme et perpendiculaire à la frontière de séparation*. Ce peut être, par exemple, le cas d'un condensateur plan, entre les armatures duquel se trouvent deux liquides diélectriques homogènes dont la surface de séparation est parallèle aux armatures (fig. 86). Si nous supposons que les liquides sont incompressibles, la composante élastique de l'énergie libre ne variera pas lors des déplacements virtuels. Déplaçons dans des conditions isothermes la surface de séparation des diélectriques suivant la verticale ascendante d'une distance δx en maintenant constantes les charges des armatures. Les charges étant maintenues constantes, les inductions $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ seront constantes dans les diélectriques et les densités de l'énergie libre le seront aussi :

$$w_1 = \frac{D_1^2}{8\pi\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1 E_1^2}{8\pi} \quad \text{et} \quad w_2 = \frac{D_2^2}{8\pi\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_2 E_2^2}{8\pi}. \tag{33.1}$$

Au cours du déplacement le liquide de permittivité ε_1 pénétrera dans le condensateur, tandis que le liquide de permittivité ε_2 en sortira. L'accroissement correspondant d'énergie libre sera égal à :

$$(d\Psi)_{q,T} = (dW)_{q,T} = (w_1 - w_2)\, S\, \delta x,$$

et le travail fourni par les forces pondéromotrices sera $\delta A = fS\,\delta x$. En portant ces expressions dans la formule (32.1) on trouve la force f appliquée à l'unité de surface de la frontière de séparation :

$$f = w_2 - w_1, \tag{33.2}$$

le sens positif étant celui de la verticale ascendante.

2. On peut utiliser le même procédé de calcul dans le cas où *le champ électrique est parallèle à la frontière de séparation des diélectriques.* Reprenons le condensateur plan à deux liquides diélectriques (fig. 87). Dans ce cas il est commode de réaliser le déplacement virtuel δx de la frontière de séparation en maintenant constante la différence de potentiel entre les armatures du condensateur, les densités d'énergie libre w_1 et w_2 dans les deux diélectriques ne variant alors pas. L'accroissement de l'énergie libre est

$$(d\Psi)_{\varphi,T} = (dW)_{\varphi,T} = (w_1 - w_2)\, S_1\, \delta x,$$

S_1 étant l'aire de la surface de séparation entre les diélectriques. Le travail virtuel est $\delta A = S_1 f\, \delta x$. En portant ces expressions dans (32.5) on trouve la force f s'exerçant sur l'unité de surface de la frontière de séparation:

$$f = w_1 - w_2, \tag{33.3}$$

le sens positif étant celui allant du premier diélectrique au second.

3. Un examen des formules (33.2) et (33.3) montre que tout se passe comme s'il existait une *tension* s'exerçant le long des lignes de force électriques et une *pression* perpendiculairement à celles-ci. Les valeurs de la tension $\mathcal{T}$ et de la pression $\Pi = -\mathcal{T}$ sont numériquement égales à la densité de l'énergie libre électrique w. Dans le cas de la formule (33.2) la force qui se manifeste est déterminée par la *différence des tensions* et dans le cas de la formule (33.3) par la *différence des pressions* existant de part et d'autre de la frontière de séparation. Cette interprétation se trouve en accord avec la formule (32.8) qui définit la force s'exerçant sur la frontière d'un conducteur chargé. Les grandeurs $\mathcal{T}$ et Π ont été appelées respectivement *tension* et *pression maxwelliennes.* Faraday et Maxwell estimaient que ces grandeurs étaient en tout point analogues aux tensions élastiques et aux pressions existant dans les diélectriques et dans l'éther universel. La science moderne a rejeté cette conception, mais dans le calcul des forces pondéromotrices on peut utiliser l'image des tensions et des pressions maxwelliennes puisqu'elle conduit à des résultats corrects.

4. Lorsque le champ électrique E est parallèle à la frontière de séparation, on a $E_1 = E_2$, ce qui permet de rejeter les indices 1 et 2 et d'écrire

$$f = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, E^2. \tag{33.4}$$

En posant $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $f > 0$, ce qui signifie que la force f est dirigée de gauche à droite (cf. fig. 87), i.e. dans le sens allant du diélectrique de plus grande permittivité vers celui de permittivité plus petite. On arrive au même résultat dans le cas où le champ E est normal à la surface de séparation entre les diélectriques à condition que celle-

ci ne porte aucune charge électrique libre. Si cette condition est satisfaite on a $D_1 = D_2 = D$ et la formule (33.2) s'écrit

$$f = \frac{D^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right). \tag{33.5}$$

Si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $f > 0$ et la force f est orientée suivant la verticale ascendante, i.e. dans le sens allant du premier au second diélectrique (cf. fig. 86). D'une manière générale, quelle que soit la direction du champ électrique, *les forces pondéromotrices s'exerçant sur la surface de séparation non chargée de deux diélectriques sont toujours orientées vers le diélectrique dont la permittivité est la plus petite.* C'est l'existence de telles forces qui détermine l'attraction de petits bouts de papier par les tiges électrisées.

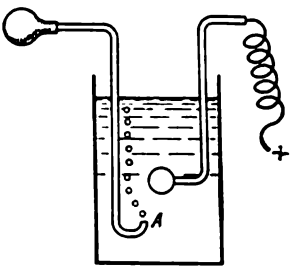


Fig. 88

Lorsqu'on immerge partiellement deux plaques métalliques parallèles dans un liquide diélectrique, celui-ci s'élève légèrement sous l'action des forces capillaires. Si on applique à ces plaques une différence de potentiel de plusieurs milliers de volts, la montée du liquide devient plus importante, car il est attiré vers l'intérieur du condensateur ainsi constitué.

Si la permittivité diélectrique d'un corps est plus petite que celle du milieu ambiant, il se trouve repoussé dans une région où le champ électrique est plus faible. Pour faire la démonstration de cet effet, on réalise l'expérience suivante. On prend un vase de verre rempli de pétrole ou d'eau distillée et on y insuffle de l'air sous faible pression à travers l'orifice A de l'extrémité recourbée d'un tube de verre (fig. 88). En l'absence de champ électrique, les bulles d'air montent suivant la verticale ascendante. Mais si on immerge dans le liquide une bille chargée d'électricité, on constate que les bulles d'air en sont repoussées et leur trajectoire subit une déviation.

5. Pour établir les formules (33.2) et (33.3) nous avons considéré les diélectriques comme des liquides *absolument incompressibles.* En conséquence on ne pouvait séparer les forces électriques et les forces élastiques. Pour y arriver on devra tenir compte de la *compressibilité des liquides*, exactement comme nous l'avons fait au paragraphe précédent, i.e. on devra considérer des déplacements virtuels de la frontière de séparation des diélectriques, tels que la densité des liquides change. C'est ce que nous allons faire dans le cas où le champ électrique est parallèle à la frontière entre les diélectriques (cf. fig. 87). Nous réaliserons un déplacement virtuel de la frontière de façon que les quantités des deux diélectriques contenus dans le condensateur restent invariables. Il est inutile de calculer l'accroissement

de la composante élastique de l'énergie libre, puisqu'on peut ajouter la pression hydrostatique $\mathcal{P}$ à la pression électrique et la soustraire de la tension électrique, comme nous l'avons fait au paragraphe précédent. Ainsi nous ne calculerons que les accroissements de la composante électrique de l'énergie libre. En notant V_1 le volume du premier diélectrique et V_2 celui du second, on écrira $W = V_1 w_1 + V_2 w_2$. Réalisons le déplacement virtuel de la frontière en appliquant une différence de potentiel constante entre les armatures du condensateur. L'intensité E du champ électrique régnant dans le condensateur ne variera pas lors du déplacement et par suite

$$dW_{\varphi, T} = \frac{E^2}{8\pi} [\delta (V_1 \varepsilon_1) + \delta (V_2 \varepsilon_2)],$$

ou

$$dW_{\varphi, T} = \frac{E^2}{8\pi} [(V_1 \delta\varepsilon_1 + V_2 \delta\varepsilon_2) + (\varepsilon_1 \delta V_1 + \varepsilon_2 \delta V_2)].$$

La permittivité diélectrique d'un liquide ne dépend que de sa densité et de sa température. Pour un processus isotherme

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T \delta\tau.$$

Comme la masse du premier diélectrique est maintenue constante. on a $V_1 \tau_1 = \text{const}$, d'où $V_1 \delta\tau_1 = -\tau_1 \delta V_1$, et par suite

$$V_1 \delta\varepsilon_1 = -\tau_1 \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau_1} \delta V_1.$$

On trouve de même pour le second diélectrique

$$V_2 \delta\varepsilon_2 = -\tau_2 \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\tau_2} \delta V_2.$$

D'autre part il est évident que $\delta V_1 = -\delta V_2 = S_1 \delta x$. Calculons maintenant $dW_{\varphi, T}$ afin de substituer le résultat obtenu dans (32.5). On tiendra encore compte de la pression hydrostatique et on obtiendra ainsi à la place de (33.3) l'expression suivante:

$$f = \mathcal{P}_1 + \frac{E^2}{8\pi} \left(\varepsilon_1 - \tau_1 \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau_1}\right) - \mathcal{P}_2 - \frac{E^2}{8\pi} \left(\varepsilon_2 - \tau_2 \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\tau_2}\right). \quad (33.6)$$

Le raisonnement est le même dans le cas où le champ électrique est perpendiculaire à la surface de séparation des diélectriques et on obtient au lieu de la formule (33.2) le résultat suivant:

$$f = -\mathcal{P}_2 + \frac{E^2}{8\pi} \left(\varepsilon_2 + \tau_2 \frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\tau_2}\right) + \mathcal{P}_1 - \frac{E^2}{8\pi} \left(\varepsilon_1 + \tau_1 \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\tau_1}\right). \quad (33.7)$$

Ces résultats montrent qu'en tenant compte de la dépendance de la permittivité avec la densité du liquide, les forces pondéromotrices dans le diélectrique se ramènent à une *tension s'exerçant le long des lignes de force* $\mathcal{T}$ et à une *pression* Π *suivant la direction*

rectangulaire. La seule chose qui change est la forme des formules exprimant ces grandeurs:

$$\mathcal{T} = -\mathcal{P} + \frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon + \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right), \tag{33.8}$$

$$\Pi = \mathcal{P} + \frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right). \tag{33.9}$$

C'est la différence de ces grandeurs de part et d'autre de la frontière de séparation qui détermine les forces s'exerçant sur l'unité de surface de cette frontière. Les forces supplémentaires qui apparaissent du fait de la dépendance de la permittivité avec la densité du diélectrique sont appelées *forces électrostrictives*; les variations de la pression hydrostatique et de la densité du diélectrique qui en résultent correspondent à l'effet d'*électrostriction.* C'est Helmholtz (1821-1894) qui fut le premier à en tenir compte. Maxwell n'en tint pas compte, quoique la valeur de $\tau\,\partial\varepsilon/\partial\tau$ soit du même ordre de grandeur que ε. Néanmoins en électrostatique les résultats auxquels conduisent les calculs de Maxwell pour les liquides incompressibles (plus exactement peu compressibles) sont corrects, comme on peut le constater en reprenant les développements donnés plus haut. Ces résultats doivent donc être en accord avec les formules (33.8) et (33.9). On en arrive à conclure que *si un liquide incompressible se trouve en équilibre (hydrostatique), les forces électrostrictives doivent être compensées par les forces de la pression hydrostatique.* Autrement dit, en tout point du liquide doit être vérifiée la relation

$$\mathcal{P} - \tau\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T \frac{E^2}{8\pi} = \text{const.} \tag{33.10}$$

Ce résultat est en accord avec la formule (32.10). *Dans le cas où le champ électrique varie rapidement dans le temps, la relation* (33.10) *cesse d'être valable dans le cas général.*

PROBLÈMES

1. On introduit dans l'espace compris entre les armatures d'un condensateur à air plan une lame diélectrique d'épaisseur l_2 et de permittivité ε_2 (fig. 89). Le condensateur est partiellement immergé dans le liquide de permittivité diélectrique ε_1 et de densité τ. En négligeant les effets de capillarité, calculer la hauteur d'ascension h du liquide dans le condensateur si la différence de potentiel entre ses armatures est égale à φ. L'épaisseur totale des colonnes de liquide dans le condensateur est égale à l_1.

Réponse. $h = \dfrac{\varepsilon - 1}{8\pi\tau g}\left(\dfrac{\varphi\varepsilon_2}{\varepsilon_1 l_2 + \varepsilon_2 l_1}\right)^2$.

2. On introduit entre les armatures d'un condensateur à air plan une lame diélectrique d'épaisseur l_2 et de permittivité ε (fig. 90). Entre la lame et les armatures subsistent des lames d'air dont l'épaisseur totale est égale à l_1. Calculer la force d'attraction F s'exerçant entre les armatures sachant que la différence de potentiel entre celles-ci est égale à φ et que l'aire de la lame est égale à S. Que devient la formule de F lorsque $l_1 \to 0$?

Réponse. $F = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{\varphi\varepsilon}{l_1\varepsilon + l_2}\right)^2$.

3. Un voltmètre à capillaire se compose d'un tube capillaire en verre dont la surface intérieure métallisée et semi-transparente constitue l'une des armatures du condensateur cylindrique. La seconde armature est un fil métallique fin coaxial par rapport à la surface cylindrique intérieure du tube de verre. Calculer la hauteur d'ascension h du ménisque d'eau dans le voltmètre lorsqu'on ap-

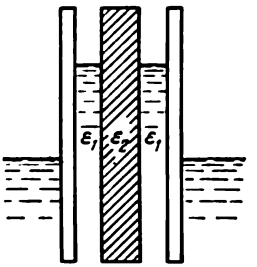


Fig. 89

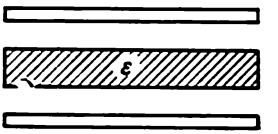


Fig. 90

plique aux armatures une tension $V = 100$ volts, sachant que le diamètre intérieur du capillaire est $D = 0{,}5$ mm et le diamètre du fil est $d = 0{,}05$ mm.

Réponse. $h = \frac{\varphi^2(\varepsilon - 1)}{\pi\tau g\,(D^2 - d^2)\ln(D/d)} \approx 5$ mm.

4. Une goutte de liquide est chargée d'électricité. Calculer la dépendance de la tension de vapeur saturante au-dessus de la goutte par rapport à sa charge q. A l'aide du résultat obtenu expliquer le principe de fonctionnement de la chambre de Wilson.

Solution. La dépendance cherchée se laisse établir exactement de la même façon que la variation de la tension de vapeur saturante en fonction de la courbure de la surface du liquide. On pourrait donc reproduire ici le raisonnement qui avait été exposé dans le tome II, § 118. Il faut tenir compte seulement de l'influence qu'exerce le champ électrique sur la hauteur d'ascension du liquide dans le capillaire. Le champ électrique doit être perpendiculaire à la surface du ménisque du liquide dans le capillaire. L'influence de ce champ équivaut à une diminution de la tension superficielle σ du liquide. On doit retrancher de la pression capillaire $2\sigma/r$ la tension maxwellienne

$$\frac{D^2}{8\pi}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{q^2}{8\pi r^4}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

où ε est la permittivité diélectrique de la goutte et r son rayon. Pour une goutte conductrice on posera dans cette formule $\varepsilon = \infty$. On peut également poser $\varepsilon = \infty$ pour l'eau, étant donné sa très grande permittivité ($\varepsilon = 81$). A la place de la formule (118.5) du tome II on obtient donc la relation suivante:

$$\ln\frac{P_0}{P} = \frac{\mu v_l}{RT}\left(P_0 - P - \frac{2\sigma}{r} + \frac{q^2}{8\pi r^4}\right). \qquad (33.11)$$

Pour $r = 0$ et $r = \infty$ cette formule donne respectivement $P = 0$ et $P = P_0$. Dans l'intervalle entre ces valeurs la tension de vapeur saturante P atteint son maximum. En dérivant (33.11) par rapport à r et en posant $dP/dr = 0$, on trouve que ceci a lieu lorsque

$$r = r_0 \equiv \sqrt[3]{q^2/(4\pi\sigma)}. \qquad (33.12)$$

Appliquons les résultats obtenus à une goutte d'eau portant une charge q égale à la charge élémentaire e placée au centre de la goutte. A 20 °C on a pour l'eau $\sigma = 73$ dynes/cm. D'après la formule (33.12) on trouve $r_0 = 6{,}3 \cdot 10^{-8}$ cm. Pour une goutte tellement petite, les formules macroscopiques exprimant des relations quantitatives exactes sont d'une validité douteuse. Néanmoins nous les utiliserons en espérant que le résultat que nous obtiendrons sera qualitativement plus ou moins correct. Nous n'attacherons pas d'importance au fait

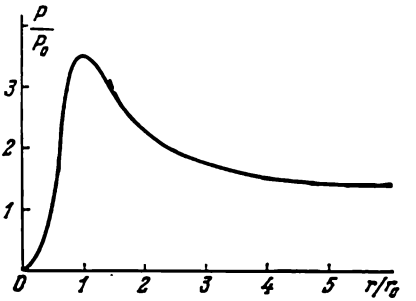


Fig. 91

que dans les conditions réelles les ions que captent les gouttes se placent n'importe où et non pas au centre des gouttes. La dépendance de la tension de vapeur saturante au-dessus de la goutte chargée avec son rayon est illustrée par la figure 91. La même dépendance pour une goutte non chargée est représentée sur la même figure par une courbe en pointillé. La charge que porte une goutte diminue la tension de vapeur saturante de telle façon que pour $r < r_0$ la tension de vapeur augmente avec le rayon de la goutte et c'est ce qui explique la condensation de la vapeur sur les ions (cf. t. II, § 119).

§ 34. Procédé général de calcul des forces pondéromotrices

1. Sans restreindre la généralité, nous supposerons que l'électricité et la substance sont réparties dans l'espace d'une façon *continue*. Représentons la composante électrique de l'énergie libre sous la forme

$$W = \int \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\, dV. \tag{34.1}$$

Supposons que chaque particule du diélectrique portant sa charge électrique ait déjà subi un déplacement virtuel infiniment petit $q = q(r)$. L'accroissement correspondant de la grandeur W sera

$$dW = \int \delta\left(\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\right) dV = \frac{1}{4\pi}\int \frac{D\delta D}{\varepsilon}\, dV + \frac{1}{8\pi}\int D^2 \delta\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) dV,$$

ou

$$dW = \frac{1}{4\pi}\int E\delta D\, dV - \frac{1}{8\pi}\int E^2 \delta\varepsilon\, dV.$$

Le symbole δ désigne ici les variations *locales* des grandeurs correspondantes, i.e. les variations que ces grandeurs subissent en un seul et même point de l'espace lorsque l'électricité et la substance effectuent des déplacements virtuels.

L'intégration est étendue à tout l'espace infini. Transformons la première intégrale à l'aide du théorème intégral de Gauss-Ostrogradski. En intégrant d'abord sur le volume fini délimité par une surface fermée S on trouve

$$\int E\delta D\, dV = -\int \operatorname{grad} \varphi \cdot \delta D\, dV = -\int \operatorname{div} (\varphi \delta D)\, dV +$$

$$+ \int \varphi \operatorname{div} \delta D\, dV = -\oint \varphi \delta D\, dS + 4\pi \int \varphi \delta\rho\, dV.$$

En supposant que toutes les charges se trouvent dans une région limitée de l'espace, augmentons jusqu'à l'infini la surface fermée S qui les renferme. A la limite la première intégrale s'annule et on obtient

$$dW = \int \varphi \delta\rho\, dV - \frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta\varepsilon\, dV. \tag{34.2}$$

2. Nous supposerons maintenant, afin de simplifier les développements ultérieurs, que seules les particules de diélectrique se trouvant à l'intérieur d'un cylindre infiniment mince dirigé suivant l'axe X subissent des déplacements virtuels. Posons que ces déplacements virtuels infiniment petits se pro-

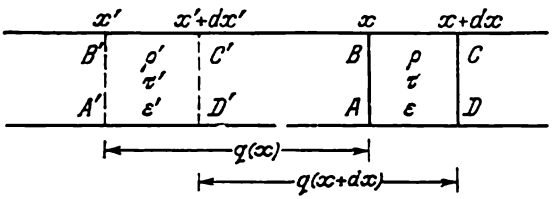


Fig. 92

duisent parallèlement à l'axe X et sont des fonctions quelconques de la coordonnée x : $q = x - x' = q(x)$ (fig. 92). Calculons les variations *locales* de la densité d'électricité $\delta\rho$ et de la permittivité diélectrique $\delta\varepsilon$ à l'intérieur de l'élément de volume infiniment petit $ABCD$. Par la section AB la charge $q(x)\,\rho(x)\,dS$ entre dans le volume $ABCD$ et par la section CD la charge $q(x + dx)\,\rho(x + dx)\,dS$ sort de ce volume, dS étant l'aire de la section droite. La différence entre les charges qui entrent et qui sortent de l'élément de volume considéré est égale à

$$[q(x)\,\rho(x) - q(x+dx)\,\rho(x+dx)]\, dS = -\frac{\partial(\rho q)}{\partial x}\, dV,$$

où $dV = dS\, dx$ est la valeur du volume considéré. Cette même différence est égale à $\delta\rho\, dV$, de sorte que

$$\delta\rho = -\frac{\partial(\rho q)}{\partial x}. \tag{34.3}$$

Calculons maintenant l'accroissement *local* de la permittivité diélectrique $\delta\varepsilon$. Cet accroissement est déterminé, d'une part, par ce que le déplacement fait entrer dans le volume $ABCD$ la substance qui se trouvait dans d'autres régions de l'espace où ε a une valeur différente, et d'autre part, par ce que le déplacement de chaque élément de substance fait varier sa densité τ et donc sa permittivité diélectrique. Après déplacement de la substance de l'élément de volume $A'B'C'D'$ dans l'élément $ABCD$ la densité de la substance $\tau' = \tau(x')$ prend un accroissement $\Delta\tau$ et devient égale à $\tau' + \Delta\tau$. Comme la masse de substance

déplacée ne varie pas, on a

$$dx'\tau' = dx\,(\tau' + \Delta\tau),$$

d'où

$$\Delta\tau = \frac{dx' - dx}{dx}\,\tau' = \frac{d\,(x' - x)}{dx}\,\tau',$$

ce qui s'écrit, aux infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$\Delta\tau = -\frac{\partial q}{\partial x}\,\tau.$$

Ainsi la substance entrant dans le volume $ABCD$ a une permittivité diélectrique

$$\varepsilon' + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\Delta\tau = \varepsilon' - \tau\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\frac{\partial q}{\partial x}.$$

En soustrayant la valeur qu'avait ε dans le volume $ABCD$ avant déplacement on trouve

$$\delta\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon - \tau\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Mais comme $\varepsilon' - \varepsilon = \varepsilon\,(x') - \varepsilon\,(x) = (x' - x)\,\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x} = -q\,\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x}$, on a

$$\delta\varepsilon = -q\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \tau\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{34.4}$$

3. Puisque l'électricité se déplace avec la substance, la charge électrique de chaque élément de substance déplacé ne varie pas. En portant les expressions (34.3) et (34.4) dans la formule (34.2) on trouve l'accroissement de la grandeur W à charge constante :

$$(dW)_{q,\,T} = -dS\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\,\frac{\partial\,(\rho q)}{\partial x}\,dx + \frac{dS}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E^2\left(q\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \tau\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,\frac{\partial q}{\partial x}\right)dx.$$

En intégrant par parties et en remarquant qu'aux limites d'intégration toutes les grandeurs s'annulent, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\,\frac{\partial\,(\rho q)}{\partial x}\,\partial x = -\int_{-\infty}^{+\infty}\rho q\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}q\rho E_x\,dx.$$

La deuxième intégrale se transforme de la même façon. On obtient finalement

$$(dW)_{q,\,T} = -dS\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\rho E_x - \frac{E^2}{8\pi}\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{8\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\,E^2\right)\right]q\,dx.$$

En notant $f^{\text{él}}$ la densité spatiale des forces pondéromotrices électriques s'exerçant dans le diélectrique, le travail produit par ces forces au cours du déplacement virtuel est

$$\delta A_{\text{él}} = dS\int_{-\infty}^{+\infty}f_x^{\text{él}}q\,dx.$$

En portant ces expressions dans la formule (32.2) et en remarquant que la fonction $q = q(x)$ peut être quelconque, on trouve $f_x^{\text{él}}$. On doit ajouter à cette force la force de pression hydrostatique $-\partial\mathcal{P}/\partial x$. Par suite la composante x de la densité spatiale de la force pondéromotrice totale aura pour expression

$$f_x = \rho E_x - \frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right) - \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x}.$$

On peut écrire des expressions analogues pour les composantes y et z de la force f. En les réunissant dans une formule vectorielle on obtient

$$f = -\operatorname{grad}\mathcal{P} + \rho E - \frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon + \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right). \tag{34.5}$$

4. Reprenons la démonstration que nous venons de donner pour le cas d'un liquide « incompressible ». Pour tout déplacement d'un élément du liquide d'une région de l'espace à une autre, la valeur de ε ne change alors pas. Par suite la composante élastique de l'énergie libre ne variera pas et dans la formule (34.5) le premier et le dernier terme s'éliminent, ce qui conduit au résultat suivant:

$$f = \rho E - \frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon. \tag{34.6}$$

C'est l'expression de la force pondéromotrice qu'établit Maxwell. Le terme supplémentaire $\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right)$ fut introduit plus tard par Helmholtz. Ce terme est du même ordre de grandeur que le terme $\frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon$ dont Maxwell tint compte. On notera que dans le cas de liquides « incompressibles » les deux modes de raisonnement sont également valables. Par suite, dans les champs électriques statiques, on doit avoir la relation suivante:

$$\operatorname{grad}\mathcal{P} = \frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2\right), \tag{34.7}$$

ce qui donne après intégration

$$\mathcal{P} = \frac{1}{8\pi}\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2 + \text{const}. \tag{34.8}$$

Cette formule signifie que *la composante supplémentaire de la force pondéromotrice qui apparaît du fait de la variation de la permittivité diélectrique avec la densité du liquide est compensée par la pression hydrostatique apparaissant dans le liquide sous l'action du champ électrique appliqué. Dans les champs variant rapidement au cours du temps, cette compensation ne se réalise pas et la relation* (34.8) *n'y est plus vérifiée.* Supposons en effet que le champ électrique ait été appliqué instantanément. Les perturbations électriques se propagent dans les diélectriques approximativement avec la vitesse de la lumière, et les perturbations élastiques avec la vitesse du son. Par suite, dans les champs rapidement variables, la pression hydrostatique $\mathcal{P}$ n'aura pas le temps d'équilibrer la « pression électrique » $\frac{1}{8\pi}\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}E^2$, et la formule (34.7) ne sera plus vérifiée.

PROBLÈME

Démontrer que la force pondéromotrice (34.5) se ramène à la tension (33.8) le long des lignes de force et à la pression (33.9) suivant une direction rectangulaire aux lignes de force.

Solution. Démontrons la proposition inverse: supposant connues les tensions et les pressions, calculons la force résultante f s'exerçant sur l'unité de volume du diélectrique. Il s'agit de s'assurer que le résultat obtenu coïncide avec la formule (34.5). Découpons en pensée, dans le diélectrique, un parallélépipède droit infiniment petit dont les côtés dx, dy, dz sont parallèles aux axes de coordonnées (fig. 93). La base *1* de ce parallélépipède est soumise à la force de pression hydrostatique $\mathcal{P}(x)\,dy\,dz$, la base *2* est soumise à une force dirigée en sens inverse $-\mathcal{P}(x+dx)\,dy\,dz$. La résultante de ces deux forces agit dans le sens positif de l'axe X et a pour valeur

$$[\mathcal{P}(x)-\mathcal{P}(x+dx)]\,dy\,dz=-\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

On trouve de la même façon les forces appliquées le long des deux autres axes de coordonnées. En réunissant ces expressions et en divisant par le volume du

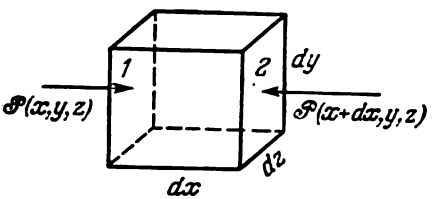


Fig. 93

parallélépipède $dx\,dy\,dz$, on trouve la force de pression hydrostatique totale rapportée à l'unité de volume du diélectrique:

$$f_1=-\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial x}\,i+\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial y}\,j+\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial z}\,k\right)=-\operatorname{grad}\mathcal{P}.$$

On doit ajouter à cette force la force de tension tridimensionnelle isotrope qui apparaît sous l'action du champ électrique appliqué:

$$f_2=\operatorname{grad}\left(\frac{\tau}{8\pi}\,\frac{d\varepsilon}{d\tau}\,E^2\right),$$

qui se calcule par le même procédé. Il nous reste à calculer la force f_3 déterminée par la tension $\varepsilon E^2/(8\pi)$, s'exerçant suivant la direction du champ, et par la pression égale à la tension et s'exerçant suivant une direction rectangulaire aux lignes de force. Pour effectuer simplement ce calcul on orientera l'axe X suivant la direction du champ électrique E. On obtient

$$f_3=\frac{1}{8\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon E^2)\,i-\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon E^2)\,j-\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon E^2)\,k\right],$$

ou

$$f_3=-\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}(\varepsilon E^2)+\frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon E^2)\,i.$$

Transformons cette expression. Ecrivons tout d'abord

$$\operatorname{grad}(\varepsilon E^2)=E^2\operatorname{grad}\varepsilon+2\varepsilon E\operatorname{grad}E.$$

Comme le vecteur E ne contient que la composante x, on a

$$\varepsilon E \operatorname{grad} E = D \operatorname{grad} E_x = D\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} i + \frac{\partial E_x}{\partial y} j + \frac{\partial E_x}{\partial z} k\right).$$

Or

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0.$$

De même $\partial E_x/\partial z = 0$. Ainsi

$$\varepsilon E \operatorname{grad} E = D \frac{\partial E}{\partial x} i.$$

D'autre part

$$-D\frac{\partial E}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon E^2) i = E\frac{\partial D}{\partial x} = E \operatorname{div} D = 4\pi\rho E.$$

En faisant la somme de f_1, f_2 et f_3 on retrouve la formule (34.5).

§ 35. Théorie électronique de la polarisation des diélectriques non polaires

1. Au § 12 nous avons exposé qualitativement le mécanisme électronique de la polarisation des diélectriques. Dans tous les cas la polarisation des diélectriques résulte du *déplacement* des électrons et des noyaux atomiques sous l'action du champ électrique appliqué au diélectrique. Nous allons exposer ici la théorie quantitative de la polarisation en commençant par les *diélectriques non polaires.* Ce sont les diélectriques dont les molécules sont dénuées de moments dipolaires en l'absence de champ électrique extérieur. Tous les atomes sont non polaires. D'après la théorie semi-classique de Bohr, l'atome d'hydrogène, qui est le plus simple de tous, se compose d'un noyau et d'un électron tournant autour du noyau sur une orbite circulaire ou elliptique. Comme l'électron est décalé par rapport au noyau, ce modèle d'atome doit posséder à tout instant un *moment dipolaire.* Du fait de la rotation rapide de l'électron autour du noyau, l'orientation de ce moment dipolaire varie très rapidement, de sorte que le moment dipolaire moyen de l'atome est égal à zéro. En mécanique quantique ce moyennage par rapport aux positions instantanées de l'électron sur l'orbite de Bohr devient superflu, car selon le principe d'indétermination de Heisenberg la conception du mouvement de l'électron dans l'atome sur des orbites classiques cesse d'être valable (cf. t. I, § 5). La description classique du mouvement est alors remplacée par une description probabiliste. On ne peut parler que de *probabilité* de trouver l'électron en un point donné de l'espace. Dans l'atome l'électron se comporte comme un nuage électronique où la répartition d'électricité serait continue. Dans les états stationnaires des atomes, la répartition de la charge dans ce nuage électronique ne varie pas au cours du temps. Si l'atome se trouve dans un *état normal*, i.e. dans un état non excité, la charge

est répartie dans le nuage avec une symétrie sphérique par rapport au noyau, et le moment dipolaire de l'atome est rigoureusement nul. Ce résultat est valable pour tout atome et tout ion se trouvant dans un état non excité. Mais si l'atome est *excité*, la répartition de la charge dans le nuage ne présente plus une symétrie sphérique, mais comme le noyau est toujours centre de symétrie de l'atome, son moment dipolaire est nul. Les molécules symétriques composées d'atomes neutres sont également non polaires. Tel est le cas de la molécule H_2.

2. Voyons maintenant ce qui se passe lorsqu'on introduit une molécule non polaire dans un champ électrique uniforme extérieur $\boldsymbol{E}$. Les charges négatives de la molécule se déplacent légèrement par rapport aux charges positives et il apparaît un *moment dipolaire électrique* $\boldsymbol{p}$ dont la valeur dépend de l'intensité $\boldsymbol{E}$ du champ extérieur. Afin de trouver la forme de cette dépendance, on doit remarquer que la polarisation des diélectriques fait intervenir des champs électriques extérieurs dont l'intensité est *très petite* devant l'intensité des champs électriques régnant à l'intérieur des atomes et des molécules. Par exemple, dans l'état normal de l'atome d'hydrogène, la distance moyenne entre l'électron et le noyau est $r = r_B = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm (c'est le rayon de Bohr). Le champ électrique que crée le noyau à cette distance est égal à

$$\frac{e}{r^2} \approx 1{,}7 \cdot 10^7 \text{ un. C.G.S.E.} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ V/cm}.$$

Pour se faire une idée de ce champ, on remarquera que pour faire jaillir une étincelle entre deux billes métalliques de 2,5 cm de rayon se trouvant à une distance de 1 cm l'une de l'autre, on devra leur appliquer dans l'air sec une différence de potentiel $\sim$30 000 V, autrement dit créer un champ électrique d'intensité $E \sim 3 \cdot 10^4$ V/cm. Ce champ est 100 000 fois plus faible que le champ intérieur de l'atome d'hydrogène. On conçoit que dans ces conditions le déplacement des charges à l'intérieur des molécules soumises à la polarisation soit négligeable ; on peut donc admettre que le moment dipolaire induit $\boldsymbol{p}$ dépend de l'intensité $\boldsymbol{E}$ du champ appliqué suivant une loi *linéaire*. Si la molécule présente une *symétrie sphérique*, on peut écrire

$$\boldsymbol{p} = \beta \boldsymbol{E}. \tag{35.1}$$

La grandeur β est constante pour une molécule donnée et dépend de sa configuration. On l'appelle *polarisabilité de la molécule*.

3. Pour évaluer la valeur de β on peut assimiler la molécule à une bille conductrice de rayon a. Nous avons montré aux §§ 16 et 23 que dans un champ électrique extérieur $\boldsymbol{E}$ cette bille acquiert un moment dipolaire $\boldsymbol{p} = a^3\boldsymbol{E}$. On posera donc pour ce modèle

$$\beta = a^3. \tag{35.2}$$

En mécanique quantique l'analogue classique de la molécule est un *nuage électronique* au centre duquel se trouve une charge ponctuelle positive. La polarisation de ce nuage par un champ extérieur homogène est analogue à celle d'une bille conductrice. Mais le nuage n'a pas de limites nettes et il faut préciser ce que l'on doit entendre par a. On y arrive en utilisant les procédés de calcul de la mécanique quantique. Pour l'atome d'hydrogène dans l'état non excité la mécanique quantique fournit le résultat suivant:

$$\beta = {}^9/_2 r_B^3, \tag{35.3}$$

où r_B est le rayon de Bohr dont la valeur numérique a été donnée plus haut. Ainsi la théorie donne pour l'atome d'hydrogène $\beta = 0{,}67 \cdot 10^{-24}$ cm^3.

4. Si la molécule ne présente pas une symétrie sphérique, les directions des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{p}$ sont généralement différentes. Néanmoins la relation linéaire entre les composantes de ces vecteurs subsiste. A la place de (35.1) on devra écrire maintenant

$$p_i = \sum_j \beta_{ij} E_j \quad (i, j = x, y, z). \tag{35.4}$$

Les neuf grandeurs β_{ij} constituent le *tenseur de polarisabilité de la molécule*. Ce tenseur dépend de la structure de la molécule et de son orientation par rapport aux axes de coordonnées.

Le tenseur de polarisabilité des molécules est *symétrique*, i.e. $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Cette assertion découle de la loi de la conservation de l'énergie. Lorsque le champ électrique varie de $d\boldsymbol{E}$ les charges contenues dans la molécule se déplacent de $d\boldsymbol{r}_a$ et on fournit à la molécule le travail

$$\delta A = \sum_a e_a \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{p}.$$

Ce travail est utilisé pour accroître l'énergie potentielle de déformation de la molécule:

$$dU_{\text{déf}} = \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{p}. \tag{35.5}$$

Pour pouvoir intégrer cette expression on doit remarquer que la grandeur $U_{\text{déf}}$ ne peut dépendre du procédé mis en œuvre pour amener la molécule dans son état final. Faisons croître le champ $\boldsymbol{E}$ tout en conservant sa direction. Posons que $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{p}$ désignent maintenant l'intensité du champ électrique et le moment dipolaire de la molécule dans l'état final. Si on augmente le champ de λ fois, du fait de l'existence d'une relation linéaire entre $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{p}$ le vecteur $\boldsymbol{p}$ doit augmenter d'autant de fois, sa direction restant la même. On peut donc caractériser tout état intermédiaire de la molécule par les vecteurs $\boldsymbol{E}' = \lambda \boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{p}' = \lambda \boldsymbol{p}$, la grandeur $dU_{\text{déf}}$ étant donnée par l'expression $dU_{\text{déf}} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{p}\lambda\, d\lambda$. En intégrant cette expression dans les limites $\lambda = 0$ (état initial) et $\lambda = 1$ (état final) on obtient

$$U_{\text{déf}} = 1/2\, \boldsymbol{p}\boldsymbol{E}. \tag{35.6}$$

Prenons la différentielle $dU_{\text{déf}}$ et égalons-la à l'expression (35.5). On trouve ainsi

$$\boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{p}. \tag{35.7}$$

En écrivant cette égalité en fonction des coordonnées on trouve

$$\sum\sum \beta_{ij} E_j\, dE_i = \sum\sum E_i \beta_{ij}\, dE_j,$$

et après permutation des indices de sommation

$$\sum \sum \beta_{ij} E_j \, dE_i = \sum \beta_{ji} E_j \, dE_i.$$

Puisque dE_i est choisi arbitrairement on a $\beta_{ij} = \beta_{ji}$.

5. Passons de l'étude des molécules isolées à celle des *corps macroscopiques* comportant une multitude de molécules. Pour simplifier nous supposerons que les molécules sont *à symétrie sphérique*. Soit $\boldsymbol{E}$ le champ électrique macroscopique moyen selon la définition donnée au § 10. Posons que ce champ coïncide avec le champ $\boldsymbol{E}'$ agissant sur chacune des molécules du diélectrique. Ces champs ne peuvent être qu'approximativement égaux. En effet le champ auquel se trouve soumise une molécule donnée est créé par toutes les charges extérieures et par toutes les autres molécules du corps. Si les molécules voisines se trouvent à petite distance les unes des autres, le champ actif $\boldsymbol{E}'$ ne peut être uniforme et varie notablement sur l'étendue d'une molécule. Dans ce cas l'hypothèse $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}$ n'est plus valable. Cet état de choses est caractéristique des diélectriques liquides et solides et les développements donnés ici n'y sont pas applicables. L'égalité $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}$ peut se réaliser dans les *gaz* où les distances moyennes entre molécules voisines sont grandes devant leurs dimensions. C'est le cas qui nous concerne. Lorsque l'égalité $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}$ est vérifiée, le moment dipolaire induit de la molécule est donné par l'expression (35.1) et le vecteur polarisation du milieu gazeux $\boldsymbol{P} = n\boldsymbol{p}$ par l'expression

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}, \tag{35.8}$$

où α représente la polarisabilité de l'unité de volume du diélectrique :

$$\alpha = n\beta \tag{35.9}$$

(n est le nombre de molécules contenues dans l'unité de volume). D'après la formule (15.3), la permittivité diélectrique est égale à

$$\varepsilon = 1 + 4\pi n\beta. \tag{35.10}$$

Nous avons indiqué plus haut que la polarisabilité de la molécule β est une *constante moléculaire* qui ne dépend que de la structure interne de la molécule. Par suite la quantité $\varepsilon - 1$ doit être proportionnelle à la densité du gaz :

$$\frac{\varepsilon - 1}{\tau} = \text{const}. \tag{35.11}$$

Pour la même raison la permittivité diélectrique des gaz composés de molécules non polaires *est indépendante de la température*. En effet toute molécule est un *système quantique* dont l'énergie interne ne peut prendre que des *valeurs discrètes*. A la température ordinaire les molécules existent à l'état non excité et occupent donc les niveaux énergétiques les plus bas. L'énergie de l'agitation thermique

est généralement insuffisante pour exciter les molécules, de sorte qu'une élévation de température ne peut modifier ni la structure interne des molécules, ni la permittivité diélectrique du gaz (à densité constante). Ce n'est qu'aux hautes températures qu'une partie notable des molécules passent à l'*état excité* ou *se dissocient*. Ce n'est qu'alors que leur permittivité ε devient fonction de la température.

La permittivité ε des gaz à molécules non polaires étant indépendante de la température, l'énergie interne U coïncide avec l'énergie libre et s'exprime donc par la formule (29.4). Ce résultat ressort aussi de la formule (31.14). L'influence des propriétés diélectriques sur l'énergie interne a une interprétation physique simple. La densité d'énergie interne U comporte deux parties: 1) la densité de l'énergie du champ électrique dans le vide $E^2/(8\pi)$ et 2) la densité de l'énergie de déformation des molécules $^1/_2 npE = {}^1/_2 PE$. La somme de ces parties est égale à $E^2/(8\pi) + (PE)/2 = (ED)/(8\pi)$, ce qui coïncide avec la formule (29.7).

6. Lorsqu'on cherche à étendre ces considérations aux *milieux denses* (liquides et solides), on se heurte à de grosses difficultés. Pour faciliter l'étude de ces milieux, on procède comme suit. On néglige les dimensions réelles des molécules et on les considère comme « ponctuelles », i.e. on pose que les dimensions linéaires des molécules sont très petites devant leurs distances de séparation moyennes. On peut alors négliger les variations du champ électrique sur l'étendue de la molécule, ce qui revient à poser que le champ E' est rapporté au *centre de la molécule* considérée. Pour trouver le moment dipolaire d'une molécule, on doit remplacer E par E' dans la formule (35.1), i.e.

$$p = \beta E'. \tag{35.12}$$

Le problème consiste alors à calculer le champ E'. Pour ce faire, choisissons dans le diélectrique une molécule A quelconque et traçons autour de cette molécule une enveloppe sphérique auxiliaire physiquement infiniment petite S dont le centre O est confondu avec le centre de la molécule. Le champ E' au point O est dû à toutes les charges existantes, les charges de la molécule A exceptées. Le champ électrique E_{ext} à l'intérieur de la sphère S, créé par toutes les charges se trouvant en dehors de cette sphère, se laisse calculer en admettant que ces charges sont réparties dans l'espace de façon continue. Comme la sphère S est physiquement infiniment petite, on peut poser qu'à proximité de cette sphère la polarisation du diélectrique est homogène. On peut donc utiliser la formule (16.7) et écrire

$$E_{\text{ext}} = E + \frac{4\pi}{3} P.$$

C'est le champ que créent les charges extérieures au centre O de la sphère S. Pour trouver le champ E', il faut ajouter au champ E_{ext}

le champ $\boldsymbol{E}_1$ que créent au point O toutes les charges contenues à l'intérieur de la sphère S (exception faite des charges appartenant à la molécule A). Sous certaines conditions on peut affirmer que $\boldsymbol{E}_1 = 0$. C'est le cas des cristaux cubiques construits avec des molécules ponctuelles électriquement neutres et isotropes. Ces molécules créent les mêmes champs que ceux dûs à des dipôles ponctuels de moments dipolaires induits $\boldsymbol{p}$ orientés suivant le champ moyen $\boldsymbol{E}$. En notant $\boldsymbol{r}$ le rayon vecteur mené du point O à l'un de ces dipôles, le champ $\boldsymbol{E}_1$ au point O sera donné par la somme

$$\boldsymbol{E}_1 = \sum \left(\frac{3(\boldsymbol{pr})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3} \right),$$

la sommation concernant tous les dipôles contenus dans la sphère S, à l'exception du dipôle se trouvant au centre O. Comme la sphère S est physiquement parlant infiniment petite, les moments dipolaires induits $\boldsymbol{p}$ de toutes les molécules qui y sont contenues sont égaux, de sorte qu'on peut les faire sortir de sous le signe somme. En utilisant encore l'égalité $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ on trouve pour la composante x du vecteur $\boldsymbol{E}_1$ l'expression suivante:

$$E_{1x} = p_x \sum \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{r^5} + 3p_y \sum \frac{xy}{r^5} + 3p_z \sum \frac{xz}{r^5}.$$

Les deux dernières sommes sont nulles par suite de la symétrie cubique du réseau cristallin. En raison de la symétrie cubique on a d'autre part

$$\sum \frac{x^2}{r^5} = \sum \frac{y^2}{r^5} = \sum \frac{z^2}{r^5},$$

de sorte que $E_{1x} = 0$. Il en est de même des composantes y et z du vecteur $\boldsymbol{E}_1$ et par suite $\boldsymbol{E}_1 = 0$. Ainsi le champ résultant se réduit à $\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$, i.e.

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}. \tag{35.13}$$

Cette formule, qui fut établie par le physicien hollandais H.A. Lorentz, peut être utilisée non seulement pour les cristaux cubiques, mais aussi pour les gaz de grande densité constitués par des molécules ponctuelles non polaires, à condition d'entendre par $\boldsymbol{E}'$ le champ effectif moyenné dans le temps. En effet les molécules gazeuses sont distribuées chaotiquement dans l'espace, la position de chacune d'elles étant pratiquement indépendante de celle des autres. De ce fait les développements qui nous ont permis de s'assurer que le vecteur $\boldsymbol{E}_1$ était nul restent valables (en prenant la moyenne de $\boldsymbol{E}_1$ par rapport au temps). Mais la formule (35.13) ne s'applique pas aux diélectriques à molécules polaires, car dans ce cas chacune des molécules dipolaires subit un intense effet d'orientation dû à toutes les autres molécules dipolaires. Il est évident qu'en l'absence de champ

électrique extérieur toutes les orientations des axes des dipôles moléculaires sont équivalentes dans l'espace. Mais il existe une certaine corrélation entre les orientations des moments dipolaires des molécules voisines qui n'est que faiblement affectée par l'application d'un champ électrique extérieur. C'est pour cela que la formule (35.13) ne s'applique pas aux diélectriques à molécules polaires.

7. Appliquons maintenant la formule (35.13) au calcul de la polarisation $\boldsymbol{P} = n\boldsymbol{p} = n\beta\boldsymbol{E}'$ d'un diélectrique. Nous obtenons

$$\boldsymbol{P} = n\beta\left(\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}\right),$$

d'où

$$\boldsymbol{P} = \frac{n\beta}{1 - {}^4/_3\pi n\beta}\boldsymbol{E}.$$

D'autre part

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P} = \frac{1 + {}^8/_3\pi n\beta}{1 - {}^4/_3\pi n\beta}\boldsymbol{E}.$$

Par conséquent

$$\varepsilon = \frac{1 + {}^8/_3\pi n\beta}{1 - {}^4/_3\pi n\beta}. \qquad (35.14)$$

En résolvant cette équation par rapport à ${}^4/_3\pi n\beta$, on obtient

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3}n\beta. \qquad (35.15)$$

Comme la quantité $n\beta$ est proportionnelle à la densité τ du diélectrique, pour toute variation de densité on doit avoir

$$\frac{1}{\tau}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \text{const}. \qquad (35.16)$$

Cette relation est la *formule de Mossotti* (1791-1863)-*Clausius* (1822-1888). La démonstration que nous venons de donner est due à H.A. Lorentz. Pour les diélectriques vérifiant la formule (35.16), la permittivité ε dépend de la densité, mais ne dépend pas de la température. L'énergie libre de ces diélectriques (plus exactement sa composante électrique) est donc égale à leur énergie interne. Pour des ε petits, voisins de l'unité, la formule (35.16) se réduit à la formule (35.11).

La formule de Mossotti-Clausius cadre assez bien avec les données expérimentales relatives aux diélectriques liquides et gazeux constitués par des molécules non polaires, quoique la condition du caractère ponctuel des molécules, utilisée dans la formule (35.16), ne soit pas vérifiée pour les liquides. Ainsi, par exemple, pour le sulfure de carbone CS_2 gazeux, on trouve à 0 °C et à la pression atmosphérique $\varepsilon = 1{,}0029$. En portant cette valeur dans (35.10) on trouve $4\pi n\beta = 0{,}0029$. La densité du CS_2 liquide est 381 fois plus grande que celle du CS_2 gazeux. Si l'hypothèse selon laquelle la polarisabilité

des molécules ne doit pas varier lorsqu'on passe de l'état gazeux à l'état liquide est valable, pour le sulfure de carbone liquide la valeur de $4\pi n\beta$ devrait être 381 fois plus grande, donc être égale à 1,11. A cette valeur, d'après la formule (35.14), devrait correspondre $\varepsilon = 2{,}74$, valeur peu différente de la valeur expérimentale $\varepsilon = 2{,}64$.

Pour les diélectriques à molécules polaires (eau, alcools, éthers, etc.), la formule de Mossotti-Clausius n'est pas confirmée par l'expérience. Si, par exemple, on reprenait pour l'eau les calculs que nous venons de faire pour le sulfure de carbone, on aurait trouvé $4\pi n\beta = 13{,}2$. En portant cette valeur dans (35.14) on aurait obtenu pour ε une valeur négative, tandis que pour l'eau l'expérience donne $\varepsilon = 81$.

§ 36. Théorie électronique de la polarisation des diélectriques gazeux polaires

1. Pour exposer la théorie de la polarisation des diélectriques à molécules polaires, nous ne considérerons que les *substances gazeuses*. On peut alors assimiler le champ $\boldsymbol{E}'$ au champ maxwellien moyen $\boldsymbol{E}$. Pour des molécules typiquement polaires (H_2O, HCl, HBr, HI, CO, alcools, éthers, etc.) les moments dipolaires $\boldsymbol{p}_0$ sont de l'ordre de 10^{-18} un. CGSE. Comparés à ces derniers les moments dipolaires induits sont de plusieurs ordres de grandeur plus petits. En effet, en utilisant l'équation d'estimation (35.2), on trouve $\beta \sim 10^{-24}$ cm^3. Dans un champ électrique assez intense $E \sim 100$ un. C.G.S.E. (30 000 V/cm) une molécule n'acquiert qu'un moment dipolaire $\sim 10^{-22}$ un. C.G.S.E. En première approximation on peut donc négliger le moment induit devant $\boldsymbol{p}_0$. Dans cette approximation la polarisation du diélectrique n'est due qu'aux *rotations* des axes des molécules dipolaires dans le champ électrique. Pour décrire la distribution spatiale des axes des dipôles, nous introduisons la fonction de distribution $f(\boldsymbol{b})$. Par définition la quantité $dn = nf(\boldsymbol{b})\,d\Omega$ représente le nombre moyen de dipôles contenus dans l'unité de volume et dont les axes sont compris dans un angle solide $d\Omega$. Le vecteur unitaire $\boldsymbol{b}$ indique la direction de l'axe d'un angle solide élémentaire $d\Omega$. En l'absence de champ électrique toutes les directions des axes dipolaires sont équiprobables, ce qui implique que la fonction $f(\boldsymbol{b})$ est constante. En présence d'un champ électrique, la fonction $f(\boldsymbol{b})$ est définie par la formule de Boltzmann:

$$f = Ce^{-u/(kT)}, \tag{36.1}$$

où C est une constante et $u = -(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{E})$ l'énergie potentielle du dipôle $\boldsymbol{p}_0$ dans le champ extérieur $\boldsymbol{E}$. Les champs sont d'ordinaire « faibles », i.e. vérifient la condition

$$\frac{p_0 E}{kT} \ll 1. \tag{36.2}$$

Dans ces cas on peut développer la fonction (36.1) en une série de puissances en s'arrêtant au deuxième terme du développement. En posant que le champ $\boldsymbol{E}$ est parallèle à l'axe Z, nous obtenons

$$f(\boldsymbol{b}) = C\left(1 + \frac{p_0 E}{kT}\right) = C\left(1 + \frac{p_0 E}{kT} b_z\right).$$

La constante C est déterminée par la condition de normalisation

$$\int f(\boldsymbol{b})\, d\Omega = 1, \tag{36.3}$$

qui implique que l'intégration est étendue à toutes les directions spatiales. Dans le cas considéré cette condition de normalisation s'exprime par

$$C\int d\Omega + C\frac{p_0 E}{kT}\int b_z\, d\Omega = 1.$$

La première intégrale est égale à 4π et la seconde est nulle puisque la projection b_z prend des valeurs égales en module alternativement positives et négatives. Il s'ensuit que $C = 1/(4\pi)$ et par conséquent

$$f(\boldsymbol{b}) = \frac{1}{4\pi}\left(1 + \frac{p_0 E}{kT} b_z\right). \tag{36.4}$$

2. Le vecteur polarisation du milieu sera évidemment dirigé suivant $\boldsymbol{E}$, donc parallèlement à l'axe Z. Sa grandeur est

$$P = n\int p_{0z} f(\boldsymbol{b})\, d\Omega = np_0\int b_z f(\boldsymbol{b})\, d\Omega = \frac{np_0}{4\pi}\int b_z\, d\Omega + \frac{np_0^2 E}{4\pi kT}\int b_z^2\, d\Omega.$$

Comme nous venons de voir, la première intégrale du second membre est nulle. Pour calculer la dernière intégrale nous utilisons la relation $b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 = 1$ dont l'intégration donne

$$\int b_x^2\, d\Omega + \int b_y^2\, d\Omega + \int b_z^2\, d\Omega = 4\pi.$$

Ces trois intégrales sont égales par raison de symétrie, de sorte que chacune d'elles vaut $4\pi/3$. On arrive ainsi aux résultats suivants:

$$\boldsymbol{P} = \frac{np_0^2}{3kT}\boldsymbol{E}, \tag{36.5}$$

$$\alpha = \frac{np_0^2}{3kT}, \tag{36.6}$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi np_0^2}{3kT}. \tag{36.7}$$

Notons que ces résultats, jusqu'au facteur $^1/_3$ près, restent valables en mécanique quantique (dans la mesure où la statistique de Boltzmann est valable). C'est ce qui distingue essentiellement les formules (36.5) à (36.7) des formules correspondantes de la théorie du paramagnétisme (cf. § 77).

Notons encore que les formules (36.5) à (36.7) sont vérifiées *au deuxième ordre* du paramètre $p_0E/(kT)$ et non seulement au premier ordre comme on pourrait le penser d'après le procédé de démonstration utilisé. En effet, si on conserve dans le développement de $f(b)$ les termes quadratiques par rapport au paramètre indiqué, dans le calcul du vecteur polarisation $\boldsymbol{P}$ viendront s'ajouter les intégrales de la première et de la troisième puissance par rapport à la projection b_z. Par raison de symétrie toutes ces intégrales sont nulles et n'exercent aucune influence sur le résultat final. On tiendra compte de cette remarque pour résoudre le problème 4.

3. En réalité les molécules polaires soumises à un champ électrique subissent non seulement des rotations mais encore des *déformations* et acquièrent ainsi des moments dipolaires induits. Dans le cas général la polarisabilité α du diélectrique comporte une *partie orientationnelle* $np_0^2/(3kT)$ et une *partie due à la déformation* des molécules $n\beta$. Par suite

$$\varepsilon = 1 + 4\pi n\beta + 4\pi \frac{np_0^2}{3kT}. \qquad (36.8)$$

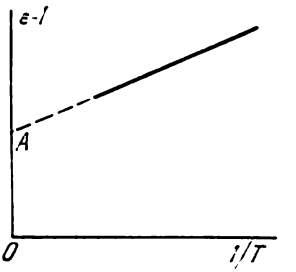


Fig. 94

La partie de la polarisabilité résultant de la déformation *ne dépend pas de la température*, tandis que l'autre partie *varie en raison inverse de la température absolue*. L'étude de la variation de permittivité en fonction de la température permet donc de séparer ces deux composantes de la polarisabilité. En portant en abscisses l'inverse de la température et en ordonnées la différence $\varepsilon - 1$, on obtient une droite (fig. 94) qui extrapolée vers les hautes températures découpe sur l'axe des ordonnées un segment $OA = 4\pi n\beta$. En mesurant la longueur de ce segment, on trouve la polarisabilité β de la molécule, et en mesurant la pente de la droite on détermine son moment dipolaire constant p_0. C'est par ce procédé que l'on détermine le plus souvent les moments dipolaires des molécules polaires.

Voyons ce que signifie la condition (36.2). Posons que $p_0 = 10^{-18}$ un. C.G.S.E. A la température ordinaire ($T \approx 300$ K) la théorie est utilisable si

$$E \ll \frac{kT}{p_0} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ un. C.G.S.E.} \approx 10^7 \text{ V/cm}.$$

Pour $E \gg kT/p_0$ les moments dipolaires de toutes les molécules devraient s'orienter le long du champ $\boldsymbol{E}$. On arriverait ainsi à un *état de saturation* dans lequel la polarisation $\boldsymbol{P}$ du diélectrique ne varierait plus avec l'accroissement ultérieur de l'intensité du champ électrique. Pour les gaz on n'arrive pas à atteindre cet état de saturation, car pour des intensités plus faibles intervient la *rupture électrique* du milieu.

4. La formule (31.14) permet de calculer l'énergie interne d'un diélectrique gazeux à molécules polaires. En y portant l'expression (36.7) de ε on obtient

$$U = \frac{E^2}{8\pi}. \tag{36.9}$$

Dans ce cas, l'énergie interne U *ne dépend donc que de l'intensité* E *du champ électrique.* La substance elle-même ne contribue pas directement à la valeur de l'énergie interne. Son influence ne se manifeste que dans la mesure où elle modifie l'intensité $\boldsymbol{E}$ du champ électrique. Ce résultat s'interprète facilement. L'énergie interne se compose de l'énergie du champ électrique $E^2/(8\pi)$ et de l'énergie de la substance qui s'y trouve. Cette dernière se compose de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Lorsque l'intensité du champ augmente, l'énergie potentielle $-(\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{E})$ du dipôle diminue et son énergie cinétique augmente d'autant. La somme des énergies cinétique et potentielle des dipôles reste constante tant qu'il n'y a pas d'apport de chaleur et qu'aucun travail macroscopique supplémentaire n'est produit.

PROBLÈMES

1. Calculer la densité de la force pondéromotrice $\boldsymbol{f}$ s'exerçant dans un diélectrique gazeux, homogène et ne portant aucune charge.

Solution. D'après les formules (35.11) et (36.8), pour les diélectriques gazeux la quantité $\varepsilon - 1$ est proportionnelle à la densité τ du diélectrique. En appliquant la formule (34.5) on trouve

$$\boldsymbol{f} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \operatorname{grad} E^2 - \operatorname{grad} \mathcal{P}. \tag{36.10}$$

Dans un champ électrostatique à l'équilibre la force $\boldsymbol{f}$ s'annule, i.e. les forces d'électrostriction $\frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \operatorname{grad} E^2$ sont compensées par les forces de pression électrostatique.

Le résultat (36.10) s'interprète aisément du point de vue de la théorie atomistique de la polarisation des diélectriques. Dans les gaz les molécules peuvent être considérées comme indépendantes les unes des autres. Chaque dipôle se trouvant dans un champ électrique est soumis à la force $(\boldsymbol{p}\nabla)\,\boldsymbol{E}$; les dipôles contenus dans l'unité de volume de gaz sont soumis à la force $(\boldsymbol{P}\nabla)\,\boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\nabla)\,\boldsymbol{E}$. Compte tenu du caractère potentiel du vecteur $\boldsymbol{E}$, on démontre facilement que $(\boldsymbol{E}\nabla)\,\boldsymbol{E} = {}^1/_2 \operatorname{grad} E^2$. La signification du premier terme de la formule (36.10) est ainsi explicitée.

2. Même problème que ci-dessus mais pour un diélectrique vérifiant la formule de Mossotti-Clausius (35.16).

Réponse.

$$\boldsymbol{f} = \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)}{24\pi} \operatorname{grad} E^2 - \operatorname{grad} \mathcal{P}. \tag{36.11}$$

3. Calculer la fonction de distribution $f(b)$ aux termes de second ordre par rapport à $(p_0E)/(kT)$ près.

Réponse.

$$f=\frac{1}{4\pi}\left(1+\frac{p_0E}{kT}b_z+\frac{p_0^2E^2}{2k^2T^2}b_z-\frac{p_0^2E^2}{6k^2T^2}\right). \tag{36.12}$$

4. En utilisant la formule de Boltzmann qui établit une relation entre l'entropie et la probabilité, calculer la partie de l'entropie d'un diélectrique gazeux à molécules polaires, qui dépend du champ électrique.

Solution. On définit l'entropie de l'unité de volume d'un diélectrique par la formule suivante:

$$S=-kn\int f\ln f\,d\Omega+\text{const} \tag{36.13}$$

(voir t. II, § 81). Comme nous voulons calculer la partie de l'entropie qui dépend du champ électrique, nous n'avons pas à tenir compte de la dépendance de la fonction de distribution f avec l'énergie cinétique des mouvements de translation et de rotation des molécules; il suffit donc l'intégrer par rapport aux directions des axes des molécules. En négligeant une constante additive qui importe peu, on trouve de (36.12) au deuxième ordre

$$\ln f=\frac{p_0E}{kT}b_z-\frac{p_0^2E^2}{6k^2T^2}+\frac{p_0^2E^2}{2k^2T^2}b_z.$$

En portant cette expression dans (36.13) et en rejetant toutes les intégrales qui s'annulent par raison de symétrie on obtient

$$S=-\frac{kn}{4\pi}\int\left(1+\frac{p_0E}{kS}b_z\right)\left(\frac{p_0E}{kT}b_z-\frac{p_0^2E^2}{6k^2T^2}\right)d\Omega=$$

$$=-\frac{np_0^2E^2}{4\pi kT^2}\int\left(b_z^2-\frac{1}{6}\right)d\Omega=-\frac{np_0^2}{3kT}\frac{E^2}{2T},$$

et d'après les formules (36.6) et (36.7)

$$S=-\alpha\frac{E^2}{2T}=-\frac{\varepsilon-1}{8\pi}\frac{E^2}{T}. \tag{36.14}$$

En utilisant la formule $U=\Psi+TS$ on en déduit la densité d'énergie interne $U=E^2/(8\pi)$. Comme on pouvait s'y attendre ce résultat coïncide avec (36.9), qu'on avait établi par une méthode thermodynamique.

5. Calculer la variation de la température d'un diélectrique gazeux à molécules polaires lorsqu'on lui applique, dans des conditions adiabatiques, un champ électrique et que pendant l'application du champ on maintient constant le volume du gaz (effet électrocalorique).

Solution. La formule (36.7) montre que pour ce type de diélectriques on a la relation suivante:

$$\frac{(\varepsilon-1)T}{\tau}=\text{const}, \tag{36.15}$$

d'où

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\tau=-\frac{\varepsilon-1}{T}.$$

En portant cette expression dans (31.16) on obtient après intégration sur E

$$T_2-T_1=-\frac{\varepsilon-1}{8\pi C_E}E^2,$$

où E est la valeur initiale de l'intensité du champ électrique. (Nous avons négligé dans l'intégration la variation de ε avec la température.) C_E désigne ici la capacité calorifique de l'unité de volume du diélectrique à volume et intensité de champ constants. On peut négliger la variation de la capacité calorifique avec l'intensité du champ électrique et on obtient alors

$$C_E = \frac{C_V \mathcal{P}}{RT},$$

où C_V est la chaleur molaire du gaz à volume constant. En utilisant la relation $C_P - C_V = R$, on peut exprimer C_E en fonction de la constante adiabatique $\gamma = C_P/C_V$. En portant le résultat ainsi obtenu dans la formule donnant $T_2 - T_1$, on trouve

$$T_2 - T_1 = -\frac{(\varepsilon - 1)(\gamma - 1)}{8\pi \mathcal{P}} E^2 T. \tag{36.16}$$

En utilisant (36.7) et la relation $\mathcal{P} = nkT$, on transforme cette dernière expression qui s'écrit alors

$$T_2 - T_1 = -\frac{(\gamma - 1)\varepsilon_0^2}{24\pi k^2 T} E^2. \tag{36.17}$$

Cette formule montre que lors de l'application d'un champ électrique dans des conditions adiabatiques, le diélectrique se refroidit. L'abaissement de température $T_2 - T_1$ est inversement proportionnel à la température absolue T. Prenons, par exemple, $\gamma = 1{,}4$, $p_0 = 10^{-18}$ un. CGSE, $E = 100$ un. CGSE, $T = 100$ K. La formule (36.17) donne alors $T_2 - T_1 \approx 3 \cdot 10^{-5}$ K.

§ 37. Piézoélectricité

1. Lorsqu'on soumet de nombreuses substances cristallines à des tensions ou à des compressions le long de certaines directions, on y fait apparaître une polarisation électrique. Sur les surfaces de ces cristaux polarisés apparaissent des charges électriques des deux signes. Cet effet découvert en 1880 par Pierre Curie (1859-1906) et son frère Paul Jacques Curie (1855-1941) fut appelé *effet piézoélectrique direct*. On observa plus tard cet effet sur des cristaux de tourmaline, de blende, de chlorate de sodium, d'acide tartrique, de sucre de canne, de sel de Seignette, de titanate de baryum, etc. Seuls les *cristaux ioniques* peuvent présenter l'effet piézoélectrique. Si les déformations des sous-réseaux des ions positifs et négatifs composant ces cristaux sont différentes, on voit apparaître sur les faces opposées de ces cristaux des charges électriques de signes contraires; c'est l'effet piézoélectrique. Si la déformation est homogène, on n'observe l'effet piézoélectrique que si le cristal comporte un ou plusieurs *axes polaires*. On désigne par axe (ou direction) polaire d'un cristal toute droite passant par le cristal et dont les extrémités ne sont pas équivalentes, i.e. ne sont pas interchangeables. Cela signifie que lorsqu'on fait tourner le cristal de 180° autour d'un axe perpendiculaire à l'axe polaire, le cristal ne se superpose pas à lui-même. D'une manière générale, l'effet piézoélectrique accompagnant une déformation homogène *ne s'observe que dans les cristaux qui ne possèdent pas de centre de symétrie*. En effet, si on soumet à une déformation homogène un cristal possédant un centre de symétrie à l'état non déformé, ce centre de symétrie subsistera après une déformation homogène. D'autre part, dans un cristal électriquement polarisé, il existe une direction particulière qui est celle du vecteur polarisation. Dans tous les cas où existe cette direction, le cristal est nécessairement dénué de centre de symétrie et c'est ce qui démontre notre assertion. Parmi les 32 classes cristallines, 21 ne possèdent pas de centre de symétrie; l'une de ces dernières classes possède cependant une telle combinaison d'éléments de symé-

trie que l'effet piézoélectrique ne peut s'y manifester. Ainsi les cristaux appartenant à 20 classes cristallines peuvent présenter l'effet piézoélectrique.

2. Nous allons caractériser l'effet piézoélectrique en prenant pour exemple les cristaux du quartz, le plus important matériau piézoélectrique, qui, grâce à l'excellence de ses propriétés électriques et mécaniques, trouve de nombreuses applications. A température et pression ordinaires, le quartz existe à l'état de variété α. Le cristal de quartz α appartient au système trigonal et possède trois axes binaires notés X_1, X_2, X_3 sur la figure 95. Ce sont les axes polaires du cristal. Chacun de ces axes relie deux arêtes opposées mais non équivalentes d'un prisme hexagonal. On se rend compte de la non-équivalence de ces arêtes, en observant que l'une des arêtes est contiguë à de petites faces du cristal (notées *a* et *b* sur la figure 95), tandis qu'à l'autre arête aucune facette semblable n'est associée. Le quatrième axe Z est un axe ternaire. On l'appelle *axe optique* du cristal, car une rotation de n'importe quel angle autour de cet axe n'exerce aucune influence sur la propagation de la lumière dans le cristal.

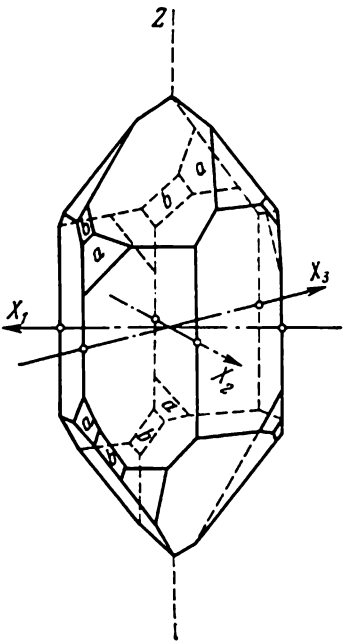


Fig. 95

Lorsqu'on soumet un cristal de quartz à des contraintes mécaniques, on voit apparaître aux extrémités d'un axe polaire (plus exactement sur les faces normales à cet axe) des charges électriques de signes opposés. Il n'est pas nécessaire que les forces extérieures soient appliquées le long d'un axe polaire, il suffit que sous l'action de ces forces le cristal subisse une dilatation ou une contraction le long de cet axe.

Jusqu'à 200 °C environ les propriétés piézoélectriques du quartz sont indépendantes de la température. Au-dessus de 200 °C l'intensité de l'effet piézoélectrique diminue lentement. A 576 °C le quartz α subit une transformation de phase en donnant le quartz β. Les cristaux de quartz β appartiennent au système hexagonal et de ce fait ne présentent pas d'effet piézoélectrique, conformément à ce qui a été dit plus haut. Lorsque la température s'abaisse au-dessous de 576 °C, le quartz reprend la structure de la variété α, mais cette transformation inverse s'effectue à plus basse température que la transformation directe (effet d'hystérésis). Dans ce qui suit il ne s'agira que de quartz α.

3. On explique facilement l'apparition de l'effet piézoélectrique en utilisant le modèle suggéré par Meissner (1882-1974). La formule chimique du quartz est SiO_2. Son réseau cristallin se compose des ions silicium positifs et des ions oxygène négatifs. Chaque ion silicium porte quatre charges élémentaires et chaque ion oxygène en porte deux. En première approximation on peut poser que les ions silicium et oxygène sont répartis dans des mailles hexagonales dont l'une est représentée sur la figure 96; cette vue apparaît si on observe le cristal suivant son axe optique qui est orthogonal au plan de la figure. Les ions silicium y sont représentés par de grandes billes *1*, *2* et *3* et les ions oxygène par des billes plus petites. Les deux espèces d'ions sont disposées le long d'une hélice dont le sens de rotation dépend du quartz — gauche ou droit (les figures 95 et 96 se rapportent au quartz gauche). L'ion silicium *3* se trouve à une profondeur un peu plus grande que l'ion *2* et celui-ci à plus grande profondeur que l'ion *1*. La dis-

position des ions oxygène est évidente. Dans son ensemble la maille est électriquement neutre et ne possède pas de moment électrique dipolaire.

Pour simplifier les développements ultérieurs nous remplacerons chaque couple d'ions oxygène voisins par un seul ion négatif de charge deux fois plus grande. Nous arrivons ainsi à un modèle simplifié de la maille représentée sur la figure 97, *a*. Si on soumet cette maille à une compression le long de l'axe polaire X_1 (fig. 97, *b*), l'ion silicium *3* et l'ion oxygène *4* chercheront à s'intercaler entre les ions adjacents. Sur le plan *A* de la plaque de quartz apparaîtra de ce fait une charge négative et sur le plan *B* une charge positive (*effet piézoélectrique longitudinal*).

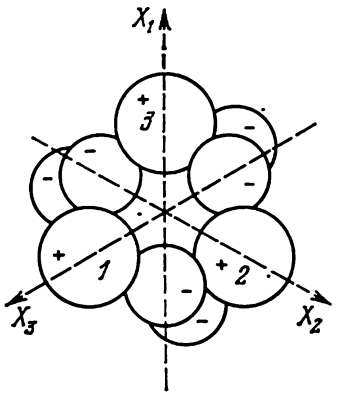


Fig. 96

A la suite d'une compression suivant une direction latérale (orthogonale aux axes polaire et optique, fig. 97, *c*), les ions silicium *1* et *2* se déplacent d'une même distance dans des sens opposés à l'intérieur de la maille. Les ions oxygène *5* et *6* subissent un déplacement analogue. La maille conserve sa symétrie par rapport au plan médian aux plans *C* et *D*, sur lesquels n'apparaît aucune charge électrique. Mais comme l'ion silicium *3* et l'ion oxygène *4* sont repoussés hors de la maille, il apparaît un moment dipolaire orienté dans le sens positif de l'axe polaire X_1. De ce fait une charge positive apparaît sur le plan *A* et une charge négative sur le plan *B* (*effet piézoélectrique transversal*). Nous voyons que les charges sont de signes opposés dans les effets longitudinal et transversal.

Ce modèle montre, d'une part, que si on remplace la contraction du cristal par sa dilatation, les signes des charges doivent s'inverser, et d'autre part, que la

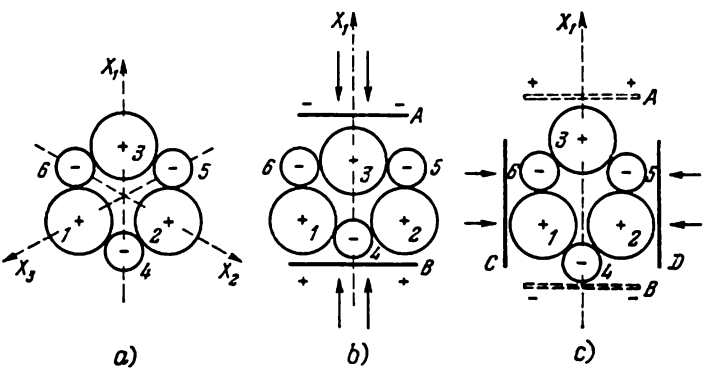


Fig. 97

polarisation est proportionnelle à la déformation du cristal (tant que celle-ci est petite). Or comme la force et la déformation résultante sont liées par la loi de Hooke (1635-1703), la polarisation du cristal résultant de l'effet piézoélectrique doit elle aussi être proportionnelle à la force appliquée. Enfin ce modèle montre qu'aucune contrainte appliquée le long de l'axe optique ne peut conduire à un effet piézoélectrique. Tous ces résultats sont confirmés par l'expérience.

4. Conformément aux considérations précédentes, pour obtenir des charges électriques aussi grandes que possible, il faut soumettre le cristal de quartz à une extension ou à une compression dirigée le long d'un axe polaire. Par conséquent les plaques et les tiges de quartz utilisées dans les expériences et les appareils piézoélectriques sont découpées de manière que les plans de coupe soient perpendiculaires à l'un des axes polaires. Cet axe est appelé aussi *axe électrique*; on le désigne par X. L'axe optique est confondu avec l'axe Z d'un trièdre de référence direct. L'axe Y de ce trièdre de référence est appelé *axe mécanique du cristal*. La figure 98 représente une plaque découpée selon ce schéma de coupe. Les longueurs des arêtes sont notées l (longueur), b (largeur), h (épaisseur).

Conformément aux explications concrètes que nous venons de donner, une extension ou une compression le long de l'axe optique Z ne produit pas d'effet

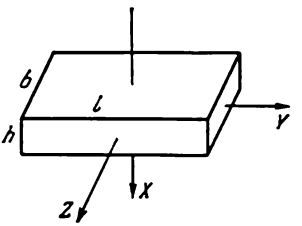


Fig. 98

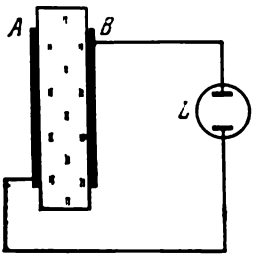


Fig. 99

piézoélectrique. A la suite d'une dilatation suivant l'axe électrique X, la face inférieure de la plaque prend une charge positive et la face supérieure prend une charge négative. On arrive au même résultat à la suite d'une compression le long de l'axe mécanique Y. En remplaçant la compression par une extension ou inversement, les signes des charges s'inversent. S'il n'y a pas de contraintes tangentielles, la polarisation de la plaque de quartz accompagnant sa compression ou son extension est donnée par l'expression

$$P_x = d_{11}(\tau_x - \tau_y), \tag{37.1}$$

où τ_x et τ_y sont les contraintes mécaniques s'exerçant parallèlement aux axes X et Y et d_{11} est une constante que l'on appelle *module piézoélectrique* (la signification de l'indice double de d sera explicitée au pt. 9). Pour le quartz

$$d_{11} = 6{,}99 \cdot 10^{-8} \text{ dyne}^{-1/2} \cdot \text{cm}.$$

Posons, par exemple, que $\tau_x = 10^6$ dynes·cm^{-2}, $\tau_y = 0$. La face inférieure de la plaque acquiert alors une charge positive d'une densité $\sigma = P_x = 6{,}99 \cdot 10^{-2}$ un. CGSE $= 2{,}33 \cdot 10^{-7}$ C/m^2. A cette charge correspond, à l'intérieur de la plaque, un champ électrique $E_x = 4\pi\sigma \approx 0{,}88$ un. CGSE ≈ 240 V/cm. Pour une épaisseur $h = 0{,}5$ cm, la plaque prend une différence de potentiel $\varphi \approx 120$ V.

Afin de pouvoir utiliser les charges de polarisation qui apparaissent sur les faces opposées d'une plaque de quartz lors de sa déformation, on applique sur ces faces des armatures métalliques. Sur ces armatures sont induites des charges égales et de signes opposés aux charges de polarisation et dans les fils extérieurs reliant entre elles les armatures, circule un courant électrique.

5. Les propriétés piézoélectriques du sel de Seignette sont plus marquées que celles du quartz. Aussi l'utilise-t-on dans de nombreux dispositifs piézoélectriques. Malheureusement le sel de Seignette est très friable et possède un bas point de fusion (+63 °C) et c'est ce qui limite ses utilisations pratiques. Mais il convient fort bien aux expériences de démonstration. On place une plaque de sel de Seignette entre deux armatures de laiton (fig. 99). Les armatures sont connec-

tées à une lampe au néon. Une lampe au néon est constituée par un tube en verre rempli de gaz néon raréfié. A l'intérieur de ce tube sont disposées deux électrodes métalliques. Lorsque la différence de potentiel entre les électrodes devient supérieure à une certaine valeur (potentiel d'allumage), une décharge électrique se produit et rend le néon luminescent. Si on frappe sur la plaque de sel de Seignette avec un marteau en caoutchouc, on observe à chaque coup une lueur dans le tube au néon. Dans cette expérience on peut remplacer le sel de Seignette par une plaque de titanate de baryum.

6. En 1881, Lippmann (1845-1921), en se fondant sur des considérations thermodynamiques, prédit l'existence d'un *effet piézoélectrique inverse*, qui fut mis en évidence par les frères Pierre et Paule Jacques Curie au cours de la même année. L'effet piézoélectrique inverse consiste en ce que, lors de l'application d'un champ électrique à un cristal piézoélectrique, on voit apparaître dans celui-ci des contraintes mécaniques qui déforment le cristal.

Supposons que l'on applique à une plaque de quartz (cf. fig. 98) un champ électrique parallèle à l'axe X. Supposons aussi que cette plaque soit soumise à des contraintes mécaniques τ_x et τ_y respectivement parallèles aux axes X et Y. Si $V = hbl$ est le volume de la plaque, le travail élémentaire que l'on doit dépenser pour la polariser dans un processus quasi statique est $\delta A_{\text{pol}} = VE\,dP = VE_x\,dP_x$. Le travail mécanique élémentaire fourni par les forces de traction quasi statiques appliquées aux arêtes h et l est $\delta A_{\text{méc}} = bl\tau_x\,dh + hb\tau_y\,dl$. Appliquons à ce processus la relation de la thermodynamique $dU = T\,dS + \delta A$. En la divisant par V et en notant s et u l'entropie massique et l'énergie interne, nous obtenons

$$du = T\,ds + E_x\,dP_x + \tau_x\frac{dh}{h} + \tau_y\frac{dl}{l}$$

ou

$$du = T\,ds + E_x dP_x + \tau_x d\ln h + \tau_y\,d\ln l.$$

En introduisant la fonction $g = u - Ts - E_xP_x - \tau_x\ln h - \tau_y\ln l$, nous mettons cette relation sous la forme

$$dg = -s\,dT - P_x\,dE_x - \ln h\,d\tau_x - \ln l\,d\tau_y.$$

Comme le second membre est la différentielle totale de la fonction g, on doit avoir

$$\left(\frac{\partial P_x}{\partial \tau_x}\right)_T = \left(\frac{\partial \ln h}{\partial E_x}\right)_T = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial E_x},$$

$$\left(\frac{\partial P_x}{\partial \tau_y}\right)_T = \left(\frac{\partial \ln l}{\partial E_x}\right)_T = \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial E_x},$$

et compte tenu de (37.1) on trouve

$$\frac{\partial h}{\partial E_x} = hd_{11},\quad \frac{\partial l}{\partial E_x} = -ld_{11}. \tag{37.2}$$

Ces formules décrivent l'effet piézoélectrique inverse pour le quartz. Dans l'approximation linéaire, qui est celle où la théorie est vérifiée, les formules (37.2) s'écrivent

$$\delta h = d_{11}hE_x = d_{11}\varphi, \tag{37.3}$$

$$\delta l = -d_{11}lE_x = -\frac{l}{h}d_{11}\varphi, \tag{37.4}$$

où δh et δl sont les accroissements absolus des dimensions de la plaque sous l'action du champ électrique appliqué E_x, $\varphi = hE_x$ est la différence de potentiel entre la face bl et la face opposée à la face bl (cf. fig. 98).

La formule (37.3) définit l'*effet piézoélectrique inverse longitudinal* et la formule (37.4) l'*effet inverse transversal*. Lorsqu'on applique un champ électrique parallèlement à l'axe électrique, on observe une variation de l'épaisseur de la plaque (effet longitudinal) et une variation de sa longueur (effet transversal). Si l'épaisseur h augmente, la longueur l diminue et inversement; les valeurs absolues des variations relatives de ces dimensions étant égales, le volume de la plaque reste constant. La valeur absolue de δh ne dépend pas de l'épaisseur de la plaque et se trouve déterminée par la différence de potentiel appliquée φ. Pour $\varphi = 3000$ V $= 10$ un. C.G.S.E., on trouve à l'aide de (37.3) $\delta h = 6{,}99 \cdot 10^{-7}$ cm $= 6{,}99 \cdot 10^{-3}$ µm. Si $l = 10h$, pour la même différence de potentiel l'effet transversal sera 10 fois plus grand. Le module de Young du quartz le long de l'axe électrique est égal à $\mathscr{E} = 7{,}87 \cdot 10^{11}$ dynes/cm². Pour l'épaisseur de la plaque $h = 0{,}5$ cm, l'effet longitudinal y fait apparaître dans l'exemple ci-dessus des tensions ou des pressions $\mathscr{P} = \mathscr{E}\,\delta h/4 \approx 1{,}1 \cdot 10^6$ dynes/cm² $\approx 1{,}1$ atm.

Les raisonnements thermodynamiques développées ci-dessus sont donnés sous l'hypothèse que la température reste constante. On peut donc dire que le module piézoélectrique d_{11} est le *module isotherme*. Il est facile de modifier les raisonnements afin de les appliquer aux processus adiabatiques. Les formules (37.1), (37.3) et (37.4) restent valables pour les processus adiabatiques, à condition de remplacer le module piézoélectrique isotherme d_{11} par le module adiabatique.

7. En ce qui concerne la relation entre les sens des changements qui se manifestent dans les effets piézoélectriques direct et inverse, on peut y appliquer le principe général de Le Chatelier (cf. t. II, § 51); il suffit pour cela d'utiliser les formules (37.1), (37.3) et (37.4). Par exemple, dans le cas de l'extension de la plaque le long de l'axe X (cf. fig. 98) ou de sa compression le long de Y, une charge positive apparaît sur sa face inférieure, et sur sa face supérieure apparaît une charge négative ($P_x > 0$). Autrement dit le champ électrique créé à l'intérieur de la plaque est orienté suivant la verticale ascendante ($E_x < 0$). Selon le principe de Le Chatelier, on peut considérer que ce champ apparaît pour s'opposer aux forces d'extension et de compression appliquées au système; ainsi apparaissent des forces qui cherchent à comprimer la plaque dans la direction X et à la dilater dans la direction Y. Si on augmente l'intensité E_x du champ, les forces de réaction augmentent aussi. Ces forces apparaissent aussi dans une plaque non déformée lors de l'application d'un champ électrique. Si le champ est dirigé vers le haut ($E_x < 0$), la plaque subit une contraction le long de l'axe X et une dilatation le long de l'axe Y. Cette conclusion est en accord avec les formules (37.3) et (37.4). Le même raisonnement s'applique à tous les autres cas.

8. On peut expliquer la nature physique de l'effet piézoélectrique inverse à l'aide du modèle que nous avons utilisé pour expliquer l'effet direct. Si par exemple on dépose sur les surfaces A et B (cf. fig. 97, *b*) des charges des signes indiqués, l'ion silicium *3* sera attiré vers la surface A et l'ion oxygène *4* le sera vers la surface B; la maille subira ainsi un allongement suivant l'axe X_1. Les ions silicium *1* et *2* seront repoussés par la surface B et les ions oxygène par la surface A; tous ces ions chercheront à s'intercaler entre les ions *3* et *4*, ce qui donne lieu à une contraction de la maille dans le sens transversal (le long de l'axe mécanique Y).

L'effet piézoélectrique inverse présente une ressemblance extérieure avec l'*électrostriction* (§ 33), tout en s'en distinguant essentiellement. L'électrostriction se manifeste dans tous les diélectriques placés dans un champ électrique *non homogène*, tandis que l'effet piézoélectrique inverse ne s'observe que dans les cristaux et encore dans certains seulement. L'effet piézoélectrique inverse se manifeste aussi si le champ électrique est *homogène*. Les forces d'électrostriction résultent de l'action d'un champ électrique sur un diélectrique polarisé, la polarisation de celui-ci étant due à ce même champ électrique. De ce fait les forces d'électrostriction sont *quadratiques par rapport au champ* et ne changent pas lorsqu'on inverse le sens du champ. L'effet piézoélectrique inverse résulte au contraire de l'action d'un *champ électrique extérieur* sur les sous-réseaux d'ions de

signes contraires préexistants dans le cristal. Les forces qui apparaissent sont *linéaires par rapport au champ* et s'inversent si on inverse le sens du champ.

9. Dans nombre de cristaux l'effet piézoélectrique peut résulter de l'application non seulement de forces normales de pression ou de tension, mais aussi de *forces tangentielles*. Dans un cristal l'état interne des contraintes élastiques se laisse caractériser par le tenseur symétrique des contraintes élastiques (cf. t. I, § 74);

$$\tau_{xx},\ \tau_{yy},\ \tau_{zz},\ \tau_{yz} = \tau_{zy},\quad \tau_{zx} = \tau_{xz},\ \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

(le premier indice indique la direction de la normale extérieure à la surface sur laquelle agit la force de tension et le second la direction de l'axe de coordonnées sur lequel est projetée cette force). Pour abréger l'écriture on n'affecte les composantes du tenseur de contraintes que d'un seul indice en posant

$$\tau_1 \equiv \tau_{xx},\qquad \tau_2 \equiv \tau_{yy},\qquad \tau_3 \equiv \tau_{zz},$$
$$\tau_4 \equiv \tau_{yz} = \tau_{zy},\quad \tau_5 \equiv \tau_{zx} = \tau_{xz},\quad \tau_6 \equiv \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

L'expérience montre que si les déformations sont petites, il existe une *relation linéaire* entre les composantes du vecteur polarisation $\boldsymbol{P}$ et les composantes du tenseur de contraintes. Cette relation est analogue à la loi de Hooke et a approximativement le même domaine d'application. On écrira donc dans le cas général

$$\begin{aligned} P_x &= d_{11}\tau_1 + d_{12}\tau_2 + d_{13}\tau_3 + d_{14}\tau_4 + d_{15}\tau_5 + d_{16}\tau_6,\\ P_y &= d_{21}\tau_1 + d_{22}\tau_2 + d_{23}\tau_3 + d_{24}\tau_4 + d_{25}\tau_5 + d_{26}\tau_6,\\ P_z &= d_{31}\tau_1 + d_{32}\tau_2 + d_{33}\tau_3 + d_{34}\tau_4 + d_{35}\tau_5 + d_{36}\tau_6. \end{aligned} \tag{37.5}$$

Ces relations montrent que dans le cas général les propriétés piézoélectriques d'un cristal sont caractérisées par *dix-huit constantes* que l'on appelle les *modules piézoélectriques*. Notons que le nombre des modules piézoélectriques indépendants est inférieur à dix-huit du fait de la symétrie du cristal. Plus la symétrie d'un cristal est élevée, plus petit est le nombre de modules piézoélectriques indépendants caractérisant ce cristal. Pour le quartz $d_{12} = -d_{11}$, $d_{25} = -d_{14}$, $d_{26} = -2d_{11}$, tous les autres modules piézoélectriques étant nuls. Ainsi les propriétés piézoélectriques du quartz sont caractérisées seulement par deux modules, d_{11} et d_{14}. Par suite

$$\begin{aligned} P_x &= d_{11}\tau_1 - d_{11}\tau_2 + d_{14}\tau_4,\\ P_y &= -d_{14}\tau_5 - 2d_{11}\tau_6,\\ P_z &= 0. \end{aligned} \tag{37.6}$$

$d_{14} = -2{,}0\cdot 10^{-8}$ dyne$^{-1/2}\cdot$cm. La valeur numérique de d_{11} a été donnée dans ce qui précède.

10. On connaît des centaines de substances qui pourraient en principe être utilisées dans les applications pratiques de la piézoélectricité. Mais les exigences supplémentaires auxquelles doivent satisfaire les matériaux piézoélectriques (grande valeur de l'effet, grandes résistances électrique et mécanique, résistance à l'humidité, etc.) réduisent notablement leur nombre. Le matériau le plus important est le *quartz*. Comme c'est un excellent isolant, on peut y créer des champs électriques de grande intensité, de l'ordre de 30 000 V/cm. Les applications scientifiques et techniques de l'effet piézoélectrique direct et inverse sont fort nombreuses. Sans nous arrêter sur les applications, notons le *manomètre piézoélectrique* que l'on utilise pour mesurer les pressions rapidement variables. Dans cet appareil une plaque de quartz convenablement découpée est placée au sein du gaz étudié. On détermine la pression d'après la valeur des charges piézoélectriques qui apparaissent sur la plaque. Notons aussi différents types de *transducteurs piézoélectriques*: *stabilisateurs* et *filtres piézoélectriques* pour la

radiotechnique, les *capteurs piézoélectriques* pour l'automation et la télémécanique, les *vibromètres* et les *lecteurs* pour la technique de prise de son, les *microphones*, les *téléphones*, les *hydrophones* pour l'acoustique, etc. D'importance particulière sont les *générateurs d'ultrasons à quartz* qui avaient été élaborés pendant la première guerre mondiale par le physicien français Langevin (1872-1946). Les déplacements qui apparaissent dans une lamelle de quartz sous l'action d'un champ électrique statique sont très petits. Mais on peut les accroître des milliers de fois et l'énergie des oscillations des millions de fois en utilisant un champ électrique alternatif. On utilise alors le phénomène de résonance en choisissant la fréquence du champ électrique appliqué égale à l'une des fréquences propres des oscillations mécaniques du quartz. Les fréquences propres du quartz sont définies par la relation

$$h = \frac{\lambda}{2} n,$$

où λ est la longueur de l'onde ultrasonique dans le quartz et n un nombre entier. Pour $n = 1$, on trouve la fréquence fondamentale de la lamelle et pour $n = 2, 3, 4, \ldots$ les harmoniques correspondants. A la fréquence de résonance du champ électrique, la lamelle de quartz devient un générateur puissant d'ultrasons. Langevin suggéra d'utiliser ce type de générateurs d'ultrasons pour le sondage des fonds marins et pour les communications sous-marines. Ce fut le point de départ des applications pratiques de la piézoélectricité.

§ 38. Pyroélectricité

1. Dans certains cristaux piézoélectriques à l'état d'équilibre thermodynamique le sous-réseau des ions positifs est décalé par rapport au sous-réseau des ions négatifs, de sorte que les cristaux sont *polarisés* même en l'absence de champ électrique. On dit alors que les cristaux présentant cette *polarisation spontanée* sont *pyroélectriques*. Le plus souvent la polarisation spontanée est masquée par les charges superficielles libres qui apparaissent par dépôt d'ions atmosphériques qui se propagent sur la surface du cristal grâce à sa conductibilité électrique qui, bien que faible, est toujours finie. Si on échauffe le cristal, les sous-réseaux ioniques se déplacent l'un par rapport à l'autre, ce qui fait apparaître des charges électriques de signes opposés sur sa surface. L'apparition de ces charges constitue l'*effet pyroélectrique direct*. Les substances manifestant cet effet sont dites *pyroélectriques* (du grec *puros* — « feu »).

L'une des substances pyroélectriques parmi les plus connues est la tourmaline. Un cristal de tourmaline enfoui dans de la cendre chaude attire d'abord, puis repousse la cendre. Il semble que cet effet était connu en Inde et en Sri Lanka (Ceylan) depuis les temps les plus reculés. En Europe, on ne le connut qu'en 1703, lorsque des marins hollandais importèrent de la tourmaline de Sri Lanka.

Pour déceler l'effet pyroélectrique, August Kundt (1839-1894) immergeait un cristal de tourmaline dans un mélange de minium et de soufre pulvérulents. Lors du malaxage de ces poudres, par frottement mutuel, les particules de minium s'électrisent positivement et les particules de soufre négativement. Par suite les particules rouges de minium sont attirées par les faces du cristal de tourmaline qui à l'échauffement se sont chargées négativement, tandis que les particules jaunes de soufre se déposent sur les faces chargées positivement. Les régions chargées du cristal se situent à ses extrémités opposées. On décèle la présence de charges électriques partout où les faces du cristal sont fissurées (les fissures résultent des contraintes locales). Pour se rendre compte que la tourmaline présente une polarisation spontanée à la température ordinaire, il suffit de casser en deux un cristal ; on constate que les plans de rupture sont toujours char-

gés d'électricité. Voigt (1850-1919) immergeait les deux morceaux d'un cristal de tourmaline qu'il venait de casser dans des coupes remplies de mercure qui étaient reliées par des fils à un galvanomètre. En mesurant la quantité d'électricité qui passait par le galvanomètre, on déterminait la valeur de la polarisation spontanée P du cristal. Voigt trouva ainsi qu'à 24 °C la limite inférieure de P était égale à 33 un. CGSE. Les champs électriques extérieurs ne modifient que fort peu la polarisation des cristaux pyroélectriques qui en l'absence de tout champ sont déjà polarisés presque à saturation.

Les variations de longue durée de la température ambiante, même si elles sont petites, peuvent faire apparaître des taches de poussière à proximité d'un cristal de tourmaline. Si on place un cristal de tourmaline sur une feuille de papier blanc, en une région d'un local où l'air est stagnant mais dont la température varie, on voit apparaître au bout de plusieurs mois des taches de poussière à proximité des extrémités du cristal. Sous l'action des forces électriques les grains de poussière se précipitent vers les extrémités du cristal de tourmaline où le champ est le plus intense et se déposent sur le papier.

Lorsqu'on fait varier la température du cristal, son volume varie, ce qui implique qu'il se déforme. La déformation du cristal s'accompagne de l'apparition de charges piézoélectriques. On en conclut que pour observer l'effet pyroélectrique proprement dit, il faut échauffer le cristal en maintenant constants son volume et sa forme. S'il n'y a pas de gradient de température le long du cristal, la polarisation qui apparaît dans ces conditions est appelée *effet pyroélectrique primaire* (ou *direct*). Quant à l'électrisation qui accompagne la déformation du cristal lors de son échauffement, on l'appelle *effet pyroélectrique secondaire* (ou *indirect*). En général l'effet secondaire est plus intense que l'effet primaire. Dans certains cristaux l'effet primaire est tellement faible qu'on n'arrive pas à le déceler. Enfin des charges électriques peuvent apparaître sur un cristal si son échauffement n'est pas homogène, i.e. en présence d'un gradient de température. C'est l'*effet pyroélectrique tertiaire* (ou *pseudo-effet*). Cette dénomination est abusive car tout échauffement non homogène crée un gradient de température et une dilatation thermique non homogène donnant naissance à des contraintes mécaniques et à des déformations non homogènes. En résultent des charges piézoélectriques que l'on peut abusivement identifier à l'effet pyroélectrique primaire ou secondaire si l'expérience n'est pas réalisée avec tous les soins nécessaires.

2. L'utilisation de cristaux ne présentant pas de centre de symétrie ne suffit pas encore pour que se manifeste l'effet pyroélectrique, i.e. pour qu'apparaisse une polarisation spontanée du cristal. En effet dans un cristal pyroélectrique doit exister, même en l'absence de champ électrique, une direction particulière le long de laquelle se manifeste la polarisation spontanée. Les cristaux de quartz, par exemple, ne possèdent pas d'axe de polarisation spontanée. Les trois axes électriques du quartz X_1, X_2, X_3 (cf. fig. 95) sont parfaitement équivalents et aucun d'eux ne peut se comporter d'une façon particulière. *Les cristaux piézoélectriques ne présentent pas nécessairement tous des propriétés pyroélectriques. Mais tout cristal pyroélectrique présente des propriétés piézoélectriques.* On trouve des cristaux à propriétés pyroélectriques dans *dix* classes cristallines seulement.

3. Outre l'effet direct, on connaît l'*effet pyroélectrique inverse*. Ce dernier consiste en ce que toute variation du champ électrique réalisée sans apport ou évacuation de chaleur (transformation adiabatique) s'accompagne d'une variation de température du cristal pyroélectrique. Cet effet inverse doit obligatoirement avoir lieu en vertu de l'existence de l'effet pyroélectrique direct et des lois de la thermodynamique. En effet, écrivons la relation de la thermodynamique $du = T\,ds + E\,dP$ pour l'unité de volume du cristal en supposant que le volume v reste constant lors de la transformation. Il s'ensuit que

$$d\,(u - Ts - EP) = -s\,dT - P\,dE,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E.$$

Comme il existe à volume constant une relation fonctionnelle entre les grandeurs s, E et T, on a

$$\left(\frac{\partial s}{\partial E}\right)_T = -\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_E \left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_s.$$

Introduisons la chaleur massique de la substance à volume et à intensité de champ constants :

$$c_{v,E} = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{v,E}.$$

On écrira alors

$$\left(\frac{\partial T}{\partial E}\right)_{v,s} = -\frac{T}{c_{v,E}}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{v,E}. \tag{38.1}$$

Cette formule exprime la relation entre les effets pyroélectriques direct et inverse.

§ 39. Ferroélectricité

1. Certains cristaux diélectriques se comportent dans un certain intervalle de température dit *domaine polaire* comme des pyroélectriques, i.e. se polarisent spontanément en l'absence de champ électrique extérieur. Aux frontières de cet intervalle de température ils subissent des transformations de phase et se transforment en d'autres variétés cristallines dénuées de polarisation spontanée. Ces diélectriques sont dits *ferroélectriques*. Les cristaux ferroélectriques se distinguent des cristaux pyroélectriques ordinaires par ce que le sens de la polarisation spontanée peut être inversé dans les ferroélectriques par application d'un champ électrique relativement faible ; dans le cas de cristaux pyroélectriques ordinaires, même des champs intenses ne suffisent pas à inverser le sens de leur polarisation. Toute droite parallèle au vecteur polarisation spontanée d'un ferroélectrique est appelée *axe polaire*. On connaît des ferroélectriques ayant un seul axe polaire (par exemple *sel de Seignette*) et d'autres possédant plusieurs axes polaires (par exemple le *titanate de baryum*).

La variété cristalline d'une substance ferroélectrique présentant une polarisation spontanée est appelée *phase polaire* ; les autres variétés cristallines dénuées de polarisation spontanée sont dites *phases non polaires*. La température T_C de transformation de la phase polaire en phase non polaire (et vice versa) est appelée *température de Curie diélectrique*, à la mémoire de Pierre Curie qui introduisit une notion analogue en ferromagnétisme (cf. §§ 74 et 79). En règle générale les substances ferroélectriques ne possèdent qu'une seule température de Curie au-dessous de laquelle elles existent sous forme d'une phase polaire et au-dessus de laquelle elles se présentent sous des variétés non polaires. Le sel de Seignette, les sels qui lui

sont isomorphes et les composés $Ag_2H_3IO_6$ et $Ag_2D_3IO_6$ possèdent deux points de Curie : *inférieur* T_{inf} et *supérieur* T_{sup}. Dans ces composés la polarisation spontanée n'existe que dans l'intervalle de température compris entre les deux points de Curie et ne s'observe à aucune autre température.

Les substances ferroélectriques présentent toute une gamme de propriétés diélectriques et physiques anomales (piézoélectriques, électro-optiques, etc.) entre lesquelles existent des relations thermodynamiques. Ces anomalies ont été décelées tout d'abord dans les cristaux du sel de Seignette, ce qui a conduit à parler de « substances seignetto-électriques » et de « seignetto-électricité ». A de nombreux points de vue les propriétés diélectriques de ces substances rappellent les propriétés magnétiques des ferromagnétiques (cf. §§ 74 et 79). Aussi les désigne-t-on aujourd'hui sous le nom de *ferroélectriques*. Le sel de Seignette $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ est un sel double de l'acide tartrique cristallisant avec quatre molécules d'eau. Il possède deux points de Curie : $T_{inf} = 255$ K (—18 °C) et $T_{sup} = 297$ K (+24 °C). Plusieurs autres tartrates, par exemple $NaNH_4C_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ (sel d'ammonium), $NaRbC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$, $NaTlC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$, présentent des propriétés ferroélectriques. Dès 1880 les frères Pierre et Paul Jacques Curie découvrirent l'existence d'un effet piézoélectrique anomalement grand dans les cristaux de sel de Seignette. En 1894, Pockels étudia quantitativement cet effet, ainsi que l'effet électro-optique (variation de l'indice de réfraction en fonction du champ électrique). Les propriétés diélectriques anomales du sel de Seignette furent mises en évidence par Valasek en 1921 ; ces propriétés furent étudiées plus en détail au début des années trente par I.V. Kourtchatov (1903-1960), P.P. Kobeko (1897-1954). En 1944, B.M. Wul (né en 1903) et I. M. Goldman (né en 1910) en U.R.S.S., Wainer et Solomon aux U.S.A. et Ogawa au Japon découvrirent indépendamment les uns des autres l'existence de propriétés diélectriques anomales sur des céramiques de titanate de baryum ($BaTiO_3$) ; c'est la substance ferroélectrique la plus répandue pour les applications, car elle possède d'excellentes propriétés mécaniques et une grande stabilité chimique (température de Curie $T_C = 393$ K = 120 °C). C'est cette dernière découverte qui fut à l'origine d'un développement rapide de la ferroélectricité et de ses applications. Il s'avéra que la ferroélectricité est un phénomène beaucoup plus fréquent que l'on ne se l'imaginait. Actuellement on connaît plus de cent substances ferroélectriques, sans compter un très grand nombre de solutions solides ferroélectriques. La ferroélectricité constitue aujourd'hui un chapitre important et se développant rapidement de la physique du solide. Dans un cours de Physique générale on ne peut consacrer à la ferroélectricité que quelques pages.

2. Nous allons étudier le comportement des ferroélectriques en prenant pour exemple le sel de Seignette et le titanate de baryum.

La phase non polaire du sel de Seignette (pour $T < T_{\text{inf}}$ et $T > T_{\text{sup}}$) appartient au *système orthorhombique* et présente des propriétés piézoélectriques. La figure 100 illustre la forme d'un cristal orthorhombique. Les faces les plus développées et les plus typiques sont les faces (001) ainsi que les faces prismatiques (110). Les faces (210), (120) et (010) sont plus petites. Dans la plupart des cas les faces (100)

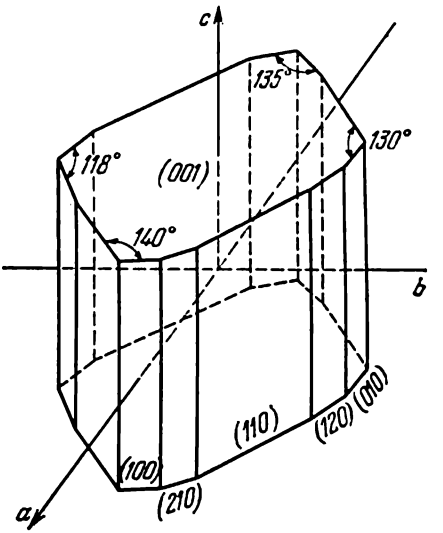


Fig. 100

sont très petites ou manquent totalement. La phase polaire du sel de Seignette appartient au *système monoclinique*; l'axe polaire *a* (100) est parallèle à l'axe *a* du cristal orthorhombique initial. (En général les phases polaires des substances ferroélectriques présentent une symétrie plus basse que celle des phases non polaires.) Le sel de Seignette manifeste des propriétés diélectriques anomalement grandes lorsque le champ extérieur $\boldsymbol{E}$ est dirigé parallèlement à l'axe *a*. Lorsque le champ $\boldsymbol{E}$ est parallèle aux axes *b* et *c* on n'observe aucune anomalie.

3. De toutes les substances ferroélectriques connues le titanate de baryum possède la structure cristalline la plus simple. Au-dessus de 120 °C, la phase non polaire présente la *structure cubique du type perowskite* représentée sur la figure 101 (cette structure est celle du minéral perowskite $CaTiO_3$). Comme la phase non polaire du titanate de baryum possède un centre de symétrie, elle ne jouit pas de propriétés piézoélectriques. Dans la gamme d'existence de la phase polaire entre 120 °C (point de Curie) et 5 °C les cristaux de

$BaTiO_3$ présentent une *symétrie tétragonale* et deviennent piézoélectriques. La transformation de phase qui s'effectue à 120 °C consiste en ce que l'une des arêtes de la maille cubique s'allonge et devient *axe de symétrie polaire tétragonal*, que l'on note *c*, tandis que les deux autres arêtes du cube se raccourcissent également et deviennent des *axes tétragonaux* notés *a*. Peu importe quelle arête du réseau cubique s'allonge et devient axe polaire *c*, mais si à la

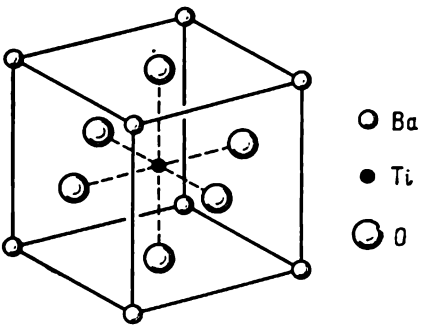


Fig. 101

suite d'une fluctuation une des arêtes s'allonge, c'est cet allongement qui déterminera la *direction privilégiée* le long de laquelle aura lieu l'allongement ultérieur. Puisque les trois arêtes de la maille cubique sont équivalentes, chacune d'entre elles peut devenir axe polaire. Il s'ensuit que la phase tétragonale comporte *six* directions possibles le long desquelles peut apparaître la polarisation spontanée: deux directions opposées correspondent à chacune des arêtes de la maille cubique. Au-dessous de 5 °C, le titanate de baryum subit une deuxième *transformation de phase* à la suite de laquelle apparaît une deuxième phase ferroélectrique qui est stable entre 5 et —90 °C et qui appartient au *système orthorhombique*. Sa maille élémentaire se déduit de la maille cubique initiale en allongeant cette dernière le long d'une diagonale de l'une de ses faces et en la comprimant suivant l'autre diagonale de cette même face. La diagonale allongée devient l'axe polaire du cristal orthorhombique. Il y a six faces et douze diagonales, mais comme celles-ci sont deux par deux parallèles, il y a dans la phase orthorhombique *douze directions* le long desquelles peut s'orienter le vecteur polarisation spontanée. A —90 °C il se produit la troisième transformation de phase et le cristal prend une symétrie *rhomboédrique* dont l'axe polaire est orienté suivant l'une des diagonales spatiales du cube (diagonales reliant les sommets diamétralement opposés du cube). Comme la maille cubique initiale comporte quatre diagonales spatiales équivalentes et qu'à chacune

de celles-ci on peut faire correspondre deux directions opposées de la polarisation spontanée, la phase rhomboédrique comporte *huit directions* d'orientation du vecteur polarisation spontanée.

4. La polarisation spontanée P_s d'un ferroélectrique varie en fonction de la température et s'annule aux limites de l'intervalle d'existence de la phase polaire. Pour le sel de Seignette P_s atteint sa valeur maximale à 5 °C : $P_s = 7{,}5 \cdot 10^2$ un. CGSE $= 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ C/cm^2. Pour le titanate de baryum la polarisation spontanée le long de l'axe polaire est près de 100 fois plus grande et à la température ordinaire $P_s = 7{,}8 \cdot 10^4$ un. CGSE $= 2{,}6 \cdot 10^{-5}$ C/cm^2.

La polarisation des ferroélectriques varie lorsqu'on leur applique un champ électrique. Pour les phases polaires la polarisation se compose de la polarisation spontanée $\boldsymbol{P}_s$ qui est indépendante du champ $\boldsymbol{E}$ et de la polarisation induite $\boldsymbol{P}_i$ due au champ appliqué. Comme la relation entre $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{E}$ n'est pas linéaire, les définitions usuelles de la polarisabilité α et de la permittivité diélectrique ε ne sont pas applicables aux phases polaires des ferroélectriques. Ce n'est que dans les champs faibles que l'on peut utiliser l'approximation linéaire et poser $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_s + \alpha \boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{P}_i = \alpha \boldsymbol{E}$. La relation usuelle entre la polarisation et le champ $\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}$ ne s'applique qu'à la *polarisation induite* dans les ferroélectriques dans les champs faibles. Le coefficient α est appelé *polarisabilité* (ou *susceptibilité diélectrique*) des ferroélectriques. Comme les cristaux sont anisotropes α est un *tenseur*. Pour simplifier nous négligerons l'anisotropie des cristaux, chose que l'on ne peut faire que si le champ $\boldsymbol{E}$ est parallèle à l'un des trois axes principaux du tenseur α. Dans ces conditions les propriétés tensorielles de la grandeur α ne se manifestent pas et on peut la traiter comme un *scalaire*. Dans les champs forts la polarisabilité α se définit par la dérivée $\alpha = \partial P_i / \partial E$ et dépend de l'intensité du champ électrique. La permittivité diélectrique est toujours liée à α par la relation $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$. Les valeurs numériques de ε et de α que l'on donne ci-dessous se rapportent aux mesures dans les champs faibles.

5. Une des propriétés caractéristiques des ferroélectriques est que les valeurs de la permittivité diélectrique des phases polaires sont *anomalement grandes*. Pour le sel de Seignette la valeur maximale de ε est $\approx 10\,000$ et pour le titanate de baryum $\varepsilon_{max} \approx 6000$-$7000$.

Les phases non polaires des substances ferroélectriques se comportent comme des *diélectriques linéaires* ordinaires dont la polarisation est proportionnelle à l'intensité du champ électrique. Mais la polarisabilité α et la permittivité ε varient avec la température. A proximité du point de Curie se trouve vérifiée la *loi de Curie* (1859-1906)-*Weiss* (1865-1940), i.e. la relation

$$\alpha = \frac{C}{T - T_0}, \tag{39.1}$$

où C et T_0 sont des constantes; T_0 s'appelle *température de Curie-Weiss*. T_0 ne se distingue que de très peu de la température de Curie T_C à laquelle se produit la transformation de la phase polaire en phase non polaire (ou vice versa). En général on confond ces deux températures. S'il y a deux points de Curie, à proximité de chacun

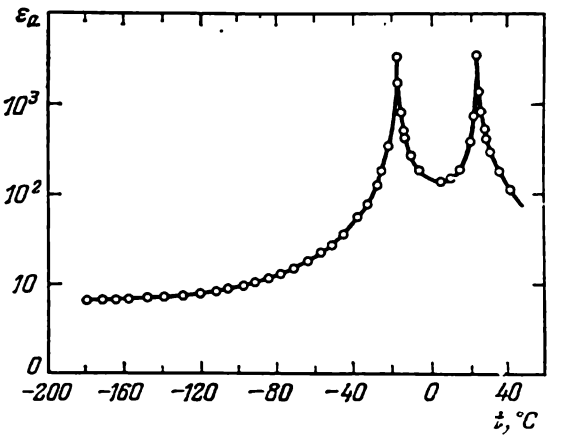


Fig. 102

d'eux, dans la phase non polaire se trouve vérifiée la *loi de Curie-Weiss*: pour le point de Curie supérieur, cette loi s'écrit comme ci-dessus et pour le point de Curie inférieur sous la forme

$$\alpha = \frac{C'}{T_0 - T} \tag{39.2}$$

(les constantes C' et T_0 ont évidemment des valeurs différentes). On voit que dans les phases non polaires à proximité des points de Curie les valeurs de ε et de α sont anomalement grandes.

La figure 102 représente la variation de la permittivité diélectrique ε_a en fonction de la température d'un monocristal de sel de Seignette mesurée le long de l'axe polaire a (d'après les mesures de Hablutzel). La figure 103 représente les résultats correspondants pour le titanate de baryum (d'après les mesures de Merz). Pour la phase quadratique du titanate de baryum on trouve deux valeurs principales de la permittivité diélectrique: ε_c mesurée le long de l'axe polaire et ε_a mesurée le long d'un axe orthogonal à l'axe polaire. Ces deux courbes ont été relevées sur un cristal monodomaine (voir plus loin). Pour les phases orthorhombique et quadratique ε a été mesuré le long de ces mêmes directions. Dans ces phases le cristal est divisé en *domaines* (voir plus loin) et c'est pour cela que les courbes relevées à champ électrique croissant et décroissant ne coïncident pas autour des points de transformations de phase.

6. Tout ferroélectrique polarisé spontanément dans la gamme des températures où il est polaire doit être *plus stable* que lorsqu'il se trouve dans un état non polarisé. S'il n'en était pas ainsi, dans l'état polaire le ferroélectrique passerait spontanément à l'état non polarisé, chose que l'on n'observe pas en réalité. Ainsi peut-on appliquer à l'étude des ferroélectriques les *principes généraux de l'équilibre thermodynamique*, par exemple le principe du minimum d'énergie ou de n'importe quelle autre fonction thermodynamique, suivant le paramètre thermodynamique que l'on maintient constant. Il résulte de l'application de ces principes que même en l'absence de

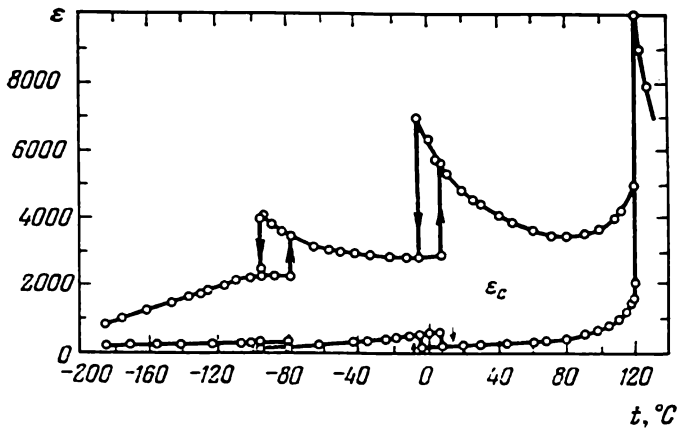


Fig. 103

champ électrique extérieur tout cristal ferroélectrique, de dimensions suffisantes, doit se subdiviser *spontanément* en régions se distinguant par la direction du vecteur polarisation ; ces régions sont appelées *domaines* (plus exactement *domaines diélectriques*). Un cristal polarisé crée un champ électrique non seulement en son intérieur, mais aussi dans l'espace environnant. Au champ extérieur correspond une certaine énergie électrique. L'énergie totale du cristal se compose de trois parties : 1) la somme des énergies internes de tous les domaines, 2) l'énergie du champ électrique extérieur, 3) l'énergie superficielle des « parois » de domaines. L'énergie du champ électrique extérieur est maximale lorsque tout le volume du cristal est polarisé de façon *homogène*. De ce fait la subdivision en domaines peut être « énergétiquement avantageuse », c'est-à-dire s'accompagner d'une diminution de l'énergie totale. Mais la subdivision en domaines fait croître l'énergie superficielle. Cette subdivision cesse dès que l'énergie totale devient minimale.

Dans le cas où le ferroélectrique ne possède qu'un *seul axe polaire*, il n'y a que deux directions de polarisation de sens opposés qui sont

parallèles à l'axe polaire. Ces ferroélectriques présentent une *structure stratifiée des domaines.* Dans les ferroélectriques possédant *plusieurs axes polaires* la structure des domaines est plus compliquée puisque le nombre des directions de polarisation des domaines est deux fois plus grand que le nombre d'axes polaires.

Les preuves expérimentales de l'existence des domaines étaient tout d'abord indirectes. On n'en obtint une preuve directe qu'en observant les cristaux ferroélectriques en *lumière polarisée.* Un autre procédé est fondé sur l'*attaque chimique* de la surface des cristaux. Ainsi le bord positif d'un domaine de $BaTiO_3$ est attaqué par les acides plus fortement que son bord négatif.

7. Du fait de l'existence de domaines, le moment dipolaire des cristaux ferroélectriques est nul en l'absence de champ extérieur; cela tient à la compensation mutuelle des polarisations des domaines polarisés en sens inverses. Le cristal se comporte comme s'il n'était pas polarisé. Lorsqu'on applique un champ électrique, certains domaines modifient leur orientation et certains autres croissent aux dépens des domaines adjacents. Le cristal acquiert ainsi une polarisation P. La variation de P avec l'intensité E du champ électrique est illustrée par la figure 104. Au début la croissance de P progresse le long de la courbe OA. Au point A la polarisation de tous les domaines est orientée parallèlement au champ E. A partir de ce point l'accroissement ultérieur de P est dû à la polarisation induite $P_1 = \alpha E$ et la courbe OA devient rectiligne (AD). Si on prolonge ce segment rectiligne jusqu'à son intersection avec l'axe des ordonnées, il y découpe un segment OC dont la longueur est égale à la polarisation spontanée P_s.

Si nous diminuons maintenant l'intensité du champ électrique on constate que la variation de la polarisation P s'effectue non pas suivant la courbe décrite DAO, mais suivant une courbe $DAB'A'D'$ passant au-dessus de la courbe DAO. Cet effet appelé *hystérésis diélectrique* est lié à l'existence de domaines diélectriques : les processus de réorientation et de croissance des domaines dans un champ électrique sont retardés à la manière des effets de blocage dûs aux forces de frottement sec (cf. t. I, § 17). Cela signifie que la polarisation P ne dépend pas de façon univoque de l'intensité E du champ appliqué et dépend de l'histoire du ferroélectrique. Si on inverse le champ électrique, la variation de P avec E sera représentée par la courbe $D'A'BAD$ symétrique de la courbe $D'A'B'AD$ par rapport à l'origine des coordonnées O. On obtient ainsi une courbe fermée $AB'A'BA$ appelée *boucle d'hystérésis diélectrique.* On peut obtenir des boucles d'hystérésis plus petites dont une est représentée sur la figure 104. On obtiendra des boucles d'hystérésis analogues en portant en ordonnées l'induction $D = E + 4\pi P$. Ces boucles ne se distinguent des courbes $P = P(E)$ que par l'échelle, puisque dans les ferroélectriques $E \ll D$, ce qui permet de négliger E.

8. On reproduit facilement les boucles d'hystérésis sur l'écran d'un oscillographe. A cette fin on branche en série deux condensateurs C_0 et C_x et on les alimente en courant alternatif à partir d'un même générateur (fig. 105). Le condensateur C_0 est rempli d'un diélectrique ordinaire « linéaire » de permittivité ε_0 et le condensateur C_x d'un ferroélectrique. Il est évident que la tension aux bornes du condensateur C_x est proportionnelle au champ E dans le ferroélectrique.

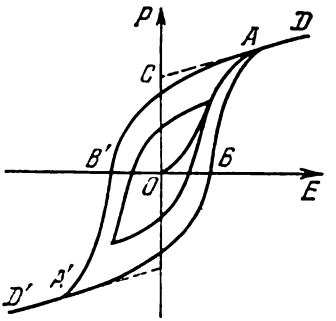


Fig. 104

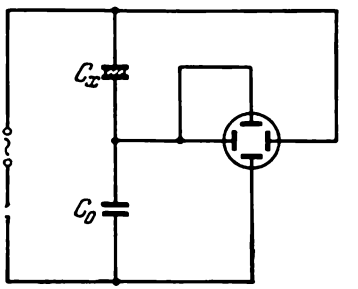


Fig. 105

Comme les condensateurs sont branchés en série, leurs charges et leurs inductions sont égales: $D_0 = D$. Comme la permittivité ε_0 est constante, la tension aux bornes du condensateur C_0 sera proportionnelle à l'induction $D_0 = D$. Si on applique aux plaques de déviation horizontale de l'oscillographe la tension existant aux bornes du condensateur C_x et sur les plaques de déviation verticale la tension provenant du condensateur C_0, on obtiendra sur l'écran de l'oscillographe la courbe $D = D(E)$, i.e. la boucle d'hystérésis.

9. Nous n'exposerons pas ici les théories microscopiques de la ferroélectricité qui sont encore loin d'être parachevées et nous nous contenterons de faire la remarque suivante. Supposons qu'à un diélectrique à dipôles induits soit applicable la relation $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + a\boldsymbol{P}$, où a est une constante. (Selon Lorentz pour les cristaux cubiques construits avec des atomes ponctuels isotropes $a = 4\pi/3$, cf. § 35). Notons β la polarisabilité de la molécule et N le nombre de molécules contenues dans l'unité de volume. On a $N\beta\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{P} = N\beta\boldsymbol{E} + Na\beta\boldsymbol{P}$, ou

$$(1 - Na\beta)\,\boldsymbol{P} = N\beta\boldsymbol{E}.$$

Lorsque $Na\beta = 1$ et $\boldsymbol{E} = 0$, cette équation a deux solutions: 1) $\boldsymbol{P} = 0$; 2) $\boldsymbol{P} \neq 0$. A ces solutions correspondent deux états du ferroélectrique; ne doit se réaliser que celui qui est plus stable thermodynamiquement. Supposons que l'état le plus stable est celui qui correspond à $\boldsymbol{P} \neq 0$. Le diélectrique se polarise alors spontané-

ment : si au début $P = 0$, toute fluctuation de polarisation P fera passer le diélectrique dans un état plus stable avec $P \neq 0$. La quantité $Na\beta$ dépend de la température (ne serait-ce que par suite de la dilatation thermique du diélectrique). La condition $Na\beta = 1$ définit la position du point de Curie. A proximité du point de Curie la polarisabilité du diélectrique $\alpha = N\beta/(1 - Na\beta)$ sera anomalement grande. En développant le dénominateur $(1 - Na\beta)$ en série de puissances de $(T - T_C)$ et en ne gardant que le terme linéaire, nous obtenons la relation $\alpha = \text{const}/(T - T_C)$, c'est-à-dire la loi de Curie-Weiss. Cet exemple ne prétend nullement au titre de « théorie de la ferroélectricité ». Il ne sert qu'à montrer qu'il est en principe possible d'expliquer l'existence d'une polarisation spontanée et la valeur anomalement grande de ε à proximité du point de Curie.

10. En comparaison des théories moléculaires de la ferroélectricité, les *théories thermodynamiques* paraissent plus concrètes. On devrait plutôt les définir comme des *théories phénoménologiques* puisqu'elles se fondent aussi bien sur la thermodynamique que sur certaines hypothèses phénoménologiques. Les théories phénoménologiques ne peuvent évidemment expliquer la nature physique du phénomène, mais permettent d'établir des relations entre différentes grandeurs caractéristiques. L'un des premiers à avoir élaboré une théorie thermodynamique de la ferroélectricité fut V. L. Ginsburg (né en 1916). Dans ce qui suit nous donnons un bref exposé de la théorie de Ginsburg.

Ecrivons la relation thermodynamique décrivant les processus d'équilibre dans un diélectrique soumis à l'action d'un champ électrique E sous la forme

$$dU = T\,dS - \mathcal{P}\,dV + E\,dP. \tag{39.3}$$

(Nous négligeons l'anisotropie du diélectrique et nous supposons qu'il n'y a pas de contraintes mécaniques. On pourrait écrire $E\,dD/(4\pi)$ à la place de $E\,dP$ conformément à ce qui a été dit au § 31.) En introduisant le potentiel thermodynamique $\Phi = U - TS + PV - EP$, cette relation s'écrira

$$d\Phi = -S\,dT + V\,d\mathcal{P} - P\,dE. \tag{39.4}$$

La fonction Φ dépend des variables indépendantes suivantes : la température T, la pression $\mathcal{P}$ et l'intensité E du champ électrique. Connaissant ces grandeurs on définit tous les autres paramètres intérieurs caractérisant le diélectrique à l'état d'équilibre thermodynamique. Il nous importe cependant de considérer certains écarts à l'équilibre thermodynamique et de poser que la polarisation P peut varier de façon *indépendante*. La transformation est alors *hors d'équilibre* et dans (39.3) on doit remplacer le signe d'égalité par le signe $\leqslant 0$. L'égalité (39.4) cède la place à l'inégalité

$$d\Phi \leqslant -S\,dT + V\,d\mathcal{P} - P\,dE.$$

Si les grandeurs T, $\mathcal{P}$, E sont constantes, on a $d\Phi \leqslant 0$. Il s'ensuit qu'*à l'état d'équilibre thermodynamique le potentiel thermodynamique est minimal (à condition que T, $\mathcal{P}$ et E sont constants)*. La valeur d'équilibre de la polarisation P se déduit de la condition du minimum de Φ.

11. Après ces quelques considérations thermodynamiques, passons à l'exposé de la théorie de Ginsburg. Le fondement de cette théorie est l'idée que *le passage de la phase polaire à la phase non polaire du ferroélectrique (et vice versa) est une transformation de phase de second ordre ou une transformation de premier ordre qui ne s'en distingue que fort peu* (cf. t. II, § 120). Ginsburg appliqua aux ferroélectriques la théorie des transformations de phase de second ordre développée par L. D. Landau (1908-1968). Supposons d'abord qu'il n'y a pas de champ élec-

trique ($E = 0$). Dans la phase polaire $P \neq 0$ et dans la phase non polaire $P = 0$. Admettons qu'au point de Curie la polarisation P varie de façon continue avec la température et qu'aux environs de cette température on peut développer le potentiel thermodynamique Φ en une série de puissances de P. Cette hypothèse est le point faible de la théorie de Ginsburg, de même d'ailleurs que de la théorie générale des transformations de phase de second ordre de Landau. Mais si le développement est réalisable, il ne doit comporter que des puissances paires de P, puisque le potentiel Φ ne doit pas varier lorsqu'on inverse le sens du vecteur P en l'absence de champ électrique. Compte tenu de cette remarque, on écrira

$$\Phi = \Phi_0 + AP^2 + \frac{1}{2} BP^4, \tag{39.5}$$

où Φ_0, A, B sont des fonctions de la température et de la pression. La polarisation d'équilibre P se déduit de la condition du minimum de Φ. Ceci conduit aux relations

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = 2(AP + BP^3) = 0, \tag{39.6}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial P^2} = 2(A + 3BP^2) > 0. \tag{39.7}$$

L'équation (39.6) a deux solutions:

1ère solution:

$$P = 0 \quad (T \geqslant T_C); \tag{39.8}$$

2e solution:

$$P^2 = -\frac{A}{B} \quad (T < T_C). \tag{39.9}$$

La première solution se rapporte à la phase non polaire ($T \geqslant T_C$), la seconde à la phase polaire ($T \leqslant T_C$). Au point de Curie $P = 0$ et par suite le coefficient A doit s'annuler: $A(T_C) = 0$. Pour la phase non polaire ($T \geqslant T_C$) la solution $P = 0$ doit satisfaire à la condition (39.7) et par conséquent pour $T > T_C$ on doit avoir $A > 0$. Pour la phase polaire ($T < T_C$) la solution $P = 0$ ne satisfait pas à la condition du minimum et on a $A < 0$, $B > 0$, conformément à (39.7), où P^2 est une quantité essentiellement positive. Par conséquent, à proximité du point de Curie, A est une fonction croissante de la température: $\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{T=T_C} > 0$. Dans le voisinage immédiat du point de Curie la quantité A peut être approchée par l'expression $A = \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{T_C} (T - T_C)$ et négliger la variation de B avec la température. Dans ces conditions on tire de (39.9)

$$P^2 = \text{const} \left(\frac{\partial A/\partial T}{B}\right)_{T_C} (T_C - T) \quad (T \leqslant T_C). \tag{39.10}$$

12. Selon la formule (39.4) l'entropie du ferroélectrique est définie par l'expression

$$S = -\frac{\partial \Phi}{\partial T} = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial T} - P^2 \frac{\partial A}{\partial T} - A \frac{\partial P^2}{\partial T} - \frac{P^4}{2} \frac{\partial B}{\partial T} - \frac{B}{2} \frac{\partial P^4}{\partial T}.$$

Au point de Curie tous les termes sauf $\partial \Phi_0/\partial T$ s'annulent. Cela signifie que l'entropie ne varie pas lors de la transformation de phase, ce qui implique que la chaleur latente est nulle, comme c'est le cas dans les transformations de phase de second ordre. Mais il se produit alors un saut de la capacité calorifique. En

effet au point de Curie la capacité calorifique de la phase non polaire est

$$c_{\mathcal{P}}^{\text{n. pol.}} = T\frac{\partial S}{\partial T} = -T\left(\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial T^2}\right)_C,$$

et pour la phase polaire on a

$$c_{\mathcal{P}}^{\text{pol}} = -T\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial T^2} - 2T\frac{\partial P^2}{\partial T}\frac{\partial A}{\partial T} = -\left(T\frac{\partial\Phi_0}{\partial T}\right)_C + 2\left[\frac{T}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)^2\right]_C,$$

d'où

$$\Delta c_{\mathcal{P}} = c_{\mathcal{P}}^{\text{pol}} - c_{\mathcal{P}}^{\text{n. pol.}} = 2\left[\frac{T}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)^2_{\mathcal{P}}\right]_C. \tag{39.11}$$

En éliminant B entre les formules (39.10) et (39.11) on trouve pour la polarisation spontanée P_s

$$P_s^2 = \frac{\Delta c_{\mathcal{P}}}{2\left[T\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{\mathcal{P}}\right]_C}(T - T_C). \tag{39.12}$$

Cette relation peut être vérifiée par l'expérience puisque toutes les grandeurs qui y figurent peuvent être mesurées indépendamment les unes des autres: $\Delta c_{\mathcal{P}}$ peut être mesuré par calorimétrie, P_s par mesure de la charge d'un condensateur rempli de la substance ferroélectrique, $\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_{\mathcal{P}}$ se déduit de la valeur de la permittivité diélectrique ε.

13. Calculons la polarisabilité α (ou la permittivité diélectrique $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$) dans les champs électriques faibles. Introduisons une nouvelle fonction thermodynamique $\Omega = \Phi + EP$. Il résulte de (39.4) que l'on doit avoir

$$d\Omega = -S\,dT + V\,d\mathcal{P} + E\,dP. \tag{39.13}$$

En prenant pour variables indépendantes T, $\mathcal{P}$ et P on trouve

$$E = \frac{\partial\Omega}{\partial p} = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial P}\right)_{T,\mathcal{P}}. \tag{39.14}$$

En vertu de (39.5) à proximité du point de Curie on doit avoir

$$\Omega = \Phi_0 + AP^2 + \frac{1}{2}BP^4. \tag{39.15}$$

Comme Φ_0, A, B ne dépendent que de la température et de la pression, on a

$$E = 2(AP + BP^3).$$

Au-dessus du point de Curie ($T > T_C$) on peut négliger le terme BP^3. On obtient alors une relation linéaire entre P et E avec la polarisabilité $\alpha = 1/(2A)$; en remplaçant A par $(\partial A/\partial T)_C(T - T_C)$

$$\alpha^{\text{n. pol.}} = \frac{1}{2(\partial A/\partial T)_C(T - T_C)} \quad (T > T_C). \tag{39.16}$$

Au-dessous du point de Curie la polarisabilité α est définie par la dérivée:

$$\alpha = \frac{\partial P}{\partial E} = \frac{1}{2(A + 3BP^2)}.$$

Dans cette expression on peut négliger la polarisation induite et poser $P = P_s$. Compte tenu de (39.10) on obtient

$$\alpha^{\text{pol}} = \frac{1}{4\,(\partial A/\partial T)_C\,(T_C - T)} \quad (T < T_C). \tag{39.17}$$

On voit qu'à des distances égales du point de Curie $\alpha^{\text{n.pol}} = 2\alpha^{\text{pol}}$.

14. Pour conclure mentionnons l'existence de l'*antiferroélectricité*. Cet effet est de la même nature physique que la ferroélectricité et consiste en ce qui suit. Dans certains cristaux et dans certains intervalles de température des ions de même espèce voisins s'orientent spontanément non pas parallèlement mais *antiparallèlement* les uns aux autres. On dit alors que ces cristaux sont des *antiferroélectriques*. Un cristal antiferroélectrique peut être considéré comme constitué

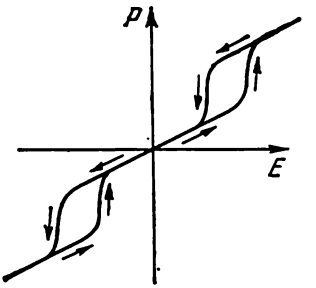


Fig. 106

de deux sous-réseaux imbriqués; les moments dipolaires des ions de l'un des sous-réseaux sont orientés parallèlement dans un sens et ceux de l'autre sous-réseau sont orientés suivant une direction diamétralement opposée, de sorte que le moment dipolaire de tout le cristal est nul. Le passage de l'arrangement ordonné des ions à l'arrangement désordonné se produit au *point de Curie antiferroélectrique*: l'arrangement ordonné s'observe généralement au-dessous du point de Curie et l'arrangement désordonné au-dessus de ce point. Au point de Curie on observe un maximum de la permittivité diélectrique; ce maximum est plus petit que pour la majorité des ferroélectriques. Lorsqu'on applique un champ électrique, il apparaît une polarisation électrique P. Comme en l'absence de champ $P = 0$, dans les champs faibles la relation entre P et E est pratiquement linéaire. Si le champ est suffisamment fort, un cristal antiferroélectrique peut passer à l'*état ferroélectrique*. Dans le cas de transformations de phases « induites » par des champs forts, on observe des *boucles d'hystérésis doubles* (fig. 106).

CHAPITRE II

LE COURANT ÉLECTRIQUE

§ 40. La densité de courant et la loi de la conservation des charges électriques

1. Le courant électrique est le *mouvement ordonné des charges électriques* que l'on appelle ici des *porteurs de courant*. Dans les métaux et les semiconducteurs les porteurs de courant sont des *électrons*, tandis que dans les électrolytes et les gaz ionisés ce sont des *ions positifs et négatifs*.

Considérons d'abord le cas simple où tous les porteurs de courant sont identiques (par exemple les électrons dans les métaux). Isolons

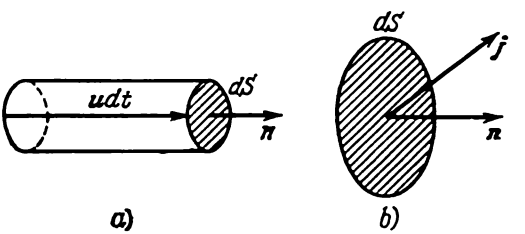


Fig. 107

en pensée, dans le milieu parcouru par le courant, un élément de volume physiquement infiniment petit et notons $\boldsymbol{u}$ le vecteur vitesse moyen des porteurs considérés dans cet élément de volume. Ce vecteur $\boldsymbol{u}$ est appelé *vitesse moyenne*, *vitesse de dérive* ou encore *vitesse de mouvement ordonnée* des porteurs de courant. Notons n la *concentration des porteurs de courant*, i.e. leur nombre par unité de volume. Considérons un élément de surface dS infiniment petit orthogonal à la vitesse $\boldsymbol{u}$ et construisons sur cet élément de surface un cylindre droit infiniment court de hauteur $u\,dt$, comme indiqué sur la figure 107, *a*. Toutes les particules contenues dans ce cylindre traverseront au cours du temps dt l'aire dS et transporteront à travers cette aire le long de la direction du vecteur $\boldsymbol{u}$ une charge électrique $dq = neu\,dS\,dt$, où e est la charge d'une particule. Ainsi la charge électrique transportée à travers l'unité de surface par unité de temps est $j = neu$. Le vecteur

$$\boldsymbol{j} = ne\boldsymbol{u} \tag{40.1}$$

est appelé *densité de courant électrique*. La grandeur de ce vecteur représente la charge transportée par unité de temps à travers l'unité de surface perpendiculaire au courant. Le sens du vecteur $\boldsymbol{j}$ coïncide avec le sens de l'écoulement ordonné de l'électricité positive.

On généralise facilement ces considérations au cas où il y a plusieurs espèces de charges créant le courant. La densité de courant est alors définie par

$$\boldsymbol{j} = \sum_i n_i e_i \boldsymbol{u}_i, \tag{40.2}$$

où la sommation se fait sur toutes les espèces de porteurs de courant (n_i, e_i, $\boldsymbol{u}_i$ désignent respectivement la concentration, la charge et la vitesse de mouvement ordonné du i-ième porteur).

Fixons arbitrairement le sens positif de la normale à l'élément de surface dS et menons suivant cette direction le vecteur unitaire $\boldsymbol{n}$. Si les particules sont positives la charge transportée suivant la normale $\boldsymbol{n}$ sera positive ou négative suivant que les particules se meuvent dans le sens du vecteur $\boldsymbol{n}$ ou en sens inverse. Si les particules sont négatives, le résultat sera inverse. D'une façon générale la quantité d'électricité transportée se laisse exprimer sous la forme

$$dq = (\boldsymbol{jn})\, dS = j_n\, dS. \tag{40.3}$$

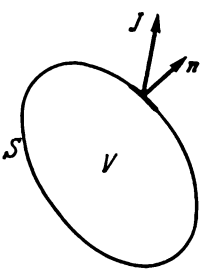


Fig. 108

Cette formule reste valable même si l'élément de surface dS n'est pas perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{j}$ (fig. 107, *b*). Pour s'en rendre compte il suffit de remarquer que la composante du vecteur $\boldsymbol{j}$, orthogonale au vecteur $\boldsymbol{n}$, ne transporte aucune charge à travers dS.

2. L'une des lois fondamentales de la Physique est la *loi de la conservation des charges électriques* (cf. § 2). Exprimons cette loi sous une forme quantitative à l'aide des grandeurs macroscopiques suivantes : la densité de charge ρ et la densité de courant électrique $\boldsymbol{j}$. Traçons dans le milieu une surface fermée S délimitant le volume V (fig. 108). La quantité d'électricité sortant par seconde du volume V à travers la surface S est donnée par l'intégrale $\oint j_n\, dS$. Cette même quantité d'électricité peut être représentée sous la forme $-\partial q/\partial t$, q étant la charge contenue dans le volume V. En égalant ces deux expressions on obtient

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\oint_S j_n\, dS. \tag{40.4}$$

(Nous utilisons ici le symbole $\partial/\partial t$ de la dérivée partielle pour souligner que la surface S doit être fixe.) En représentant q sous la forme

$q = \int \rho\, dV$ et en transformant l'intégrale de surface en intégrale de volume $\int \operatorname{div} j\, dV$, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\int \operatorname{div} j\, dV.$$

Comme cette relation doit être vérifiée pour n'importe quel volume V on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0. \tag{40.5}$$

Les formules (40.4) et (40.5) expriment *en électrodynamique macroscopique la loi de la conservation des charges.* La formule (40.5) est appelée aussi *équation de continuité.* Sous forme implicite ces équations font partie du système des équations fondamentales de Maxwell.

Si le courant est *stationnaire*, i.e. indépendant du temps, les formules (40.4) et (40.5) deviennent

$$\oint j_n\, dS = 0, \tag{40.6}$$

$$\operatorname{div} j = 0. \tag{40.7}$$

Dans ce chapitre nous aurons surtout affaire aux courants stationnaires (continus).

§ 41. La loi d'Ohm

1. L'un des plus importants procédés d'excitation des courants électriques dans les corps consiste à y faire subsister un champ électrique. L'expérience montre que pour de nombreux corps (les métaux par exemple) la densité de courant électrique j est dans de larges limites proportionnelle à l'intensité E du champ électrique. C'est là l'une des principales lois de l'électrodynamique quoique ce ne soit pas une loi fondamentale. On l'appelle *loi d'Ohm* (1789-1854). La forme mathématique de cette loi est

$$j = \lambda E, \tag{41.1}$$

où λ est une grandeur constante pour un matériau donné que l'on appelle *conductivité électrique.* Elle dépend de l'état physique du corps (température, pression, etc.). En toute rigueur la loi d'Ohm n'est vérifiée que pour les corps *physiquement homogènes.* La grandeur inverse de la conductivité électrique est la *résistivité électrique du matériau* :

$$\rho = \frac{1}{\lambda}. \tag{41.2}$$

Dans le système d'unités gaussien (et donc dans le système d'unités électrostatiques) λ a pour dimension l'inverse du temps.

Son unité de mesure est s^{-1}. La résistivité ρ a donc pour unité la seconde (s). Il est évident que la coïncidence des dimensions de la résistivité électrique et du temps ne signifie nullement que ces grandeurs soient identiques en ce qui concerne leur nature physique. Cette coïncidence n'a lieu que dans les systèmes d'unités gaussien et électrostatique. Dans tous les autres systèmes ces grandeurs ont des dimensions différentes (cf. § 44).

2. Lorsque le courant est stationnaire, la densité spatiale d'électricité dans un conducteur homogène est égale à zéro. En effet les courants stationnaires vérifient l'équation (40.7). Ecrivons cette équation sous la forme div $(\lambda \boldsymbol{E}) = 0$ ou div $\left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \boldsymbol{D}\right) = 0$. Comme, par hypothèse, le milieu est homogène, $\lambda = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$ et cette équation se réduit à la forme div $\boldsymbol{D} = 0$. On en tire, compte tenu du théorème de Gauss (13.5), $\rho = 0$.

Dans le cas de courants stationnaires, on ne peut trouver des charges électriques macroscopiques que sur la surface du milieu conducteur ou aux endroits où ce milieu est inhomogène. De ce point de vue le champ électrique des courants stationnaires est analogue au champ électrostatique. L'analogie est cependant plus profonde. Dans le cas de courants stationnaires la densité des charges électriques reste constante dans le temps en tout point de l'espace, quoique l'électricité soit en état d'écoulement : c'est que les charges qui s'écoulent sont aussitôt remplacées par d'autres. L'expérience montre (de même que les équations de Maxwell) que ces charges créent dans l'espace environnant le même champ coulombien que celui que feraient des charges immobiles de même densité. Il s'ensuit que *le champ électrique des courants stationnaires est un champ à potentiel.*

Néanmoins le champ électrique des courants stationnaires se distingue essentiellement des champs électrostatiques. Le champ électrostatique est le champ coulombien des charges fixes. Si les charges sont en état d'équilibre à l'intérieur des conducteurs, le champ est nul. Le champ électrique des courants stationnaires est aussi un *champ coulombien*, mais comme les charges qui le créent sont en mouvement, ce champ subsiste à l'intérieur des conducteurs. S'il n'en était pas ainsi, les conducteurs ne seraient pas parcourus par des courants électriques, conformément à la loi d'Ohm (41.1). Les lignes de force d'un champ électrostatique sont toujours orthogonales à la surface du conducteur. Cette condition n'est pas obligatoire pour le champ électrique des courants stationnaires (voir problème 1 ci-après).

PROBLÈMES

1. Soient deux plaques homogènes AB et CD parallèles et de grande longueur, fabriquées en un matériau mauvais conducteur d'électricité (en bois par exemple) (fig. 109). Leurs bords A et C sont court-circuités par un bon conducteur d'électricité (en métal par exemple), tandis que leurs bords B et D se trouvent

sous tension V. Calculer l'intensité du champ électrique et la forme des lignes de force électriques entre les plaques (en négligeant les effets de bord). La distance entre les plaques est d et leurs largeurs $AB = CD = h$.

Solution. Traçons un système de coordonnées rectangulaires comme indiqué sur la figure 109 (l'axe Z est perpendiculaire au plan de la figure et parallèle aux côtés longs des plaques). Le champ cherché dérive d'un potentiel et vérifie l'équation de Laplace $\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 = 0$. Sur le conducteur AC (i.e.

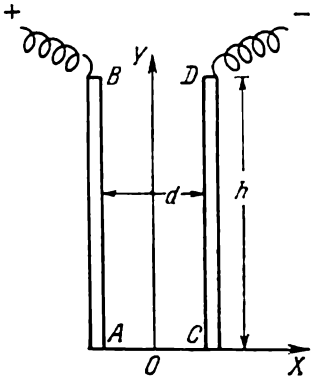


Fig. 109

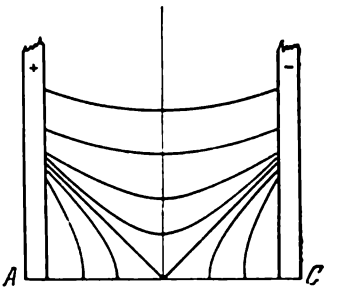


Fig. 110

pour $y = 0$), le potentiel doit être constant; nous le poserons égal à zéro. La solution cherchée doit être de la forme $\varphi = \alpha\, xy + \beta y$, où α et β sont des constantes. Par raison de symétrie, le potentiel φ ne doit pas changer lorsqu'on remplace x par $-x$ et par suite $\beta = 0$.

L'intensité du champ est

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\alpha y, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\alpha x.$$

On détermine la constante α en calculant la différence de potentiel entre les points A et B (ou entre les points C et D). Les potentiels des points B et D sont respectivement égaux à $\varphi_B = +V/2$, $\varphi_D = -V/2$. L'intensité E_y du champ à la surface de la plaque AB (i.e. pour $x = -d/2$) est $E_y = -V/(2h) = \alpha d/2$, d'où $\alpha = -V/(hd)$. Finalement

$$E_x = Vy/(hd), \quad E_y = Vx/(hd).$$

L'équation des lignes de force $\partial x/E_x = dy/E_y$ est de la forme

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$

d'où $y^2 - x^2 = K$, i.e. les lignes de force sont des hyperboles équilatérales. Pour $K > 0$ l'axe des hyperboles se confond avec l'axe Y, et pour $K < 0$ avec l'axe X. Pour mettre en évidence la signification de la constante K, notons a la distance du sommet de l'hyperbole à l'origine des coordonnées. Pour $K > 0$ les coordonnées du sommet de l'hyperbole sont $(0, a)$. Elles doivent vérifier l'équation $a^2 - 0^2 = K$, d'où $K = a^2$. On trouve de même pour $(K < 0)$ $K = -a^2$. On obtient ainsi deux familles d'hyperboles définies par: $y^2 - x^2 = a^2$, $x^2 - y^2 = a^2$, et ayant pour asymptotes les bissectrices des angles des coordonnées correspondantes (fig. 110). Les lignes de forces hyperboliques de la première famille se laissent représenter par la méthode expérimentale décrite

au § 3. Il est par contre difficile de reproduire les lignes de force de la seconde famille du fait de la petitesse de la composante du champ E_x.

2. L'espace entre les armatures d'un condensateur plan est rempli de plusieurs lames de diélectriques de faibles conductivités. La permittivité et la conductivité du diélectrique varient de $\varepsilon_1 = 4$, $\lambda_1 = 10^{-9}$ ohm^{-1}·cm^{-1} sur une surface du diélectrique jusqu'à $\varepsilon_2 = 3$, $\lambda_2 = 10^{-12}$ ohm^{-1}·cm^{-1} sur l'autre surface. Le condensateur est branché sur une pile de f.é.m. constante. Calculer la grandeur et le signe de la charge libre sommaire q qui apparaît dans le diélectrique lorsque le circuit est parcouru par un courant continu $\mathcal{J} = 10^{-7}$ A traversant le diélectrique dans le sens 1—2.

Réponse.

$$q = \frac{\mathcal{J}}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right) = 78 \text{ un. C.G.S.E.} = 2{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ C.}$$

3. L'espace entre les armatures d'un condensateur plan est occupé par deux lames d'épaisseurs h_1 et h_2 de diélectriques homogènes de faibles conductibilités. Les permittivités et les conductivités du premier et du second diélectrique sont respectivement égales à ε_1, λ_1 et ε_2, λ_2. Calculer la densité σ des charges superficielles libres sur la frontière de séparation des deux diélectriques, qui apparaît lorsqu'on applique au condensateur une tension constante V.

Réponse.

$$\sigma = \frac{V}{4\pi}\,\frac{\varepsilon_2\lambda_1 - \varepsilon_1\lambda_2}{h_1\lambda_2 + h_2\lambda_1}.$$

§ 42. Démonstration des lois d'Ohm et de Joule-Lenz

1. Nous supposerons dans ce qui suit que le champ électrique $\boldsymbol{E}$ peut varier dans le temps. Nous considérerons le cas d'un métal, quoique nos développements s'appliquent surtout aux autres milieux conducteurs (électrolytes, gaz ionisés, etc.). Dans les métaux les porteurs de courant sont les électrons dits *libres*, i.e. les électrons qui sont faiblement liés aux ions du réseau cristallin où ils se déplacent librement. Les expériences de Tolman et Stuart (cf. § 97) fournissent une preuve directe de cette assertion. En l'absence de champ électrique ou d'autres forces régulières pouvant agir sur les électrons, toutes les directions de mouvement des électrons sont équiprobables. De ce point de vue les mouvements des électrons dans les métaux ressemblent aux mouvements thermiques des molécules gazeuses. Nous dirons qu'il s'agit d'un mouvement *désordonné* et noterons $v_{\text{dés}}$ la vitesse des électrons en mouvement désordonné. Pour nos développements ultérieurs il est indifférent de savoir si le mouvement désordonné des électrons est d'origine thermique ou autre (cf. t. II, § 4, pt. 3).

2. En présence d'une force régulière, au mouvement désordonné des électrons vient se superposer un mouvement ordonné dit *de dérive*. Si le champ des forces régulières est homogène, tous les électrons libres seront animés de la même *vitesse de dérive* que nous noterons v_d ou $\boldsymbol{u}$. La vitesse totale $\boldsymbol{v}$ d'un électron se compose de sa vitesse désordonnée $v_{\text{dés}}$ et de sa vitesse de dérive $\boldsymbol{u}$: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\text{dés}} + \boldsymbol{u}$. En méca-

nique classique le mouvement d'un électron est décrit par l'équation

$$m\frac{dv}{dt} \equiv m\frac{d}{dt}(v_{\text{dés}}+u) = F + F_{\text{col}}, \tag{42.1}$$

où F est la force régulière qu'applique à l'électron le champ de forces extérieur et F_{col} la force à laquelle se trouve soumis l'électron lors de ses collisions avec les ions ou les autres électrons. En moyennant l'équation (42.1) sur tous les électrons, la dérivée $dv_{\text{dés}}/dt$ s'annule et la force F_{col} est remplacée par sa valeur moyenne $\langle F_{\text{col}} \rangle$. Notons que dans le calcul de cette moyenne il n'est pas nécessaire de tenir compte des collisions entre les électrons puisque ces collisions ne modifient pas la quantité de mouvement $\sum mv \equiv \sum m(v_{\text{dés}} + u)$ de l'ensemble des électrons qui intervient dans le calcul de la valeur moyenne de la vitesse v. On doit entendre par F_{col} les forces qui agissent sur les électrons lors de leurs collisions avec les ions du réseau cristallin. La force moyenne F_{col} devient nulle s'il n'y a pas de mouvement de dérive. Si la vitesse de dérive est petite, on peut développer F_{col} suivant les puissances de u et ne garder que le terme linéaire :

$$F_{\text{col}} = -m\frac{u}{\tau_{\text{in}}}, \tag{42.2}$$

où τ_{in} est une constante ayant la dimension du temps. Dans cette approximation l'équation du mouvement de dérive d'un électron s'écrit

$$m\frac{du}{dt} + m\frac{u}{\tau_{\text{in}}} = F. \tag{42.3}$$

La force F_{col} ainsi que le temps τ_{in} résultent de l'inertie des électrons. C'est pour cela que la grandeur τ_{in} peut être appelée *temps d'inertie* des électrons dans le métal. Pour concrétiser cette notion, considérons l'exemple suivant. Supposons que $F = 0$ et qu'à l'instant initial $t = 0$ les électrons soient animés d'un mouvement de dérive avec la vitesse $u = u_0$. Appliquant l'équation (42.3) nous obtenons

$$u = u_0 e^{-t/\tau_{\text{in}}}, \tag{42.4}$$

ce qui signifie qu'en l'absence de forces régulières extérieures le mouvement de dérive s'amortit avec le temps suivant une loi exponentielle telle qu'au bout du temps τ_{in} la vitesse u diminue de e fois.

Utilisons la relation $j = neu$ et introduisons la notation

$$\lambda = \frac{ne^2\tau_{\text{in}}}{m}. \tag{42.5}$$

L'équation (42.3) se laisse alors écrire sous la forme

$$j + \tau_{\text{in}}\frac{dj}{dt} = \lambda\frac{F}{e}. \tag{42.6}$$

Si la force régulière F et le coefficient λ sont constants, on tire de (42.6)

$$j = \lambda \frac{F}{e} + j_0 e^{-t/\tau_{\text{in}}}.$$

Pour $t \gg \tau_{\text{in}}$

$$j = \lambda \frac{F}{e}. \tag{42.7}$$

Toutes les relations ci-dessus sont valables quelle que soit la nature de la force régulière F excitant le courant électrique. Si le courant est dû à un champ électrique E, on a $F = eE$ et la relation (42.6) s'écrit

$$j + \tau_{\text{in}} \frac{dj}{dt} = \lambda E. \tag{42.8}$$

Si E = const

$$j = \lambda E. \tag{42.9}$$

C'est l'expression de la *loi d'Ohm* pour le cas où la concentration n des électrons libres et le temps d'inertie τ_{in} sont constants et ne dépendent pas de l'intensité E du champ électrique ; la conductivité λ est définie par (42.5). La loi d'Ohm (42.9) reste valable pour des champs alternatifs, comme le montre la formule (42.8). Il faut seulement qu'au cours du temps τ_{in} le courant ne varie qu'infiniment peu, ce qui implique que soit vérifiée la condition

$$\left| \tau_{\text{in}} \frac{dj}{dt} \right| \ll |j|. \tag{42.10}$$

3. *On peut exprimer le temps d'inertie des électrons dans le métal en fonction du temps de libre parcours moyen des électrons entre deux collisions consécutives avec les ions du réseau.* Comme la masse de l'électron est négligeable devant celle des ions, on peut admettre qu'à chaque collision avec un ion l'électron perd entièrement son mouvement ordonné. On n'a pas à tenir compte du mouvement désordonné des électrons puisqu'il ne contribue pas au courant électrique. Cela revient à admettre qu'à chaque collision la vitesse de l'électron devient nulle. Faisons d'abord un calcul approché en admettant que le temps de libre parcours τ entre deux collisions consécutives est la même pour tous les électrons et pour toutes les collisions. Supposons que l'électron se meut dans un champ électrique E constant. Après collision il se meut avec une accélération constante $a = eE/m$ et à l'instant de la collision suivante l'électron possède une vitesse $v = a\tau$ de sorte que sa vitesse moyenne entre deux collisions consécutives est $u = a\tau/2$ et la densité de courant $j = neu =$

$= \frac{ne^2\tau}{2m}E$. Par conséquent

$$\lambda = \frac{ne^2\tau}{2m}. \tag{42.11}$$

Avec les simplifications adoptées $\tau_{in} = \tau/2$.

Ce calcul n'est pas absolument exact même si on admet qu'à chaque collision l'électron perde en totalité sa vitesse ordonnée. En réalité le temps de libre parcours τ varie d'une collision à l'autre. Pour tenir compte de ce fait, considérons le comportement d'un seul électron ayant subi un grand nombre de collisions. Notons $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ les temps de libre parcours de l'électron entre les collisions successives et $u_1, u_2, \ldots, u_N$ les valeurs moyennes de la vitesse ordonnée pendant ces temps. La vitesse ordonnée moyenne sur tout l'intervalle de temps considéré sera égale à

$$\bar{u} = \frac{\sum \tau_i u_i}{\sum \tau_i} = \frac{a}{2}\frac{\sum \tau_i^2}{\sum \tau_i}.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par N et en passant à la limite $N \to \infty$, écrivons l'expression ci-dessus sous la forme $u = a\overline{\tau^2}/(2\bar{\tau})$, où $\bar{\tau}$ et τ^2 sont les valeurs moyennes du temps de libre parcours et de son carré:

$$\bar{\tau} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum \tau_i, \quad \overline{\tau^2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum \tau_i^2.$$

Ces mêmes valeurs moyennes de τ et de τ^2 caractérisent non seulement le comportement d'un électron donné, mais aussi celui de tous les électrons. Par conséquent la conductivité λ doit s'exprimer par la formule suivante:

$$\lambda = \frac{ne^2}{2m}\frac{\overline{\tau^2}}{\bar{\tau}},$$

et $\tau_{in} = \overline{\tau^2}/(2\bar{\tau})$. Dans le cas particulier où tous les temps $\tau_1, \tau_2, \ldots$ seraient égales, on retrouve la formule (42.11).

Exprimons le rapport $\overline{\tau^2}/\bar{\tau}$ en fonction du temps de libre parcours moyen $\bar{\tau}$. Considérons un faisceau de n_0 électrons qui, à l'instant initial $t = 0$, se trouvaient tous dans les mêmes conditions. Lors de leurs mouvements ultérieurs ces électrons entrent en collision avec les ions du réseau et quittent le faisceau. Soit $n(t)$ le nombre d'électrons subsistant dans le faisceau à l'instant t. Le nombre moyen $-dn$ de particules qui ont été éliminées du faisceau entre les instants t et $t + dt$ par collisions est proportionnel à n et peut être posé égal à $-dn = \alpha n\, dt$, où α est une constante positive. On en tire $n = n_0 e^{-\alpha t}$. Chacune de ces $(-dn)$ particules se mouvait sans collisions

pendant le temps t. Par conséquent

$$\bar{\tau} = -\frac{1}{n_0}\int t\,dn, \quad \overline{\tau^2} = -\frac{1}{n_0}\int t^2\,dn.$$

En intégrant par parties, transformons la deuxième intégrale :

$$\overline{\tau^2} = \int_0^\infty t^2\,de^{-\alpha t} = -2\int_0^\infty te^{-\alpha t}\,dt = -\frac{2}{n_0\alpha}\int t\,dn = 2(\bar{\tau})^2.$$

Ainsi $\overline{\tau^2}/(2\bar{\tau}) = \bar{\tau}$ et par conséquent $\tau_{\text{in}} = \bar{\tau}$,

$$\lambda = \frac{ne^2}{m}\bar{\tau}. \tag{42.12}$$

Précisons la signification physique de la constante α. Exprimons-la en fonction du temps $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau} = -\frac{1}{n_0}\int t\,dn = \int_0^\infty t\,de^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha}.$$

Ainsi

$$n = n_0 e^{-t/\bar{\tau}}. \tag{42.13}$$

Cette formule est analogue à la formule (88.3) du deuxième tome de notre cours.

Néanmoins, nous utiliserons parfois la formule simplifiée (42.11) et ce pour les raisons suivantes. En théorie cinétique des gaz, dans l'étude des effets de transport nous avons utilisé les mêmes simplifications que celles mises en œuvre ici pour établir la formule (42.11) ; nous avons admis notamment que les longueurs et les temps de libre parcours étaient les mêmes pour toutes les molécules et pour toutes les collisions. Pour pouvoir comparer la théorie cinétique des gaz et la théorie de la conduction électrique, il faut que les hypothèses simplificatrices soient les mêmes afin que la précision des calculs soit comparable dans les deux cas.

4. A la place du temps d'inertie τ_{in} ou du temps de libre parcours moyen $\bar{\tau}$ on peut introduire d'autres grandeurs liées à ces temps. On utilise souvent la notion de *mobilité des particules* (notamment de l'électron). On appelle mobilité d'une particule la valeur de la vitesse de dérive qu'elle acquiert sous l'action d'une force constante F unitaire ou sous l'action d'un champ électrique constant E égal à l'unité. La mobilité due à l'action d'une force F sera notée B et l'autre b (cf. t. II, § 64). Ainsi

$$u = BF = bE. \tag{42.14}$$

Les deux mobilités sont liées par la relation

$$b = |e|B. \tag{42.15}$$

La conductivité λ s'exprime en fonction de la mobilité à l'aide de la formule

$$\lambda = Be^2n = b \mid e \mid n. \tag{42.16}$$

On utilise la notion de mobilité chaque fois qu'il s'agit de courants électriques dans les électrolytes et les gaz ionisés. Dans ces cas il y a plusieurs espèces de porteurs de courant — des ions positifs et négatifs. Pour trouver la conductivité λ il faut faire la somme des expressions (42.16) relatives à ces différents porteurs. Par exemple, dans les solutions d'électrolytes, il y a deux espèces d'ions et à la place de (42.16) on écrira

$$\lambda = B^-e_-^2n^- + B^+e_+^2n^+ = b^- \mid e_- \mid n^- + b^+ \mid e_+ \mid n^+, \tag{42.17}$$

où l'indice « — » se rapporte aux ions négatifs et l'indice « + » aux ions positifs.

On peut simplifier la formule (42.17) en remarquant que pour faire apparaître un champ électrique réel il suffit de séparer une si petite quantité de charges positives et négatives qu'on peut la négliger dans les calculs (cf. § 10). On peut donc admettre que l'électrolyte (ou le gaz) est *électriquement neutre* (*quasi neutre*) et poser qu'il vérifie avec une grande précision la relation suivante:

$$\sum n_i e_i = 0. \tag{42.18}$$

Dans le cas particulier où les charges des ions positifs et négatifs sont égales en valeurs absolues, cette relation se réduit à $n^- = n^+$, i.e. à l'égalité des concentrations des deux espèces d'ions. En rejetant les indices auprès de n et de e on obtient

$$\lambda = (B^- + B^+)\, e^2n = (b^- + b^+) \mid e \mid n. \tag{42.19}$$

5. Ces considérations (confirmées par l'expérience) conduisent à conclure que dans certaines conditions on peut observer des écarts à la loi d'Ohm et parfois cette loi peut être en défaut. Pour que la loi d'Ohm soit vérifiée, il faut que pendant le passage du courant les concentrations des porteurs de courant et leurs temps d'inertie τ_{in} (ou les mobilités correspondantes) restent constants. Il est aussi nécessaire que dans les champs variant dans le temps l'inertie des porteurs de courant soit négligeable. Quantitativement cette dernière condition implique que les variations de courant au cours d'intervalles de temps comparables à τ_{in} soient négligeables. Dans le cas de champs alternatifs périodiques, cela signifie que la période T de variation du champ électrique doit être grande par rapport à τ_{in}.

La loi d'Ohm peut être en défaut dans les *champs forts* où des effets non linéaires peuvent se manifester. Dans ces cas l'approximation linéaire (42.2), que nous avons adoptée dans le développement de la force moyenne $\langle \boldsymbol{F}_{col} \rangle$ suivant les puissances de $\boldsymbol{u}$, devient inacceptable. Un champ est dit *fort* si pendant son libre parcours

moyen un porteur de courant acquiert une vitesse comparable à sa vitesse thermique. Un champ est dit faible s'il vérifie l'une des conditions suivantes:

$$F\tau \ll mv_{\text{dés}} \text{ ou } eE\tau \ll mv_{\text{dés}}. \tag{42.20}$$

Voyons si la condition (42.20) est satisfaite lorsqu'un courant électrique traverse un conducteur métallique, le cuivre par exemple. Sa conductivité $\lambda = 5{,}3\cdot 10^{17}$ s^{-1} (à 20 °C), sa densité $\rho = 8{,}9$ g/cm^3, son poids atomique $A = 63$. En admettant, ce qui est raisonnable, qu'à chaque atome de cuivre revient un électron libre, la concentration des électrons libres est égale à

$$n = \frac{N\rho}{A} \approx 8{,}5\cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

(N est le nombre d'Avogadro). Calculons le temps d'inertie de l'électron d'après la conductivité λ:

$$\tau_{\text{in}} = \frac{m\lambda}{ne^2} \approx 2{,}5\cdot 10^{-14} \text{ s}.$$

(La mobilité $b = e\tau_{\text{in}}/m = 1{,}3\cdot 10^4$ un. CGSE $= 44$ cm^2/(s·V).) La vitesse désordonnée moyenne des électrons évaluée à l'aide des formules de la théorie cinétique classique des gaz est $v_{\text{dés}} \approx \approx \sqrt{3kT/m} \approx 10^7$ cm/s. La vitesse réelle est plus grande d'un ordre de grandeur environ, car pour les électrons libres dans les métaux on doit remplacer la statistique classique de Boltzmann par la statistique quantique de Fermi (cf. t. II, § 82). En posant $v_{\text{dés}} \sim \sim 10^8$ cm/s, nous trouvons pour des valeurs intermédiaires entre les champs faibles et forts $E \sim mv_{\text{dés}}/(e\tau) \sim 0{,}75\cdot 10^4$ un. CGSE $\sim \sim 2\cdot 10^8$ V/m. Ce n'est qu'à partir d'une telle intensité de champ que pourraient se manifester des *effets non linéaires* accompagnant le passage d'un courant électrique à travers un métal. En fait l'intensité du champ électrique ne peut atteindre une valeur aussi grande car un tel champ aurait instantanément vaporisé le métal. La plus grande densité de courant admissible dans des fils de cuivre est posée égale à $j = 10^3$ A/cm^2 $= 3\cdot 10^{12}$ un. C.G.S.E. A cette densité de courant correspond une intensité du champ électrique $E = j/\lambda \approx \approx 0{,}5\cdot 10^{-5}$ un. CGSE $\approx 0{,}15$ V/m, valeur 10^9 fois plus petite que la valeur calculée ci-dessus. C'est la raison de la validité de la loi d'Ohm pour les métaux.

La loi d'Ohm n'est pas vérifiée dans les gaz ionisés. Aux basses pressions l'électron acquiert au cours du libre parcours, même dans des champs électriques faibles, une énergie cinétique comparable à l'énergie kT du mouvement thermique. Par suite, même dans les champs faibles, l'approximation linéaire (42.2) cesse d'être valable et on observe des *écarts* à la loi d'Ohm. Si on fait croître le champ électrique, les électrons acquièrent une énergie suffisante pour ioniser

les atomes et les molécules du gaz. La concentration des ions augmente fortement et le courant croît aussi. Si l'intensité du champ augmente encore, il se produit une *rupture diélectrique* du gaz (une étincelle jaillit).

La loi d'Ohm peut être mise en défaut aux points de contact de deux semiconducteurs ou d'un semiconducteur avec un métal. Ces régions sont des conducteurs typiquement « *non linéaires* » ou « *non ohmiques* », en ce sens que la relation entre j et E y est non linéaire. La conductivité de ces zones de contact peut même être unilatérale, ce qui signifie que le courant ne peut pratiquement passer que dans un seul sens. Les conducteurs non linéaires présentent une importance pratique exceptionnelle. Ni la radiotechnique ni l'électronique modernes n'auraient existé si tous les corps conducteurs d'électricité se comportaient conformément à la loi d'Ohm.

6. A tout électron en mouvement avec la vitesse v dans un champ électrique homogène est fourni chaque seconde un travail $vF = (u + v_{\text{dés}})F$. En sommant sur tous les électrons, les termes $v_{\text{dés}} F$ s'éliminent et il ne subsiste que le travail régulier lié au mouvement de dérive des électrons. Ce travail, rapporté à l'unité de volume du métal, est égal à $nuF = jF/e$. Dans le cas des métaux ce travail sert à accroître l'énergie *interne* (*thermique*), puisque le passage du courant électrique ne modifie pas la structure interne des métaux. Ainsi la *puissance de la chaleur* dégagée par le courant dans l'unité de volume d'un conducteur est égale à

$$Q = \frac{1}{e}(jF) = \frac{\lambda}{e^2}F^2 \tag{42.21}$$

ou

$$Q = \frac{1}{\lambda}j^2. \tag{42.22}$$

Cette dernière formule exprime la *loi de Joule-Lenz sous la forme locale* (*différentielle*) : la chaleur Q dégagée par seconde dans l'unité de volume est proportionnelle au carré de la densité de courant et inversement proportionnelle à la conductivité du milieu conducteur. Sous la forme (42.22) la loi de Joule-Lenz est absolument *générale* en ce sens qu'elle *ne dépend pas de la nature des forces* excitant le courant électrique. Si la force F est de nature purement électrique ($F = eE$) on écrira

$$Q = (jE) = \lambda E^2. \tag{42.23}$$

Il est évident que la formule (42.23) est moins générale que la formule (42.22).

L'expérience montre que la loi de Joule-Lenz est vérifiée dans le cas des électrolytes. Il en découle que le travail fourni par le champ électrique dans les électrolytes n'est pas dépensé pour la production d'ions. En solution les ions apparaissent du fait de la *dissociation des*

molécules résultant de leur dissolution (c'est la dissociation électrolytique). Le champ électrique extérieur n'intervient donc pas dans le processus de dissociation.

7. La théorie classique que nous venons d'exposer reste valable, sans modifications majeures, en physique quantique. Mais la théorie classique est une *théorie cinématique* puisqu'elle ne permet de définir ni la mobilité ni la concentration des porteurs de courant. On n'arrive à définir ces grandeurs qu'en *théorie dynamique*. Toutes les tentatives faites pour construire une théorie dynamique sur des bases classiques se sont soldées par des échecs, les résultats n'étant pas conformes à l'expérience. La théorie quantique permet (ou plutôt permet en principe) d'élaborer une théorie dynamique de la conductibilité électrique conforme aux données expérimentales.

8. Pour conclure évoquons un des résultats de la théorie classique. Quoique la méthode classique d'établissement de ce résultat soit erronée, le résultat lui-même est correct. Il s'agit du lien entre la conductibilité électrique et la conductibilité thermique des métaux. Les métaux sont bons conducteurs de l'électricité et de la chaleur. Cela tient à ce que l'électricité et la chaleur y sont transportées par les mêmes particules — les *électrons libres*. Le rôle que jouent les ions dans le transfert de la chaleur est négligeable. En appliquant à la conductibilité électronique de la chaleur les formules de la théorie cinétique des gaz (cf. t. II, § 89), on peut exprimer la conductibilité thermique des métaux par la formule

$$\chi = \frac{1}{3} n\bar{v} c_v \bar{l}, \tag{42.24}$$

où $\bar{v}$ est la vitesse moyenne du mouvement désordonné des électrons, c_v la capacité calorifique à volume constant rapportée à un électron, $\bar{l}$ la longueur de libre parcours moyen de l'électron. La formule (42.11) avait été établie dans la même approximation. Ecrivons-la sous la forme suivante:

$$\lambda = \frac{ne^2}{2m\bar{v}} \frac{\bar{l}}{\bar{v}}. \tag{42.25}$$

En divisant membre à membre (42.24) par (42.25), on obtient

$$\frac{\chi}{\lambda} \approx \frac{2}{3} \frac{m\bar{v}^2}{e^2} c_v. \tag{42.26}$$

Cette formule reste valable en mécanique quantique. Mais la théorie quantique met en œuvre la statistique de Fermi-Dirac, tandis que la théorie classique utilise la statistique de Boltzmann (parfois de façon erronée). De ce fait en théorie classique on pose $c_v = {}^3/_2 k$ et $m\bar{v}^2 \approx 3kT$, ce qui conduit au résultat suivant:

$$\frac{\chi}{\lambda} = 3 \left(\frac{k}{e}\right)^2 T. \tag{42.27}$$

(Nous n'avons pas tenu compte de la différence entre $\overline{v^2}$ et $\overline{v^2}$, car en théorie approchée cette différence n'affecte pas la précision des résultats.)

La formule (42.27) a été établie par Drude (1863-1906). Drude ne tenait pas compte de la distribution des vitesses des électrons (comme nous l'avons fait nous aussi). Lorentz, ayant pris en compte la distribution maxwellienne des vitesses thermiques des électrons, obtint la même formule mais avec le facteur 2 au lieu du facteur 3. Ce qui importe cependant ce n'est pas la valeur du facteur numérique, mais le fait que le rapport χ/λ est proportionnel à la température absolue T et qu'il est le même pour tous les métaux. C'est la loi de Wiedemann (1826-1899)-Franz. Ce résultat fut confirmé par l'expérience avec une précision acceptable, ce qui fut considéré pendant longtemps comme une preuve de l'exactitude des prémisses de la théorie classique des conductibilités électrique et thermique des métaux, quoique dans la question de la capacité calorifique des électrons dans les métaux cette théorie se trouvât en contradiction avec les données expérimentales (cf. t. II, §§ 69, 84). Cette contradiction fut levée par Sommerfeld (1868-1951) qui appliqua la statistique de Fermi-Dirac aux problèmes des conductibilités électrique et thermique des métaux et à la théorie de la capacité calorifique du gaz électronique dans les métaux. Il retrouva la formule (42.27) où le facteur 3 était remplacé par le facteur $\pi^2/3$. Ainsi la théorie classique de Drude et la théorie quantique de Sommerfeld conduisaient pratiquement aux mêmes résultats. Cette coïncidence tient à ce que dans la théorie classique on utilisait des valeurs incorrectes de $\overline{v^2}$ et de c_v. Par un heureux hasard ces deux erreurs se compensaient mutuellement, de telle sorte que le produit $\overline{v^2}c_v$ prenait une valeur pratiquement correcte. Nous reviendrons sur cette question au § 99.

PROBLÈMES

1. Calculer la probabilité pour que dans un métal un électron libre ne subisse pas de collisions avec les ions du réseau entre les instants t_1 et $t > t_1$. Dans le métal le champ électrique $E = 0$.

Solution. Comme il n'y a pas de champ électrique, tous les instants sont parfaitement équivalents. Par suite la probabilité cherchée ne peut dépendre que de la différence $t - t_1$. Notons $f(t - t_1)$ cette probabilité. Considérons un instant t_2 antérieur à t_1. La probabilité pour que l'électron n'ait pas subi de collisions dans l'intervalle de temps $t - t_2$ est $f(t - t_2)$. Mais ce dernier événement peut être considéré comme composé de deux événements consécutifs statistiquement indépendants: 1) l'événement consistant en ce que l'électron n'a pas subi de collisions dans l'intervalle de temps (t_2, t_1) et 2) l'événement consistant en l'absence de collisions dans l'intervalle (t_1, t). En vertu du théorème de la multiplication des événements, la probabilité de cet événement complexe est donnée par le produit $f(t - t_2) = f(t_1 - t_2)\, f(t - t_1)$. Cette équation a pour solution

$$f(t) = e^{-\alpha t}, \tag{42.28}$$

où α est une constante. De toute évidence cette constante est positive, puisque t croissant, la fonction $f(t)$ doit décroître. Ainsi

$$f(t-t_0)=e^{-\alpha(t-t_0)} \tag{42.29}$$

Calculons encore la probabilité de collision de l'électron dans l'intervalle $(t, t+dt)$. Elle est égale à

$$dw=f(t-t_0)-f(t+dt-t_0)=-\frac{df}{dt}\,dt,$$

soit

$$dw=\alpha e^{-\alpha(t-t_0)}\,dt. \tag{42.30}$$

Il suffit d'intégrer pour s'assurer que cette probabilité est normée à l'unité:

$$\int dw=\int_{t_0}^{\infty}\alpha e^{-\alpha(t-t_0)}\,dt=1.$$

Ce résultat est correct puisqu'au cours d'un temps infiniment long (t_0, ∞) la collision de l'électron est un événement certain. On peut exprimer la constante α en fonction de la durée de libre parcours moyen $\bar{\tau}$ entre deux collisions consécutives de l'électron avec les ions. On a évidemment

$$\bar{\tau}=\int_{t_0}^{\infty}(t-t_0)\,dw=\alpha\int_{t_0}^{\infty}e^{-\alpha(t-t_0)}(t-t_0)\,dt=\frac{1}{\alpha}.$$

Par conséquent

$$f(t-t_0)=e^{-\frac{1}{\bar{\tau}}(t-t_0)}. \tag{42.31}$$

2. Interpréter le paradoxe suivant. La probabilité pour que la dernière collision qu'a subie un électron ait lieu entre t_0 et t_0+dt_0 est

$$dw=f[t-(t_0+dt_0)]-f(t-t_0)=\frac{df}{dt_0}\,dt_0.$$

ou

$$dw=\alpha e^{-(t-t_0)}\,dt_0. \tag{42.32}$$

Jusqu'à l'instant t l'électron se mouvait sans collision en moyenne pendant un temps

$$\int(t-t_0)\,dw=\int_{-\infty}^{t}(t-t_0)\,\alpha e^{-\alpha(t-t_0)}\,dt_0=\frac{1}{\alpha}.$$

C'est donc un intervalle de temps égal à celui qu'il mettra ensuite jusqu'à la collision suivante.

Examinons maintenant le mouvement de l'électron entre deux collisions consécutives. Posons que l'instant t se trouve entre les instants où l'électron subit des chocs. Notons T_1 l'intervalle de temps s'écoulant entre la première collision et l'instant t, et T_2 l'intervalle de temps s'étendant de t à la deuxième collision. L'intervalle de temps entre les collisions est donc $T=T_1+T_2$. En prenant la moyenne on trouve $\bar{T}=\bar{T}_1+\bar{T}_2$. Or nous venons de démontrer que $\bar{T}_1=\bar{T}_2=\bar{\tau}$. Ainsi la durée de libre parcours moyen d'un électron entre deux chocs consécutifs est $\bar{T}=2\bar{\tau}$. En réalité elle est égale à $\bar{\tau}$.

Solution. La relation $\overline{T} = \overline{T_1} + \overline{T_2}$ est inexacte puisque l'opération consistant à calculer la moyenne du temps T est tout autre que celle du calcul de la moyenne de T_1 et de T_2. Considérons, par exemple, un faisceau d'électrons qui tous ont subi simultanément des collisions. Notons n_0 le nombre d'électrons restant dans le faisceau aussitôt après les collisions. Pour calculer $\overline{T}$ on doit prendre la moyenne de T sur tous les n_0 électrons. Mais les électrons quittent le faisceau par suite des collisions. Supposons qu'à l'instant t il n'en reste que n dans le faisceau. Pour trouver $\overline{T_1}$ et $\overline{T_2}$ on doit calculer les moyennes de T_1 et de T_2 sur un nombre n d'électrons plus petit. Pour cette raison la relation exacte entre les temps moyens est $\overline{T} = \overline{T_1} = \overline{T_2} = \overline{\tau}$.

3. Utiliser les résultats des problèmes 1 et 2 ci-dessus pour calculer la densité de courant dans un métal en admettant qu'après chaque collision l'électron perd toute sa vitesse ordonnée. Poser que le champ électrique E est faible, homogène et dépendant du temps.

Solution. Les formules (42.31) et (42.32) sont valables pour les champs faibles. Si l'électron a subi sa dernière collision à l'instant t_0, pendant le temps $t - t_0$ sa vitesse s'accroîtra de

$$\Delta v = \frac{e}{m} \int_{t_0}^{t} E(t')\, dt'. \tag{42.33}$$

En prenant la moyenne de cette expression sur tous les électrons, nous obtenons la vitesse ordonnée (de dérive) de l'électron dans un champ électrique :

$$u = \langle \Delta v \rangle = \int \Delta v\, dw = \frac{1}{\overline{\tau}} \int_{-\infty}^{t} \Delta v e^{-\frac{t-t_0}{\overline{\tau}}}\, dt_0.$$

Introduisons la notation provisoire $\Delta v = k\xi$, où k est un vecteur unitaire dirigé le long du champ E. Lors de l'intégration on considérera la quantité ξ comme une fonction de la variable t_0. En intégrant par parties on trouve

$$u = \Delta v e^{-\frac{t-t_0}{\overline{\tau}}} \Big|_{t_0=-\infty}^{t_0=t} - k \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t-t_0}{\overline{\tau}}}\, d\xi.$$

D'après la formule (42.33) le terme Δv doit s'annuler à la limite supérieure $t_0 = t$. A la limite inférieure $t_0 = -\infty$ c'est le facteur exponentiel qui devient nul. Par conséquent il ne subsiste dans le second membre que le deuxième terme. En y substituant $d\xi = -eE(t_0)\, dt_0/m$ on obtient après intégration

$$u = \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{t} E(t_0)\, e^{-\frac{t-t_0}{\overline{\tau}}}\, dt_0.$$

La densité de courant est

$$j = neu = \frac{ne^2}{m} \int_{-\infty}^{t} E(t_0)\, e^{-\frac{t-t_0}{\overline{\tau}}}\, dt_0.$$

Pour éliminer l'intégrale dérivons cette expression par rapport à t :

$$\frac{dj}{dt} = \frac{ne^2}{m} E(t) - \frac{ne^2}{m\overline{\tau}} \int_{-\infty}^{t} E(t_0)\, e^{-\frac{t-t_0}{\overline{\tau}}}\, dt_0.$$

Par conséquent

$$j + \bar{\tau}\frac{dj}{dt} = \frac{ne^2\bar{\tau}}{m}E,$$

résultat conforme à ce qui a été obtenu précédemment.

§ 43. Forces non électriques. Pile de concentration

1. Supposons que les seules sources du champ électrique E régnant dans un conducteur parcouru par un courant soient des charges électriques excitant le champ conformément à la loi de Coulomb. Le passage du courant donne lieu à une diminution du nombre de charges, plus exactement à une neutralisation de l'électricité négative et de l'électricité positive. Afin que l'intensité E du champ électrique et la densité de courant électrique j qui en dépend restent constantes, il faut qu'il existe d'autres forces ou d'autres processus assurant la reproduction des charges électriques.

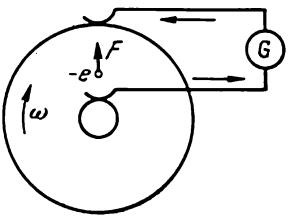


Fig. 111

D'après la formule (42.7) la densité de courant électrique résulte de l'action de la force totale F sur l'électron ou sur tout autre porteur des charges. La force totale F peut être subdivisée en deux parties: la force électrique et toutes les forces non électriques. Nous appellerons ces forces non électriques forces *étrangères*. Nous poserons donc $F/e = E + E^{\text{étr}}$, $E^{\text{étr}}$ étant *l'intensité du champ créé par les forces étrangères* (non électriques); c'est donc la force étrangère rapportée à l'unité de charge électrique. Compte tenu des forces étrangères la loi d'Ohm s'écrit

$$j = \lambda(E + E^{\text{étr}}). \tag{43.1}$$

2. Donnons un exemple de force étrangère qui ne présente cependant aucune importance pratique. Si on fait tourner un disque métallique à la vitesse angulaire constante ω (fig. 111) dans un référentiel lié au disque, l'électron se trouve soumis à une force centrifuge $m\omega^2 r$, m étant la masse de l'électron. En divisant cette expression par la charge e de l'électron, nous trouvons l'intensité du champ dû à cette force non électrique:

$$E^{\text{étr}} = \frac{m\omega^2}{e}r = \operatorname{grad}\frac{m\omega^2 r^2}{2e} = \frac{4\pi^2 m N^2}{e}r, \tag{43.2}$$

où N est le nombre de tours par seconde. (On néglige la force de Coriolis.) Si on applique sur l'axe et sur la périphérie du disque des contacts glissants, le galvanomètre indiquera le passage d'un courant électrique. Pour se faire une idée de l'ordre de grandeur de $E^{\text{étr}}$,

substituons dans la formule (43.2) les valeurs suivantes: $r = 10$ cm, $N = 100$ tours/s. Nous trouvons $E^{\text{étr}} \approx 2 \cdot 10^{-9}$ V/cm, valeur absolument négligeable.

3. Un autre exemple simple où les forces étrangères ont un caractère quelque peu formel est fourni par une pile de concentration. Cette pile est constituée de deux électrodes plongées dans une solution d'électrolyte dont la concentration varie d'un point à l'autre. Il ne se produit aucune réaction chimique entre l'électrolyte et les électrodes et le courant électrique résulte d'une égalisation de la concentration par un processus de diffusion.

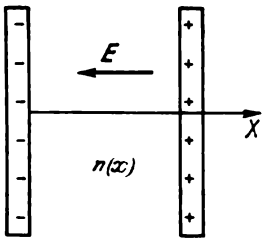


Fig. 112

Nous supposerons pour simplifier que les électrodes sont planes (fig. 112). Orientons l'axe X suivant une direction normale aux électrodes et allant de l'électrode négative à l'électrode positive. Posons que la concentration de l'électrolyte ne dépend que de x. Pour fixer les idées considérons une solution aqueuse d'acide chlorhydrique HCl. Les molécules HCl se dissocient en ions hydrogène positifs H^+ et en ions chlore négatifs Cl^-. Notons e_- la charge de l'ion négatif et e_+ celle de l'ion positif. Ces charges sont égales en valeur absolue et égales à la charge élémentaire $|e| = 4{,}80 \cdot 10^{-10}$ un. CGSE. Nous admettrons dans nos calculs que les concentrations des ions positifs $n^+(x)$ et des ions négatifs $n^-(x)$ sont égales, car dans tous les cas l'électrolyte est neutre ou quasi neutre (cf. § 42). On peut donc désigner ces concentrations par le même symbole $n(x)$.

Par suite de l'existence du gradient de concentration $n(x)$ les deux espèces d'ions se mettent à diffuser dans le sens de la diminution de la concentration. Comme la vitesse de diffusion des ions hydrogène est beaucoup plus grande que celle des ions chlore, il se produit une *séparation des charges* qui donne naissance à un *champ électrique*; ce champ électrique tend à ralentir la diffusion des ions H^+ et à accélérer celle des ions Cl^-. L'intensité de ce champ électrique augmentera jusqu'à ce que les vitesses des deux espèces d'ions s'égalisent. La diffusion des ions s'accompagne d'un courant électrique de diffusion dont la densité est

$$-D^- \frac{dn^-}{dx} e_- - D^+ \frac{dn^+}{dx} e_+ = (D^- - D^+) \frac{dn}{dx} e,$$

où D^- et D^+ sont les coefficients de diffusion des ions H^+ et Cl^-. Ce courant vient s'ajouter au courant $(B^- + B^+) e^2 nE$ dû au champ électrique (voir formule 42.19). La densité du courant total est

$$j = (D^- - D^+) e \frac{dn}{dx} + (B^- + B^+) ne^2 E.$$

En y portant la formule de la conductivité $\lambda = (B^- + B^+)\, ne^2$ on obtient

$$j = \lambda \left(E + \frac{1}{e} \frac{D^- - D^+}{B^- + B^+} \frac{1}{n} \frac{dn}{dx} \right).$$

En utilisant la relation d'Einstein $D = kTB$ (cf. t. II, §91) on peut mettre cette formule sous la forme

$$j = \lambda \left(E + \frac{kT}{e} \frac{B^- - B^+}{B^- + B^+} \frac{d}{dx} (\ln n) \right), \tag{43.3}$$

où k est la constante de Boltzmann et T la température absolue. En identifiant (43.1) et (43.3) on trouve

$$E^{\text{étr}} = \frac{kT}{e} \frac{B^- - B^+}{B^- + B^+} \frac{d}{dx} (\ln n), \tag{43.4}$$

et sous forme vectorielle

$$E^{\text{étr}} = \frac{kT}{e} \frac{B^- - B^+}{B^- + B^+} \operatorname{grad} \ln n. \tag{43.5}$$

Cette formule montre qu'on peut ne pas tenir compte de la diffusion et considérer l'électrolyte comme s'il était homogène, à condition d'ajouter à l'intensité $\boldsymbol{E}$ du champ électrique l'intensité du champ dû aux forces non électriques. La formule (43.4) reste valable même si les électrodes sont de forme quelconque puisqu'on peut toujours, en pensée, diviser l'électrolyte en parties suffisamment petites pour que le vecteur grad ln n soit partout le même.

La pile de concentration ne trouve pas d'application comme source de courant électrique, mais les processus dont elle est le siège sont analogues aux processus évoluant dans les *éléments galvaniques* où le courant électrique résulte de *réactions chimiques* entre les électrodes et l'électrolyte. On peut appliquer la formule (43.1) aux éléments galvaniques et aux autres sources de courant. On peut se passer d'une étude détaillée des processus physiques qui font apparaître et entretiennent le courant électrique dans le circuit, car il suffit d'en tenir compte formellement par le champ des forces non électriques $\boldsymbol{E}^{\text{étr}}$. Les forces non électriques qui agissent dans les éléments galvaniques se manifestent aux surfaces de séparation de l'électrolyte et des électrodes. Elles se manifestent aussi aux frontières entre des métaux différents et déterminent l'apparition d'une *différence de potentiel de contact* entre ces métaux.

4. Les formules (43.2) et (43.5) montrent que dans les deux cas qu'elles concernent, le vecteur $\boldsymbol{E}^{\text{étr}}$ s'exprime par le *gradient* d'un certain scalaire. Cela signifie que dans les régions de l'espace où s'exercent les forces d'origine non électrique le champ de ces forces se comporte comme un *champ de forces conservatives*. Cette assertion est tout à fait générale si les forces étrangères ne dépendent pas ou pratiquement pas de l'intensité du courant traversant la source;

il en est ainsi dans la plupart des cas, car l'intensité du courant dépend de la conductivité et des dimensions géométriques du conducteur reliant les deux pôles de la source. Débranchons le conducteur ; le circuit est alors ouvert et selon notre hypothèse le champ des forces non électriques ne variera pas. Or, en ouvrant le circuit, nous supprimons tous les courants et en vertu de (43.1) on doit avoir $\lambda (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{étr}}) = 0$. A l'intérieur de la source $\lambda \neq 0$, de sorte qu'après division par λ nous obtenons $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{étr}} = 0$. Comme le champ électrique $\boldsymbol{E}$ dérive d'un potentiel, à l'intérieur de la source $\boldsymbol{E}^{\text{étr}}$ doit se comporter comme s'il dérivait d'un potentiel. En dehors de la source $\lambda = 0$ et par suite l'égalité $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\text{étr}} = 0$ n'est plus vérifiée. On en conclut que le champ $\boldsymbol{E}^{\text{étr}}$ ne peut dériver d'un potentiel dans tout l'espace. C'est grâce à cela qu'il est en mesure d'exciter et d'entretenir des courants électriques continus (voir paragraphe suivant).

PROBLÈME

Les forces non électriques s'exerçant dans une pile de concentration peuvent être considérées comme des forces de pression osmotique qui apparaissent dans un électrolyte en présence d'un gradient de concentration. En se plaçant à ce point de vue, retrouver la formule (43.4).

Solution. Du fait de la quasi-neutralité de l'électrolyte, les pressions osmotiques des ions négatifs et positifs sont égales. Chacune de ces pressions est égale à $p = nkT$. Les ions de chaque signe contenus dans l'unité de volume sont soumis à la force de pression osmotique $-\partial p/\partial x = -kT \dfrac{\partial n}{\partial x}$: chaque ion soumis à la force $F^{\text{étr}} = -\dfrac{kT}{n}\dfrac{\partial n}{\partial x}$. Le sens de la force $F^{\text{étr}}$ ne dépend pas du signe de la charge de l'ion. Sous l'action de cette force les ions acquièrent les vitesses $u_- = B^- F^{\text{étr}}$ et $u_+ = B^+ F^{\text{étr}}$; le courant électrique de diffusion qui s'établit a une densité

$$j_{\text{dif}} = n(e_- u_- + e_+ u_+) = ne(B^+ - B^-) F^{\text{étr}},$$

et compte tenu de (42.17)

$$j_{\text{dif}} = -\lambda \frac{B^- - B^+}{(B^- + B^+)e} F^{\text{étr}}.$$

Comme $j_{\text{dif}} = \lambda E^{\text{étr}}$, en utilisant l'expression de $F^{\text{étr}}$ donnée ci-dessus, on trouve l'intensité du champ $E^{\text{étr}}$ qui coïncide avec (43.4).

§ 44. Lois de Joule-Lenz sous forme intégrale

1. Considérons le cas particulièrement important où les courants électriques passent par des conducteurs ayant la forme de *fils fins* (fils électriques). La direction du courant coïncide alors avec l'axe du fil grâce à une distribution adéquate des charges électriques sur la surface du conducteur ou aux endroits où s'exercent des forces non électriques. L'aire S de la section droite du fil conducteur peut ne pas être constante le long du fil. Pour des fils fins on peut admettre

que la densité de courant j est la même en tous les points de la section droite du fil. La quantité d'électricité qui passe par unité de temps à travers la section droite du fil est

$$\mathcal{J} = jS. \tag{44.1}$$

On l'appelle *intensité de courant* électrique. Si l'intensité de courant est constante, en vertu de la conservation des charges elle reste la même sur toute la longueur du fil. Pour plus de généralité, nous supposerons que le long du fil s'exercent des forces non électriques,

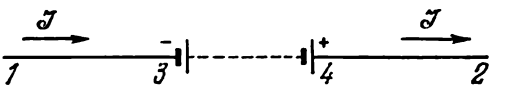


Fig. 113

par exemple on trouve dans le circuit un élément galvanique. Appliquons la loi d'Ohm sous la forme (43.1). On en tire

$$E + E^{\text{étr}} = \frac{j}{\lambda} = \frac{\mathcal{J}}{\lambda S}.$$

Multiplions cette relation par un élément de longueur dl du fil et intégrons sur une longueur délimitée par les points *1* et *2* (fig. 113). Comme le courant est le même en tout point du fil, on peut faire sortir la grandeur $\mathcal{J}$ de sous le signe d'intégration:

$$\int\limits_{12} E\,dl + \int E^{\text{étr}}\,dl = \mathcal{J} \int \frac{dl}{\lambda S}.$$

Comme le champ électrique des courants stationnaires dérive d'un potentiel, la première intégrale s'exprime par la différence de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2$. La seconde intégrale ne doit être étendue qu'à la partie du circuit où $E^{\text{étr}} \neq 0$, c'est-à-dire à la partie qui se trouve à l'intérieur de l'élément galvanique; sa valeur ne dépend pas des positions des points initial *1* et final *2*, et il suffit que ces points se trouvent en dehors de l'élément galvanique. Etant donné le caractére potentiel du champ $E^{\text{étr}}$ dans la région où se manifestent les forces non électriques, l'intégrale ne dépend non plus du chemin d'intégration dans l'élément galvanique. C'est donc une quantité caractérisant l'élément galvanique lui-même. On l'appelle *force électromotrice de l'élément*:

$$\mathcal{E} = \int\limits_{12} E^{\text{étr}}\,dl = \int\limits_{34} E^{\text{étr}}\,dl. \tag{44.2}$$

La force électromotrice (f.é.m.) est positive si le chemin *12* traverse l'élément galvanique dans le sens allant de la cathode vers l'anode;

elle est négative dans le cas opposé *). La troisième intégrale

$$R = \int \frac{dl}{\lambda S} = \int \rho \frac{dl}{S} \tag{44.3}$$

est une grandeur caractéristique du fil conducteur parcouru par le courant. On l'appelle *résistance électrique* ou *résistance* tout court du fil conducteur. Si le fil est fabriqué avec un matériau homogène et présente partout la même épaisseur, on retrouve la formule bien connue

$$R = \rho \frac{l}{S}. \tag{44.4}$$

On obtient ainsi

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E} = \mathcal{J} R. \tag{44.5}$$

Nous sommes arrivés à ce résultat en supposant que le fil était fin sur toute sa longueur, y compris la partie où se trouvait l'élément galvanique. En général cette dernière condition n'est jamais vérifiée, mais la formule (44.5) reste valable; nous le démontrerons à la fin de ce paragraphe.

2. La formule (44.5) exprime la *loi d'Ohm sous la forme intégrale*, la formule (43.1) étant la *forme locale* de cette loi. On dit parfois que la formule (44.5) représente la *loi d'Ohm pour une partie du circuit*. Il est évident que R représente la résistance de toute la partie de circuit considérée, y compris la résistance de l'élément galvanique. Si cette partie de circuit ne comporte pas d'élément galvanique (ou si aucune force non électrique ne s'y manifeste), la formule (44.5) se simplifie:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \mathcal{J} R. \tag{44.6}$$

Dans ce cas particulier la différence de potentiel est appelée *tension électrique* ou *tension appliquée aux extrémités du fil conducteur*. Dans le cas général la tension électrique est définie par l'intégrale $\int E\, dl$ prise le long du fil. Cette définition reste valable même si le champ électrique ne dérive pas d'un potentiel.

Si les points initial *1* et final *2* sont confondus on a $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ et la formule (44.5) représente la *loi d'Ohm pour la totalité du circuit* (fermé):

$$\mathscr{E} = \mathcal{J} R. \tag{44.7}$$

R désigne ici la *résistance totale de tout le circuit*. En notant φ_a le potentiel de l'anode et φ_c le potentiel de la cathode, on a $\varphi_a - \varphi_c = R_e \mathcal{J}$, où R_e est la résistance de la partie extérieure du circuit.

*) La théorie thermodynamique de la f.é.m. des éléments galvaniques a été exposée au t. II, § 49

En divisant membre à membre on obtient

$$\frac{\varphi_a-\varphi_c}{\mathscr{E}}=\frac{R_e}{R}=\frac{R_e}{R_e+R_i}, \tag{44.8}$$

où R_i est la résistance interne de l'élément galvanique. Il résulte de cette relation que chaque fois qu'un circuit est parcouru par un courant, la différence de potentiel $\varphi_a - \varphi_c$ entre les pôles de l'élément galvanique est toujours plus petite que sa f.é.m. $\mathscr{E}$. Ce n'est qu'à la limite $R_e \to \infty$ (ce qui implique que $J \to 0$) que l'on obtient $\mathscr{E} = \varphi_a - \varphi_c$. *On peut donc définir la force électromotrice $\mathscr{E}$ comme la différence de potentiel entre les pôles d'un élément galvanique en circuit ouvert.*

3. L'unité pratique d'intensité de courant électrique utilisée en électrotechnique est l'*ampère* (A). C'est l'intensité d'un courant

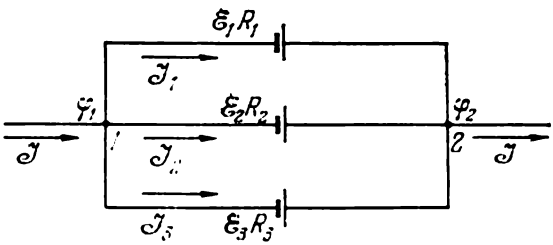


Fig. 114

correspondant au passage à travers la section droite du fil d'un coulomb par seconde. L'unité pratique de tension électrique ou de différence de potentiel est le *volt* (V). On le définit comme la différence de potentiel que doit parcourir une charge de un coulomb pour que le travail fourni soit égal à un joule. L'unité pratique de résistance électrique est l'*ohm*, qui représente la résistance d'un fil qui sera parcouru par un courant de un ampère lorsqu'on applique à ses extrémités une différence de potentiel de un volt. L'unité de résistivité ρ est l'ohm·cm et l'unité de conductivité est l'ohm^{-1}·cm^{-1}. Nous voyons que dans le système d'unités pratique, la résistivité ρ n'a plus la dimension du temps comme c'est le cas dans le système gaussien (cf. § 41, pt. 1). Il est évident que 1 ohm $= \frac{1\text{V}}{1\text{A}} = \frac{1/300}{3\cdot 10^9} = \frac{1}{9}\cdot 10^{-11}$ un. C.G.S.E. de résistance.

4. Considérons n fils conducteurs branchés en parallèle (fig. 114). Supposons que chaque fil est le siège d'une f.é.m. $\mathscr{E}_k$. Notre schéma inclut comme cas particulier le montage des éléments en parallèle. En notant R_k la résistance du k-ième fil (y compris la résistance

interne de l'élément galvanique), le courant qui le traverse est

$$\mathcal{J}_k = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_k} + \frac{\mathcal{E}_k}{R_k}.$$

En additionnant ces expressions on trouve le courant total dans le circuit :

$$\mathcal{J} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} + \frac{\mathcal{E}}{R}, \tag{44.9}$$

où on a utilisé les notations

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_k}, \tag{44.10}$$

$$\mathcal{E} = R \sum \frac{\mathcal{E}_k}{R_k}. \tag{44.11}$$

La formule (44.10) définit la *résistance des fils conducteurs connectés en parallèle.* La quantité (44.11) joue le rôle d'une f.é.m. ; afin qu'elle ne dépende pas de la résistance des fils extérieurs, il suffit de n'entendre par R_k que les résistances internes des éléments galvaniques. La formule (44.10) définit alors la *f.é.m. d'une batterie d'éléments galvaniques connectés en parallèle.* Si tous les éléments galvaniques sont identiques, on a $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k$, i.e. *la f.é.m. de la batterie est égale à la f.é.m. d'un seul élément galvanique.*

Il apparaît clairement que la loi d'Ohm (44.5) est vérifiée même si les parties du circuit contenant des éléments galvaniques ne sont pas de faible section. Il suffit de remarquer que toute région traversée par un courant peut être divisée, en pensée, en tubes de courant suffisamment petits qui se comportent comme des fils fins branchés en parallèle. Dans ces fils les f.é.m. $\mathcal{E}_k$ sont identiques du fait du caractère potentiel du champ E régnant dans des régions où se manifestent des forces non électriques (voir fin du paragraphe précédent). En appliquant à ce système de conducteurs les relations (44.9) à (44.11) nous retrouvons la loi d'Ohm (44.5). Notons que, tous les $\mathcal{E}_k$ étant identiques, la valeur de $\mathcal{E}_k$ désigne la f.é.m. de la source de courant.

5. On déduit la *loi de Joule-Lenz sous sa forme intégrale* en intégrant l'*expression différentielle* de cette loi sur le volume du fil conducteur. En écrivant ce volume élémentaire sous la forme $dV = S\,dl$, on trouve

$$Q = \int \frac{j^2}{\lambda} S\,dl = \mathcal{J}^2 \int \frac{dl}{\lambda S} = \mathcal{J}^2 R. \tag{44.12}$$

C'est la forme intégrale de la loi de Joule-Lenz. Cette formule permet de calculer la chaleur dégagée par seconde dans une partie donnée du fil électrique. Si on considère un circuit fermé dans son ensemble, on écrira $Q = \mathcal{J}\mathcal{E} = \mathcal{J} \oint E^{\text{étr}} dl$. Cette formule montre que *la*

chaleur n'est produite que par des forces non électriques. Le rôle du champ électrique se réduit à redistribuer cette chaleur entre différentes parties du circuit.

PROBLÈMES

1. N éléments galvaniques identiques de f.é.m. $\mathscr{E}$ et de résistance interne R_i sont répartis en m groupes, chaque groupe contenant n éléments. Les éléments de chaque groupe sont branchés en parallèle en reliant ensemble les pôles de même nom; les différents groupes sont branchés entre eux en série. Trouver la condition du courant maximal dans ce circuit (la résistance externe R_e étant donnée).

Réponse. Le maximum de courant correspond à $R_e = mR_i/n$, ce qui signifie que la résistance externe du circuit doit être égale à la résistance interne de la batterie. Cette condition est vérifiée pour $NR_i \geqslant R_e$. Le courant maximal $\mathscr{J}_{max} = m\mathscr{E}\ (2R_e)$.

2. Calculer la f.é.m. d'une pile de concentration.

Solution. En appliquant la formule (43.5) on trouve

$$\mathscr{E} = \frac{kT}{e}\,\frac{B^- - B^+}{B^- + B^+}\ln\frac{n_1}{n_2}, \qquad (44.13)$$

où n_1 et n_2 sont les concentrations de l'électrolyte auprès des électrodes. L'ordre de grandeur de cette f.é.m. est

$$\mathscr{E} = \frac{kT}{e} = \frac{1{,}38\cdot 10^{-16}\cdot 300}{4{,}8\cdot 10^{-10}} = 8{,}6\cdot 10^{-5}\ \text{un. C.G.S.E.} = 0{,}025\ \text{V}.$$

La f.é.m. est trop petite pour les applications pratiques.

§ 45. Les lois de Kirchhoff

Considérons un réseau de conducteurs comportant un nombre arbitraire de bifurcations (nœuds du réseau) en certains endroits duquel sont branchés des éléments galvaniques ou d'autres sources de courant. On suppose connues les f.é.m. constantes de ces sources de courant. A l'aide de la loi d'Ohm (44.5) et de la loi de la conservation des charges électriques on peut calculer pour toute branche du réseau l'intensité de courant et la différence de potentiel. Mais il est plus facile de traiter ce problème en utilisant les deux *lois de Kirchhoff*. L'une de ces lois exprime la *loi de la conservation des charges électriques* dans des fils linéaires et l'autre constitue un *corollaire de la loi d'Ohm.*

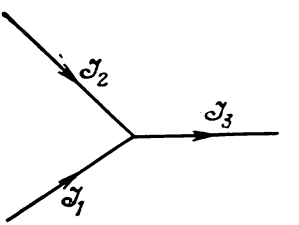


Fig. 115

Première loi de Kirchhoff. La somme algébrique des courants aboutissant à un nœud est nulle (fig. 115). *Les courants se dirigeant vers le nœud et ceux qui s'en éloignent doivent être affectés de signes contraires.* Par exemple, dans le cas de la figure 115, la première loi de Kirchhoff s'exprime par

$$\mathscr{J}_1 + \mathscr{J}_2 - \mathscr{J}_3 = 0.$$

Si cette loi n'était pas vérifiée, des charges électriques variables dans le temps s'accumuleraient aux nœuds. Cette variation des charges entraînerait celle du champ électrique et le courant ne pourrait rester constant.

Deuxième loi de Kirchhoff. Choisissons dans un réseau un circuit fermé de conducteurs (une maille). La somme algébrique des f.é.m.

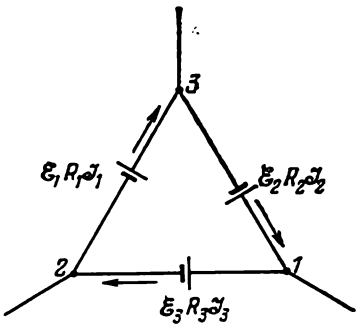


Fig. 116

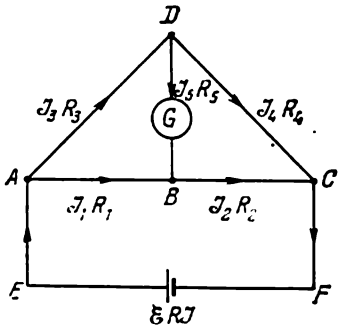


Fig. 117

qui agissent dans cette maille est égale à la somme des produits des intensités de courant traversant les différentes branches de la maille par leurs résistances électriques.

Pour en faire la démonstration, il suffit de considérer une maille constituée de trois branches (fig. 116). En appliquant la loi d'Ohm (44.5) on écrira

$$\varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_1 = \mathcal{J}_1 R_1,$$
$$\varphi_3 - \varphi_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{J}_2 R_2,$$
$$\varphi_1 - \varphi_3 + \mathcal{E}_3 = \mathcal{J}_3 R_3.$$

En additionnant, on obtient

$$\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = \mathcal{J}_1 R_1 + \mathcal{J}_2 R_2 + \mathcal{J}_3 R_3,$$

égalité qui exprime la deuxième loi de Kirchhoff.

Les lois de Kirchhoff permettent d'écrire dans chaque cas concret un *système complet d'équations linéaires* dont la résolution fournit tous les courants inconnus. Ce système ne contient jamais de différences de potentiel inconnues et c'est ce qui facilite le calcul. Pour appliquer les lois de Kirchhoff on doit procéder comme suit.

1. On indique sur chaque branche du réseau les sens de circulation des courants par des fléchettes *sans se soucier de leurs sens. Si le calcul conduit à une valeur positive du courant, c'est que le sens qui avait été choisi était correct. Si le courant calculé est négatif, son sens réel est contraire à celui du fléchage.*

2. Ayant choisi une maille, il faut fixer un *sens de circulation unique* pour toutes ses branches. *Si ce sens coïncide avec le sens du fléchage sur une branche donnée, le terme $R\mathcal{J}$ sera affecté du signe « plus ». Si le sens de la circulation est opposé au sens du fléchage, le terme $R\mathcal{J}$ sera affecté du signe « moins ». Si lors du parcours on va du pôle négatif au pôle positif d'une source de courant, on considérera sa f.é.m. comme positive; dans le cas contraire, on l'affectera du signe négatif.*

3. *Toutes les f.é.m. et toutes les résistances de toutes les branches doivent figurer dans le système d'équations.*

Deux exemples illustreront l'application des lois de Kirchhoff.

Exemple 1. *Le pont de Wheatstone* (1802-1875). Le schéma de montage est représenté sur la figure 117. Fléchons tout arbitrairement toutes les branches du réseau pour indiquer les sens des courants. Le réseau comporte quatre nœuds A, B, C, D. En leur appliquant la première loi de Kirchhoff on obtient quatre équations:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} - \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_3 &= 0, \qquad & \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_5 &= 0, \\ \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_4 - \mathcal{J} &= 0, \qquad & \mathcal{J}_3 - \mathcal{J}_4 - \mathcal{J}_5 &= 0, \end{aligned} \tag{45.1}$$

Trois seulement de ces équations sont indépendantes (en additionnant les quatre équations on arrive à l'identité $0 = 0$). Pour pouvoir déterminer les six inconnues: $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$, $\mathcal{J}_4$, $\mathcal{J}_5$ il faut disposer de trois autres équations. L'application de la deuxième loi de Kirchhoff permet de trouver ces équations. Les mailles qu'exige l'application de cette loi peuvent être choisies de différentes manières, mais il faut que l'une de ces mailles contienne une source de courant (de f.é.m. $\mathcal{E}$). Prenons, par exemple, les mailles ABD, BDC et $ABCFEA$ et appliquons la deuxième loi de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1R_1 - \mathcal{J}_5R_5 - \mathcal{J}_3R_3 &= 0, \\ \mathcal{J}_2R_2 - \mathcal{J}_4R_4 + \mathcal{J}_5R_5 &= 0, \\ \mathcal{J}R + \mathcal{J}_1R_1 + \mathcal{J}_2R_2 &= \mathcal{E}. \end{aligned} \tag{45.2}$$

R désigne ici la résistance de la maille $CFEA$ y compris la résistance interne de la source de courant. Si on prenait d'autres mailles on n'obtiendrait pas de nouvelles équations indépendantes. En résolvant ensemble les équations (45.1) et (45.2) on trouve toutes les intensités de courant. Nous nous contenterons d'établir la condition assurant un courant $\mathcal{J}_5$ nul dans la diagonale du pont. Si $\mathcal{J}_5 = 0$, il résulte des équations (45.1) que $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_4$. Les deux premières équations (45.2) donnent alors

$$\mathcal{J}_1R_1 = \mathcal{J}_3R_3, \quad \mathcal{J}_1R_2 = \mathcal{J}_3R_4.$$

En divisant membre à membre on trouve la condition requise pour que $\mathcal{J}_5 = 0$:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

C'est sur cette relation que se fonde l'utilisation du pont de Wheatstone pour la mesure des résistances. La branche AC (rhéostat à curseur) est constituée par un long fil homogène de grande résistivité, ce qui permet de remplacer le rapport R_1/R_2 par le rapport des longueurs AB/BC.

Exemple 2. *Montage de Poggendorff* (1796-1877) *pour la comparaison des f.é.m. des éléments galvaniques.* Le schéma du montage expérimental est représenté sur la figure 118. On supposera que $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$. L'application de la première loi de Kirchhoff donne

$$\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 - i_1 = 0,$$

la seconde loi conduit aux équations

$$\mathcal{J}_1 (R_1 + r_2) + i_1 r_1 = \mathcal{E}_1,$$

$$i_1 r_1 - \mathcal{J}_2 R_2 = \mathcal{E}_2.$$

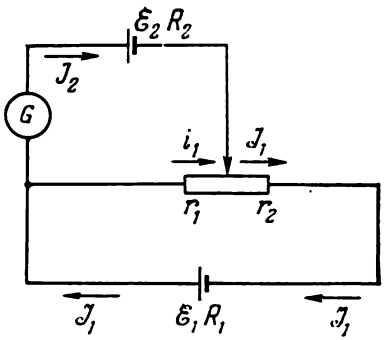


Fig. 118

R_2 désigne la somme de la résistance interne de l'élément *2* et de la résistance du galvanomètre. Cherchons la condition assurant un courant nul dans le galvanomètre. Si $\mathcal{J}_2 = 0$, on a $\mathcal{J}_1 = i_1$ et par suite

$$\mathcal{J}_1 (R_1 + r_1 + r_2) = \mathcal{E}_1, \qquad \mathcal{J}_1 r_1 = \mathcal{E}_2.$$

On en déduit la condition de l'absence de courant dans le galvanomètre

$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{r_1}{r_1 + r_2 + R_1}. \tag{45.3}$$

Cette équation contient la résistance inconnue R_1. On l'élimine par la méthode suivante. On recommence la mesure en remplaçant l'élément *2* par un élément *3* dont la f.é.m. $\mathcal{E}_3 < \mathcal{E}_1$, tous les autres paramètres du réseau étant les mêmes. Le courant dans le galvanomètre sera nul pour de nouvelles valeurs des résistances r_1 et r_2 que nous noterons r_1' et r_2'; on a alors $\mathcal{E}_3/\mathcal{E}_1 = r_1'/(r_1' + r_2' + R_1)$, et comme $r_1 + r_2 = r_1' + r_2'$, on tire de (45.3) $\mathcal{E}_3/\mathcal{E}_2 = r_1'/r_1$. Comme dans l'exemple précédent, on peut ramener le rapport r_1'/r_1 au rapport des longueurs et calculer ensuite un rapport inconnu des f.é.m. $\mathcal{E}_3/\mathcal{E}_2$.

PROBLÈMES

1. Trois éléments galvaniques de f.é.m. $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_3$ et de résistances internes r_1, r_2, r_3 sont branchés comme indiqué sur la figure 119. Les résistances des fils de connexion sont négligeables. 1) Quelle tension V indiquera le voltmètre branché comme indiqué sur la figure 119? 2) Quelle tension indiquera ce voltmètre si les valeurs de $\mathscr{E}_i$ et de r_i sont liées par la relation $\mathscr{E}_1/r_1 = \mathscr{E}_2/r_2 = \mathscr{E}_3/r_3$?

Réponse. 1) $V = r_1 \dfrac{\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3}{r_1+r_2+r_3}$. 2) $V = 0$.

2. On intercale une lampe au néon dans le diamètre glissant CD (fig. 120); les potentiels d'amorçage et d'extinction de la lampe sont $V_{am} > V_{ext}$. Le cercle $ACBD$ fabriqué en fil homogène de section constante a une résistance petite devant celle de la lampe au néon (allumée). Une tension constante V est appliquée entre les points A et B. 1) Déterminer en quelles positions du diamètre CD la lampe s'allume et s'éteint. 2) Calculer la tension minimale V assurant encore l'amorçage de la lampe.

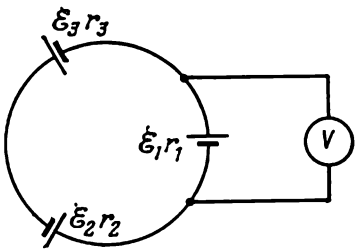


Fig. 119

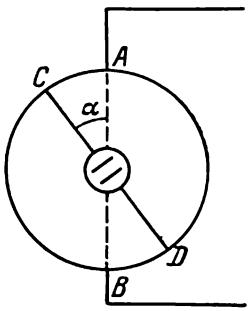


Fig. 120

Réponse. La lampe s'amorce lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}(1 \mp V_{am}/V)$, et s'éteint pour $\alpha = \frac{\pi}{2}(1 \mp V_{ext}/V)$; 2) $V_{min} = V_{am}$.

3. Les résistances R_1 et R_2 (fig. 121) ont des valeurs telles qu'aucun courant ne passe par le galvanomètre. Les forces électromotrices $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ étant connues, calculer la f.é.m. $\mathscr{E}$. On négligera les résistances internes des piles devant R_1 et R_2.

Réponse. $\mathscr{E} = \dfrac{R_2\mathscr{E}_1 + R_1\mathscr{E}_2}{R_1+R_2}$.

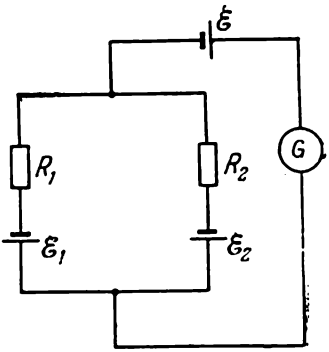


Fig. 121

4. Les résistances R_1, R_2, R_3 (fig. 122) sont telles qu'aucun courant ne traverse le galvanomètre. Les f.é.m. $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_3$ ainsi que les résistances R_1, R_2, R_3 étant connues et en négligeant les résistances internes des sources, calculer la f.é.m. $\mathscr{E}_2$ et le courant $\mathscr{J}_1$ traversant la source $\mathscr{E}_1$.

Réponse. $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3(1 + R_2/R_3)$; $\mathscr{J}_1 = \mathscr{E}_1/R_1 - (\mathscr{E}_3/R_1)(1 + R_2/R_3)$.

5. On a connecté dans les branches latérales et dans la diagonale d'un pont de Wheatstone des sources de courant de f.é.m. arbitraires (fig. 123). Les résistances de ces branches et des diagonales, compte tenu des résistances internes des sources de courant, sont respectivement égales à R_1, R_2, . . ., R_6. Sous quelle condition l'actionnement de l'interrupteur branché dans la diagonale *6* n'affecte pas les indications du galvanomètre branché dans la diagonale *5* ?

Solution. Supposons qu'au début l'interrupteur K était fermé. On avait alors

$$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_3 + \mathcal{J}_5 = 0, \quad \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_4 + \mathcal{J}_5 = 0,$$
$$\mathcal{J}_1 R_1 + \mathcal{J}_2 R_2 - \mathcal{J}_5 R_5 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_5,$$
$$\mathcal{J}_3 R_3 + \mathcal{J}_4 R_4 - \mathcal{J}_5 R_5 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_5.$$

En ouvrant l'interrupteur K, le courant $\mathcal{J}_6$ devient nul, ce qui modifie tous les autres courants. Or, d'après l'énoncé du problème, le courant $\mathcal{J}_5$ doit rester

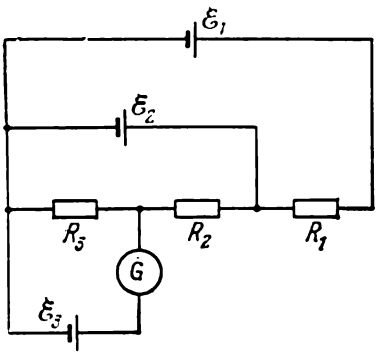


Fig. 122

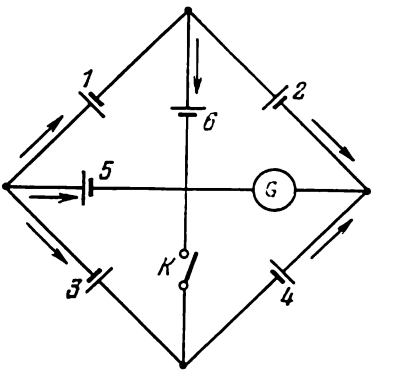


Fig. 123

constant. En désignant les nouvelles valeurs des courants par des primes, nous aboutissons au même système d'équations où tous les courants « primés » sont remplacés par les courants non primés, avec $\mathcal{J}'_5 = \mathcal{J}_5$. En comparant ces deux systèmes d'équations, nous obtenons

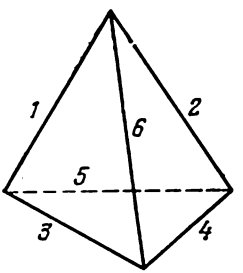


Fig. 124

$$\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_3 = \mathcal{J}'_1 + \mathcal{J}'_3,$$
$$\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_4 = \mathcal{J}'_2 + \mathcal{J}'_4,$$
$$\mathcal{J}_1 R_1 + \mathcal{J}_2 R_2 = \mathcal{J}'_1 R_1 + \mathcal{J}'_2 R_2,$$
$$\mathcal{J}_3 R_3 + \mathcal{J}_4 R_4 = \mathcal{J}'_3 R_3 + \mathcal{J}'_4 R_4.$$

En récrivant ce système d'équations sous la forme

$$R_1 (\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}'_1) = R_2 (\mathcal{J}'_2 - \mathcal{J}_2),$$
$$R_3 (\mathcal{J}_3 - \mathcal{J}'_3) = R_4 (\mathcal{J}'_4 - \mathcal{J}_4),$$
$$\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}'_1 = \mathcal{J}'_3 - \mathcal{J}_3,$$
$$\mathcal{J}_2 - \mathcal{J}'_2 = \mathcal{J}'_4 - \mathcal{J}_4,$$

et en divisant membre à membre les deux premières équations, nous trouvons la condition requise :

$$R_1/R_3 = R_2/R_4.$$

6. On reprend le montage du problème 5 (cf. fig. 123) et on déplace le galvanomètre de la diagonale dans la branche *1* et l'interrupteur *K* dans la branche *4* opposée à la branche *1*. Trouver les conditions requises pour que l'actionnement de l'interrupteur n'affecte pas les indications du galvanomètre.

Réponse. $R_2/R_6 = R_5/R_3$.

Pour trouver la réponse il n'est pas nécessaire de refaire les calculs, car les deux schémas de montage sont topologiquement équivalents, i.e. l'un se déduit de l'autre par déformation continue. On s'en rend compte aisément en considérant un schéma spatial du pont de Wheatstone où les fils de connexion constituent les arêtes d'un tétraèdre régulier (fig. 124).

§ 46. Courants stationnaires dans les conducteurs massifs

1. Disposons deux électrodes *A* et *B* dans un milieu conducteur homogène (fig. 125); la conductibilité des électrodes étant très grande devant celle du milieu, on peut négliger les variations de

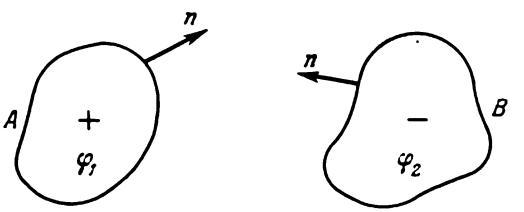


Fig. 125

potentiel dans les électrodes, ce qui revient à poser que tous les points de chacune des électrodes ont même potentiel. Maintenons constants les potentiels φ_1 et φ_2 des deux électrodes et cherchons à déterminer la densité du courant passant entre les électrodes. Ce problème est mathématiquement équivalent au problème d'électrostatique relatif au calcul du champ dans un condensateur ayant pour armatures les électrodes considérées. Comme les courants sont stationnaires et que le milieu est homogène, aucune charge spatiale ne peut y apparaître. Cela signifie que dans tout l'espace compris entre les électrodes, le potentiel φ doit vérifier l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$ et prendre les valeurs φ_1 et φ_2 données sur les électrodes *A* et *B*. Le problème relatif au champ électrique régnant dans un condensateur s'énonce de la même façon. Ces deux problèmes sont mathématiquement identiques et ont des solutions uniques. Par conséquent, si on remplit l'espace entre les électrodes *A* et *B* d'un diélectrique homogène et si on maintient les mêmes potentiels φ_1 et φ_2 sur les électrodes, le champ électrique dans tout l'espace extérieur aux électrodes *A* et *B* doit rester le même. Après avoir

trouvé l'intensité E du champ électrique, on calculera la densité de courant par la formule $j = \lambda E$.

Le calcul du courant total $\mathcal{J}$ passant entre les électrodes est encore plus simple. Ce dernier problème consiste à calculer la capacité du condensateur correspondant. En effet, le courant est donné par l'intégrale

$$\mathcal{J} = \oint j_n \, dS = \lambda \oint E_n \, dS$$

étendue à la surface de l'électrode A chargée positivement. Si on compare le problème relatif au courant au problème électrostatique correspondant, en vertu du théorème de Gauss on doit avoir

$$\oint E_n \, dS = \frac{4\pi}{\varepsilon} q = \frac{4\pi}{\varepsilon} C (\varphi_1 - \varphi_2),$$

où ε est la permittivité diélectrique de l'espace interélectrodes et C la capacité du condensateur ayant A et B pour armatures. Ainsi

$$\mathcal{J} = \frac{4\pi C\lambda}{\varepsilon} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

D'autre part, d'après la loi d'Ohm

$$\mathcal{J} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R},$$

R étant la résistance totale du milieu conducteur entre les électrodes A et B. En comparant les deux formules on trouve d'abord

$$R = \frac{\varepsilon}{4\pi C\lambda}, \tag{46.1}$$

puis l'intensité de courant $\mathcal{J}$. Comme on pouvait s'y attendre la résistance R ne dépend pas de ε puisque la capacité C du condensateur est elle-même proportionnelle à ε. Sans rien changer on aurait pu poser $\varepsilon = 1$.

Donnons quelques exemples concrets.

1) Les électrodes sont des sphères concentriques de rayons a et b. Appliquant la formule (26.5) on obtient

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \tag{46.2}$$

2) Les électrodes sont constituées par les surfaces de deux cylindres coaxiaux de hauteur l et de rayons a et b. L'application des formules (46.1) et (26.7) donne

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda l} \ln \frac{b}{a}. \tag{46.3}$$

3) Les électrodes sont deux petites billes de rayon a se trouvant à grande distance l'une de l'autre. Dans ce cas

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda a}. \tag{46.4}$$

La résistance R ne dépend pas de la distance entre les billes et c'est ce qui explique le résultat qui fut déterminé empiriquement par les télégraphistes, qui constatèrent à leur grand étonnement que la résistance de la terre entre les postes télégraphiques ne dépend pas de la distance entre eux.

2. Etudions d'une façon plus générale le problème relatif à la résistance des mises à la terre. On a représenté de façon schématique sur la figure 126 deux postes télégraphiques *1* et *2*. La liaison entre

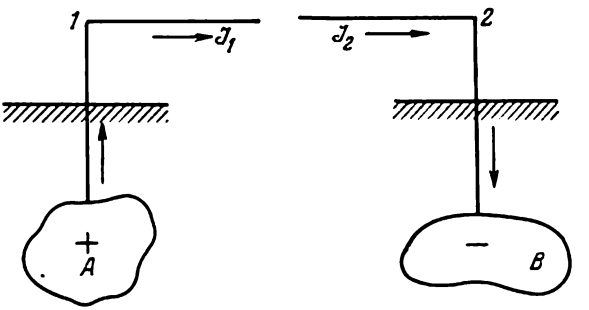


Fig. 126

ces postes est assurée par le fil *12*, la terre jouant le rôle de second fil. A proximité de chacune des électrodes métalliques A et B enfouies dans la terre, celle-ci peut être considérée comme un milieu homogène de conductivités λ_1 et λ_2. Supposons que les électrodes A et B soient enfouies dans la terre si profondément qu'on puisse négliger l'influence qu'exerce la frontière terre-atmosphère sur le courant total circulant entre les électrodes. Désignons par C_1 et C_2 les capacités qu'auraient eu les électrodes A et B si elles étaient isolées et se trouvaient dans le vide. Le courant $\mathcal{J}$ qui s'écoule de l'électrode positive A ne dépend que de son potentiel φ_1 et de la conductance du sol environnant. Comme il ne dépend pratiquement pas des propriétés des régions éloignées du milieu, on peut admettre dans le calcul de $\mathcal{J}_1$ que la conductivité du milieu est constante et égale à λ_1. Si on pose que le potentiel des points infiniment éloignés est nul, on peut écrire en vertu de (46.1)

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\varphi_1}{R_1} = 4\pi C_1 \lambda_1 \varphi_1.$$

(Nous posons $\varepsilon = 1$.) De même on trouve que le courant $\mathcal{J}_2$ allant vers l'électrode négative B est

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{\varphi_2}{R_2} = -4\pi C_2 \lambda_2 \varphi_2.$$

Comme les postes *1* et *2* sont connectés par le fil *12*, on a $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}$. L'application des formules précédentes donne

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\mathcal{J}}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 C_1} + \frac{1}{\lambda_2 C_2}\right).$$

On en déduit que la résistance de la mise à la terre est

$$R = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\lambda_1 C_1} + \frac{1}{\lambda_2 C_2}\right). \tag{46.5}$$

Dans notre démonstration nous n'avons jamais affirmé que tout le courant sortant de l'électrode A et se propageant par la terre atteignait l'électrode B. Une telle affirmation serait erronée quoique la formule (46.5) n'en serait pas affectée. Nous n'avons utilisé que l'égalité des courants $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$, égalité due à ce que les électrodes A et B sont reliées entre elles par un fil conducteur. La formule (46.5) montre que pour avoir une prise à la terre de bonne qualité, il faut que les électrodes A et B soient grandes. Il faut aussi que le sol ait une grande conductance.

PROBLÈME

Considérons n corps parfaitement conducteurs placés dans le vide, portant les charges $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et ayant les potentiels $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Calculer la quantité de chaleur qui serait libérée par seconde si l'espace intermédiaire était rempli d'un liquide homogène de conductivité λ et de permittivité diélectrique ε et si les potentiels des corps restaient les mêmes.

Solution. Le fait de remplir l'espace d'un liquide conducteur ne modifie pas le champ électrique régnant entre les corps. La quantité de chaleur libérée par seconde est donnée par la formule $Q = \sum \mathcal{J}_k \varphi_k$. Le courant qui s'écoule de la surface du k-ième corps conducteur est

$$\mathcal{J}_k = \oint j_N \, dS,$$

où N est la normale extérieure à cette surface. La charge portée par la surface du k-ième corps est

$$q_k = \frac{1}{4\pi}\oint D_N \, dS = \frac{\varepsilon}{4\pi}\oint E_N \, dS.$$

On trouve finalement

$$Q = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\sum q_k \varphi_k.$$

§ 47. La cuve électrolytique

1. Dans l'étude des appareils électroniques, ioniques et de nombreux autres dispositifs il faut connaître les champs électriques entre des électrodes de configurations compliquées. Le calcul théorique de ces champs est pratiquement irréalisable. La mesure expérimentale des champs existants à l'intérieur des dispositifs étudiés n'est

pas toujours suffisamment précise vu les petites dimensions des pièces à proximité desquelles on cherche à déterminer la répartition du champ électrique, ou encore parce qu'il existe de nombreuses régions où on n'arrive pas à introduire la sonde. La solution expérimentale de ce problème est facilitée par la mise en œuvre de la *cuve électrolytique*. Cette méthode consiste à réaliser un modèle agrandi des électrodes similaires et disposées de façon identique à leur disposition dans le dispositif étudié, puis à immerger le modèle dans un liquide homogène de faible conductance (électrolyte), de l'eau de robinet par exemple. Les potentiels des électrodes du modèle doivent être proportionnels à ceux des électrodes correspondantes du dispositif. A cette condition, conformément à ce qui avait été dit au paragraphe précédent, le modèle reproduit à une échelle agrandie les surfaces équipotentielles et les lignes de force du champ électrique des électrodes chargées. Comme l'espace étudié est maintenant rempli d'un milieu conducteur, la mesure des potentiels à l'aide de sondes devient facile.

2. La mise en œuvre de la méthode de la cuve électrolytique présente certaines difficultés expérimentales. L'une de ces difficultés réside en ce que les dimensions de la cuve doivent être grandes par rapport aux dimensions du système d'électrodes étudié et les électrodes du modèle doivent être profondément immergées dans le liquide de la cuve afin que la surface libre de l'électrolyte n'affecte pas notablement le champ électrique. Mais la cuve devient alors tellement grande que le travail expérimental devient ardu. Il aurait fallu utiliser alors des mécanismes pour introduire et fixer les sondes aux endroits convenables, et ces dispositifs mécaniques auraient introduit des distorsions dans la répartition du champ étudié. D'autre part, certaines régions essentielles du champ pourraient se trouver hors d'atteinte, telles les régions entièrement entourées d'une enveloppe métallique. Il existe une méthode élégante pour obvier à ces difficultés, la *méthode* dite *de sectionnement*. Cette méthode s'applique à l'étude des champs à symétrie axiale qui est le cas le plus important pour la pratique. Il suffit alors d'étudier la répartition du potentiel électrique dans un plan de symétrie quelconque passant par l'axe du modèle.

Supposons que le modèle des électrodes étudié soit immergé dans un électrolyte occupant un espace infini. Menons en pensée un plan horizontal passant par l'axe de symétrie du modèle. Toutes les lignes de force et toutes les lignes de courant passant par un point quelconque de la section réalisée restent dans le plan de cette section. Par conséquent le fait de supprimer le demi-espace supérieur n'affectera en rien ni la répartition des potentiels, ni le champ électrique dans le demi-espace inférieur et dans le plan de section.

Cette assertion s'appuie sur une démonstration mathématique rigoureuse. En effet, une fois qu'on aura enlevé toutes les parties

du modèle et tout l'électrolyte du demi-espace supérieur, il ne subsiste qu'une surface plane délimitant le demi-espace inférieur. A l'état stationnaire les courants peuvent circuler le long de la frontière mais ne peuvent la traverser. Puisque $\boldsymbol{j} = \lambda \boldsymbol{E}$, la composante normale de $\boldsymbol{E}$ doit être nulle sur la frontière. Comme les potentiels de toutes les électrodes sont fixés, dans le demi-espace inférieur le potentiel vérifie l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$. Ces conditions sont suffisantes pour que dans le demi-espace inférieur le champ $\boldsymbol{E}$ et le potentiel soient définis de façon univoque. Mais ces grandeurs vérifiaient les mêmes conditions avant que l'on ait éloigné

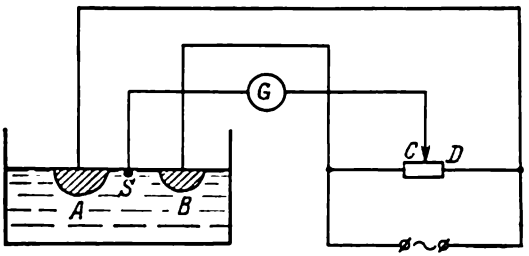


Fig. 127

toutes les parties du modèle découpé et l'électrolyte du demi-espace supérieur, puisque le champ $\boldsymbol{E}$ n'avait pas de composante normale dans la section considérée. L'assertion ci-dessus se trouve ainsi démontrée.

On comprend maintenant que pour reproduire un champ donné il n'est nullement nécessaire d'utiliser des électrodes entières, puisqu'il suffit de ne prendre que les moitiés des électrodes résultant de leur sectionnement par le plan passant par l'axe de symétrie. C'est le principe de la méthode de sectionnement. Les moitiés d'électrodes sont immergées dans la cuve de façon que le plan de sectionnement soit confondu avec la surface libre de l'électrolyte. Il suffit alors de mesurer la répartition du potentiel sur la seule surface libre, chose qui est facile à faire.

3. On a représenté sur la figure 127 le schéma de principe de la cuve électrolytique. Le champ électrique s'établit entre les électrodes A et B. La sonde S peut être constituée par le bout d'un fil métallique fin. Le galvanomètre est connecté entre la sonde S et le point mobile C d'un diviseur de tension. Il est préférable de remplacer le galvanomètre par un oscillographe électronique, par exemple en reliant les points S et C à ses plaques verticales. En déplaçant la sonde sur la surface de l'électrolyte on détermine les positions où le courant traversant le galvanomètre est égal à zéro. Dans toutes ces positions le potentiel de la sonde est égal au potentiel du point C du diviseur de tension. Ces points se trouvent donc sur une ligne

de potentiel constant (ligne équipotentielle). A l'aide d'un système de leviers mécaniques les mouvements de la sonde sont transmis à un pantographe qui reproduit les positions des points sur une feuille de papier. En reliant ces points par une courbe on obtient la trace à grande échelle de la ligne équipotentielle. On recommence la même opération pour une autre position du curseur C, ce qui donne une autre ligne équipotentielle, et ainsi de suite.

Si on appliquait aux électrodes des tensions continues, l'électrolyte aurait été parcouru par des courants continus s'accompagnant d'une électrolyse avec dépôt des constituants de l'électrolyte sur les électrodes. L'homogénéité de l'électrolyte aurait été compromise, les électrodes auraient été polarisées et les différences de potentiel entre les électrodes auraient été modifiées. Pour éviter tous ces inconvénients on applique aux électrodes des *tensions alternatives*, par exemple à partir du réseau urbain. Les conditions qui doivent être remplies pour que les résultats indiqués plus haut puissent être étendus aux champs alternatifs sont formulées plus loin (cf. problème au § 144).

§ 48. Processus d'établissement du courant pendant la charge et la décharge d'un condensateur

1. En toute rigueur le problème de la charge et de la décharge d'un condensateur sort du cadre de l'étude des courants continus. Les solutions que l'on donne ci-dessous sont obtenues en supposant que les valeurs instantanées du courant sont les mêmes dans toutes les sections droites du fil reliant les armatures du condensateur et que le champ électrique instantané est le même qu'on obtiendrait en électrostatique pour les mêmes charges sur les armatures. Les courants et les champs qui satisfont à ces conditions sont dits *quasi stationnaires*. Nous donnerons plus loin une définition exacte de ces conditions (cf. § 123).

Si l'on réunit par un fil les armatures d'un condensateur chargé, ce fil sera parcouru par un courant. Notons $\mathcal{J}$, Q, φ les valeurs instantanées du courant, de la charge de l'armature positive et de la différence de potentiel entre les armatures. En posant que le courant est positif lorsqu'il parcourt le fil dans le sens allant de l'armature positive à l'armature négative, on écrit

$$\mathcal{J} = -\frac{dQ}{dt}, \quad R\mathcal{J} = \varphi, \quad Q = C\varphi,$$

où C est la capacité du condensateur et R la résistance du fil de connexion. En éliminant φ et $\mathcal{J}$, on obtient

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0. \tag{48.1}$$

L'intégration de cette équation donne

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau}, \tag{48.2}$$

où Q_0 est la valeur initiale de la charge du condensateur et τ une constante définie par

$$\tau = RC \tag{48.3}$$

et ayant la dimension du temps. On l'appelle *temps de relaxation.* Comme au bout du temps τ la charge du condensateur diminue de e fois, ce temps est du même ordre de grandeur que le temps de décharge du condensateur. En dérivant (48.2) par rapport à t, nous trouvons la loi de variation du courant en fonction du temps:

$$\mathcal{J} = \frac{Q_0}{\tau} \exp\{-t/\tau\} = \mathcal{J}_0 \exp\{-t/\tau\}, \tag{48.4}$$

où $\mathcal{J}_0 = Q_0/\tau$ est une valeur initiale du courant (i.e. le courant pour $t = 0$).

On remarquera que le temps de relaxation est défini par la formule (48.3) *quel que soit le système d'unités de mesure.* Ainsi, si la résistance est mesurée en ohms et la capacité en farads, le temps (48.3) est mesuré en secondes.

2. Le problème relatif à la charge d'un condensateur se résout de la même façon. On branche dans le circuit du condensateur une batterie d'éléments galvaniques ou une autre source de courant de f.é.m. $\mathcal{E}$ constante. La source fournit le courant qui charge le condensateur. Les charges électriques qui s'accumulent sur les armatures s'opposent au passage du courant et diminuent son intensité. L'équation $Q = C\varphi$ reste toujours valable. Les deux autres équations s'écrivent maintenant

$$\mathcal{J} = \frac{dQ}{dt}, \quad R\mathcal{J} = \mathcal{E} - \varphi,$$

R désigne ici la résistance totale du fil de connexion entre les armatures et inclut la résistance interne de la batterie. (Le courant est considéré comme positif lorsqu'il est dirigé vers l'armature positive.) En éliminant de nouveau $\mathcal{J}$ et φ on arrive à l'équation

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}. \tag{48.5}$$

Cette équation non homogène devient homogène lorsqu'on l'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{d}{dt}(Q - \mathcal{E}C) + \frac{Q - \mathcal{E}C}{RC} = 0.$$

En résolvant cette équation on obtient

$$Q - \mathcal{E}C = Ae^{-t/\tau}.$$

On trouve la valeur de la constante d'intégration A en remarquant qu'à l'instant initial le condensateur n'est pas chargé, i.e. à cet instant $Q = 0$, ce qui donne $A = -\mathscr{E}C$ et par suite

$$Q = \mathscr{E}C\,(1 - e^{-t/\tau}). \tag{48.6}$$

Lorsque $t \to \infty$ la charge Q tend vers sa valeur limite $Q_\infty = \mathscr{E}C$. Le courant est donné par

$$\mathcal{J} = \frac{\mathscr{E}C}{\tau}\, e^{-t/\tau} = \frac{\mathscr{E}}{R}\, e^{-t/\tau}. \tag{48.7}$$

Le courant est maximal à l'instant initial et égal à $\mathcal{J}_0 = \mathscr{E}/R$. Ensuite il diminue suivant une loi exponentielle.

3. Si l'espace entre les électrodes chargées est rempli d'un milieu continu de conductivité λ et de permittivité ε, on utilisera la formule (46.1). Le temps de relaxation est alors égal à

$$\tau = RC = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda} = \frac{\varepsilon\rho}{4\pi}. \tag{48.8}$$

Pour le cuivre $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-6}$ ohms·cm $= 1{,}9 \cdot 10^{-18}$ s. En substituant, de façon purement formelle, cette valeur dans la formule (48.8), on trouve $\tau \approx 10^{-19}$ s, valeur près de cent mille fois plus grande que le temps d'inertie de l'électron (cf. § 42, pt. 5). Ce résultat montre que la formule (48.8) n'est pas valable pour les métaux puisque en 10^{-19} s l'état électrique ne peut se propager au-delà de $3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-19} = 3 \cdot 10^{-9}$ cm. On en conclut que la condition de quasi-stationnarité, que nous avons utilisée pour établir la formule (48.8), n'est pas remplie pour les métaux. Un corps chargé placé dans une enceinte métallique perdra sa charge plus lentement que ne le laisse prévoir la formule (48.8) (mais pratiquement instantanément). Pratiquement le domaine de validité de la formule (48.8) ne s'étend qu'aux diélectriques. Il n'existe pas d'isolants parfaits absolument non conducteurs d'électricité, mais leur conductivité est de maints ordres de grandeur plus petite que celle des métaux. La résistivité de l'ébonite est $\rho = 10^{16}$ ohms·cm $= 1{,}1 \cdot 10^{4}$ s, valeur 10^{22} fois plus grande que la résistivité du cuivre. La permittivité diélectrique de l'ébonite $\varepsilon = 2{,}7$ et son temps de relaxation $\tau = 2{,}4 \cdot 10^{3}$ s $= 40$ mn.

PROBLÈMES

1. On connecte à un condensateur chargé sous la tension V_0 et ayant une capacité C_1 un deuxième condensateur non chargé de capacité C_2 (fig. 128). Calculer la variation du courant dans le circuit en fonction du temps sachant que la résistance des fils reliant les armatures est égale à R. Calculer la quantité de chaleur dégagée dans ces fils par le passage du courant.

Réponse. $\mathcal{J} = \dfrac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}$, $\qquad Q = \dfrac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} V_0^2$.

2. Les armatures d'un condensateur à air d'une capacité $C = 10^{-10}$ F sont connectées par une résistance R à travers une batterie de f.é.m. $\mathscr{E}$ (fig. 129). On rapproche rapidement l'une de l'autre les armatures au cours d'un temps $\Delta t = 10^{-2}$ s de manière à diminuer de deux fois la distance entre les armatures.

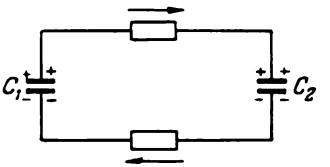


Fig. 128

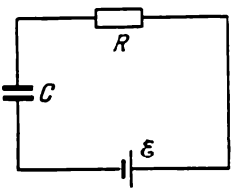


Fig. 129

Sous quelle condition la charge du condensateur restera-t-elle pratiquement inchangée pendant cette opération? Calculer la chaleur de Joule dégagée dans la résistance R vers la fin de la recharge.

Réponse. $R \gg \Delta t/C \approx 10^8$ ohms; $Q_J = \frac{1}{4}C\mathscr{E}^2$.

CHAPITRE III

LE CHAMP MAGNÉTIQUE

§ 49. Forces s'exerçant dans un champ magnétique sur les charges et les courants en mouvement

1. Les phénomènes magnétiques furent d'abord observés et étudiés sur des aimants naturels et artificiels. Aujourd'hui encore il est commode de s'initier à ces phénomènes en commençant par les aimants. Mais pour saisir la nature des processus dont les aimants sont le siège, il faut d'abord apprendre à connaître des phénomènes plus simples et plus fondamentaux. C'est pour cette raison que nous ne pouvons suivre la voie du développement historique dans notre exposé des phénomènes magnétiques. Nous adopterons la méthode déductive en prenant pour fondements deux résultats expérimentaux

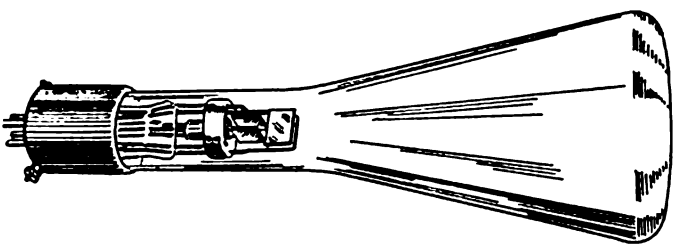


Fig. 130

datant du XIXe siècle : 1) *le champ magnétique exerce une action sur les charges en mouvement* ; 2) *les charges en mouvement créent un champ magnétique*. Nous procéderons comme nous l'avons fait en électrostatique en commençant par l'étude du champ magnétique dans le vide, puis nous étudierons le champ magnétique dans les substances.

2. Commençons par une expérience de démonstration simple. Produisons dans un tube cathodique un faisceau d'électrons rectiligne et bien focalisé, se déplaçant dans le vide de gauche à droite. En tombant sur l'écran fluorescent le faisceau y fait apparaître une petite tache lumineuse. Approchons du faisceau par en dessous le pôle Nord d'un aimant droit (fig. 130). On constate que le faisceau se déplace de côté dans le sens allant du lecteur. Si on approche du faisceau le pôle Sud du même aimant, le faisceau se déplacera en

sens inverse, i.e. vers le lecteur. Si on place l'aimant dans une position rectangulaire aux précédentes, le spot lumineux se déplacera en haut ou en bas suivant le côté où on place l'aimant et suivant le pôle qui agit sur le faisceau. Cette expérience et d'autres expériences analogues montrent qu'un électron en mouvement est soumis à une force orthogonale à la vitesse de l'électron et à la direction de l'axe de l'aimant qui est la droite allant d'un de ses pôles à l'autre. Cette force est proportionnelle à la vitesse de l'électron. Différentes autres particules en mouvement dans un champ magnétique se comportent de façon analogue.

La loi définissant la force $\boldsymbol{F}_m$ s'exerçant sur une charge ponctuelle q en mouvement dans un champ magnétique a été établie par une généralisation de données expérimentales. Cette force est définie par la formule

$$\boldsymbol{F}_m = \frac{q}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}], \tag{49.1}$$

où le vecteur $\boldsymbol{B}$ ne dépend ni de la charge q ni de son mouvement. Il ne caractérise que le champ magnétique dans lequel se meut la charge q. Ce vecteur est l'*intensité du champ magnétique*. La force $\boldsymbol{F}_m$ est orthogonale au vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ de la particule et au vecteur intensité $\boldsymbol{B}$ du champ magnétique, et sa valeur est proportionnelle au sinus de l'angle formé par ces vecteurs. Dans le cas où les vecteurs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{v}$ sont colinéaires, la force $\boldsymbol{F}_m$ s'annule. La formule (49.1) est vérifiée aussi bien pour les champs magnétiques constants que pour les champs variables et ce quelle que soit la vitesse $\boldsymbol{v}$.

On peut donner à la constante c une valeur arbitraire. Le choix de la valeur numérique et des dimensions de la constante c détermine le *système d'unités de mesure*. Il est tout indiqué d'attribuer à cette constante les dimensions d'une vitesse puisqu'alors les dimensions des champs électrique et magnétique seront les mêmes. C'est ce que l'on fait dans le *système d'unités gaussien*. Pour l'instant nous laisserons indéterminée la valeur numérique de c.

Insistons sur le fait que le champ magnétique n'exerce aucune action sur les charges électriques immobiles et c'est ce qui le distingue essentiellement du champ électrique. La *charge au repos* sert d'indicateur de champ électrique et la *charge mobile* est l'indicateur du champ magnétique.

La formule (49.1) suggère une méthode de principe pour la mesure du champ magnétique $\boldsymbol{B}$, consistant à déterminer la force qui s'exerce sur une charge en mouvement. On doit commencer par s'assurer qu'il n'y a pas de champ électrique en utilisant pour cela une charge fixe. On détermine ensuite la direction de la vitesse $\boldsymbol{v}$, pour laquelle la force $\boldsymbol{F}_m$ est nulle, ce qui aura lieu lorsque la vitesse $\boldsymbol{v}$ est parallèle ou antiparallèle au vecteur $\boldsymbol{F}_m$. On aura déterminé ainsi au sens près la direction du champ magnétique $\boldsymbol{B}$. Enfin il

reste à mesurer la force F_m s'exerçant sur une charge se déplaçant à la vitesse $v_\perp$ perpendiculairement au vecteur B. Il est évident que

$$F_m = \frac{q}{c}[v_\perp B].$$

En multipliant vectoriellement cette relation par $v_\perp$ et en remarquant que $(v_\perp B) = 0$, on obtient

$$B = \frac{c}{qv_\perp^2}[F_m v_\perp]. \tag{49.2}$$

Cette formule définit le vecteur B de façon univoque en grandeur, en direction et en sens. Il résulte directement de la formule (49.2) que B est un vecteur (plus exactement un pseudovecteur), car d'après cette formule B est égal au produit vectoriel des vecteurs polaires F_m et $v_\perp$.

3. Dans un champ électrique E une charge q est soumise à la force $F_e = qE$. Si les champs électrique et magnétique agissent sur les charges de façon indépendante, ce que confirme l'expérience, sous leur action simultanée la charge est soumise à la force $F = F_e + F_m$, i.e.

$$F = q\left(E + \frac{1}{c}[vB]\right). \tag{49.3}$$

Cette force est appelée *force de Lorentz.*

Dans l'approximation non relativiste, la force F, comme toutes ces autres forces d'ailleurs, ne dépend pas du choix du référentiel (à inertie). Or le second terme de la somme (49.3) change lorsqu'on change de référentiel. Le premier terme qE doit donc changer lui aussi. Ainsi que nous l'avons déjà noté au § 2, pt. 5, la division de la force totale F en force électrique et en force magnétique dépend du choix du référentiel. Cette division est dénuée de sens tant que l'on n'a pas indiqué le référentiel utilisé.

4. Les expériences relatives à l'action exercée par les champs magnétiques sur les charges en mouvement deviennent plus simples si on remplace les charges isolées par des courants électriques, où intervient un très grand nombre de particules chargées. Supposons, par exemple, que le courant résulte du mouvement de particules identiques de concentration n, portant chacune la charge e. On a alors $j = nev$. Le nombre de particules contenues dans l'élément de volume dV est $dN = n\,dV$, et la force s'exerçant dans un champ magnétique sur l'élément de volume dV du corps est

$$dF = \frac{e}{c}[vB]\,dN = \frac{ne}{c}[vB]\,dV,$$

ou

$$dF = \frac{1}{c}[jB]\,dV. \tag{49.4}$$

Cette formule reste valable dans le cas plus général où le courant est transporté par des charges d'espèces différentes.

Considérons le cas particulier où le courant $\mathcal{J}$ passe à travers un fil infiniment mince de section droite S. Prenons un segment de fil infiniment court de longueur dl et calculons la force dF à laquelle il est soumis. En désignant par $dV = S\,dl$ le volume de ce segment de fil, on a $j\,dV = jS\,dl$, soit

$$j\,dV = \mathcal{J}dl, \tag{49.5}$$

le sens du vecteur dl étant confondu avec celui du courant. Le vecteur $j\,dV$ est dit *élément de courant volumique* et le vecteur $\mathcal{J}dl$ *élément de courant linéique*. On tire de (49.4) et (49.5)

$$dF = \frac{\mathcal{J}}{c}\,[dlB]. \tag{49.6}$$

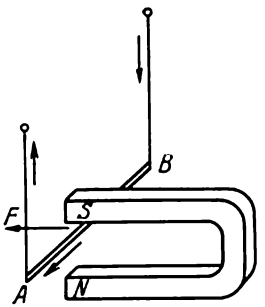


Fig. 131

La formule (49.6) définissant la force qui s'exerce dans un champ magnétique sur un élément de courant linéique fut établie par Ampère et exprime la *loi d'Ampère*. Pour trouver la force s'exerçant sur un fil de longueur finie il suffit d'intégrer (49.6) sur toute la longueur du fil :

$$F = \int \frac{\mathcal{J}}{c}\,[dlB]. \tag{49.7}$$

5. Les forces qui s'exercent sur les courants dans un champ magnétique sont appelées *forces d'Ampère*. Nous allons décrire quelques expériences de démonstration simples où ces forces se manifestent nettement. Prenons un aimant en fer à cheval (fig. 131) et disposons entre ses pôles une tige métallique AB suspendue à des fils électriques. Lorsqu'on fait passer un courant continu, la tige AB se déplace de côté, dans le sens qui la fait sortir ou entrer dans l'entrefer suivant le sens du courant et du champ magnétique. Lorsqu'on inverse le sens du courant ou celui du champ magnétique, le sens de déplacement de la tige s'inverse.

La roue de Barlow (1776-1862). Cet appareil de démonstration se compose d'un disque de cuivre monté sur un axe horizontal autour duquel il peut tourner (fig. 132). Le bord inférieur du disque plonge dans un petit godet rempli de mercure. L'axe du disque et le godet sont reliés par les fils aux bornes d'une source d'électricité. On dispose le disque entre les pôles d'un aimant perpendiculairement au champ magnétique. Lorsqu'on applique une tension continue, un courant radial passe à travers le disque et les forces d'Ampère appliquées au disque le mettent en rotation. Lorsqu'on inverse le sens du courant, le sens de rotation du disque s'inverse.

Dans une variante de cette même expérience on prend un récipient qui se compose de deux cylindres métalliques coaxiaux de faible longueur et on remplit d'électrolyte l'espace compris entre les parois des cylindres (fig. 133, vue d'en haut). On relie les cylin-

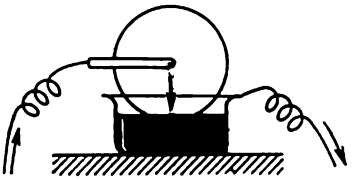


Fig. 132

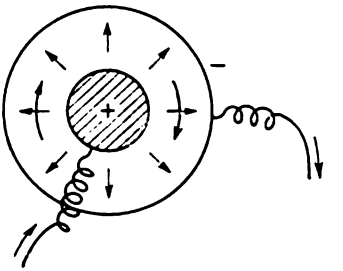


Fig. 133

dres à une source de courant continu par des fils de connexion. L'ensemble est placé au-dessus de l'un des pôles d'un aimant (ou d'un électroaimant) puissant dont le champ est dirigé sensiblement suivant la verticale, i.e. perpendiculairement au plan de la figure. Lorsqu'on branche la source, l'électrolyte est traversé par un courant radial. Les forces d'Ampère qui s'exercent sur le courant mettent l'électrolyte en rotation. Lorsqu'on inverse le sens du courant, le sens de rotation de l'électrolyte s'inverse.

Un fil enroulé en hélice et disposé horizontalement peut remplacer une aiguille aimantée, à condition qu'elle puisse tourner autour d'un axe vertical passant par son centre de gravité. Lorsqu'on y fait passer un courant, l'hélice s'oriente le long du méridien magnétique.

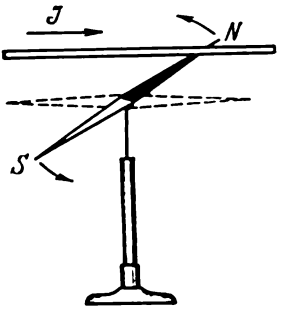


Fig. 134

Disposons verticalement un aimant rectiligne fin de grande longueur. (On peut utiliser une longue tige de fer dont l'extrémité inférieure est placée dans une bobine parcourue par un courant qui aimante la tige.) Suspendons à côté de cet aimant une bande métallique tressée souple. Lorsqu'on y fait passer un courant, la bande s'enroule autour de l'aimant. Le sens d'enroulement s'inverse si on inverse le sens du courant.

Ces différentes expériences démontrent que *les aimants exercent une action sur les courants électriques. Les courants exercent eux aussi une action sur les aimants.* Un exemple en est donné par la célèbre *expérience d'Œrsted* (1777-1851). Œrsted disposa au-dessus d'une aiguille aimantée un fil rectiligne (fig. 134) parallèle à l'aiguille.

L'aiguille aimantée pouvait tourner librement autour d'un axe vertical. Lorsqu'on faisait passer un courant électrique dans le fil, l'aiguille tournait et venait se placer dans une position perpendiculaire au fil. Lorsqu'on inversait le sens du courant, l'aiguille tournait de 180°. On observait les mêmes effets lorsqu'on disposait le fil électrique au-dessous de l'aiguille aimantée. L'expérience d'Œrsted, réalisée en 1820, permit d'établir pour la première fois un lien entre les phénomènes électriques et magnétiques.

§ 50. Champ magnétique d'une charge animée d'un mouvement uniforme. Loi de Biot et Savart

1. Nous allons énoncer maintenant la loi qui définit le champ magnétique créé par une charge ponctuelle q mobile en nous limitant au cas d'un mouvement uniforme de faible vitesse. (Nous donnons ci-dessous une définition exacte de ce qu'il faut entendre par mouvement lent.) La loi fut établie en généralisant les données expérimentales et s'exprime par la formule

$$\boldsymbol{B} = \frac{q}{c' r^3} [\boldsymbol{v}\boldsymbol{r}],$$

où $\boldsymbol{r}$ est le rayon vecteur mené de la charge q au point d'observation et c' un coefficient de proportionnalité dont la valeur dépend du système d'unités. Le champ électrique que crée une même charge q fixe, au même point d'observation, est donné par l'expression

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{r^3} \boldsymbol{r}. \tag{50.1}$$

(Cette même expression reste valable pour les charges se déplaçant à faible vitesse.) En utilisant (50.1) la formule précédente s'écrit $\boldsymbol{B} = \frac{1}{c'} [\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}]$. Comme dans le système gaussien les grandeurs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{E}$ ont mêmes dimensions, la constante c' doit avoir dans ce système les dimensions d'une vitesse. Pour simplifier on la pose égale à la constante c introduite au paragraphe précédent. Nous verrons plus tard qu'en posant $c' = c$ on définit univoquement la valeur numérique de c. Ainsi définie, la vitesse c est désignée sous le nom de *constante électrodynamique*. Les mesures ont montré qu'elle coïncide avec la *vitesse de la lumière dans le vide*. On dira d'un mouvement qu'il est lent si sa vitesse v est très petite devant la grandeur c ($v \ll c$).

Ainsi

$$\boldsymbol{B} = \frac{q}{c r^3} [\boldsymbol{v}\boldsymbol{r}], \tag{50.2}$$

ou

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c} [\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}]. \tag{50.3}$$

2. Utilisons les formules ci-dessus pour le calcul de la force d'interaction de deux charges ponctuelles q_1 et q_2 en mouvement. Cette interaction se compose d'une interaction *électrique* (conformément à la loi de Coulomb) et d'une interaction *magnétique*. Dans ce qui suit il ne s'agira que de l'interaction magnétique. Notons v_1

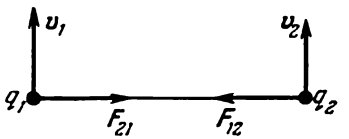


Fig. 135

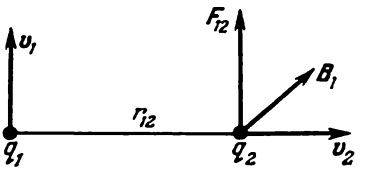


Fig. 136

et v_2 les vitesses des charges en mouvement. L'intensité du champ magnétique créé par la charge q_1 au point où se trouve la charge q_2 est

$$B_1 = \frac{q_1}{cr_{12}^3}[v_1 r_{12}],$$

où r_{12} est le rayon vecteur mené de la première charge à la seconde. Ce champ exerce sur la charge q_2 une force

$$F_{12} = \frac{q_2}{c}[v_2 B_1] = \frac{q_1 q_2}{c^2 r_{12}^3}[v_2 [v_1 r_{12}]]. \tag{50.4}$$

De même, la charge q_2 exerce sur la charge q_1 une force

$$F_{21} = \frac{q_2 q_1}{c^2 r_{21}^3}[v_1 [v_2 r_{21}]], \tag{50.5}$$

où le rayon vecteur r_{21} est orienté de la charge 2 vers la charge 1.

Si les vitesses v_1 et v_2 sont parallèles, de même sens et orthogonales au vecteur r_{12} (fig. 135), les forces F_{12} et F_{21} seront des forces d'attraction mutuelle si les charges sont de même signe, et si ces charges sont de signes opposés ce seront des forces de répulsion. La grandeur de ces forces est donnée par la formule

$$F_{12} = F_{21} = F = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\left(\frac{v_1 v_2}{c^2}\right). \tag{50.6}$$

Dans le cas particulier où les vitesses des charges seraient égales

$$F = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\left(\frac{v}{c}\right)^2. \tag{50.7}$$

Si les forces étaient antiparallèles, dans les mêmes conditions les charges de même signe se repousseraient et les charges de signes contraires s'attireraient.

Le champ magnétique ne figure pas dans les formules (50.6) et (50.7). Nous avons signalé plus haut qu'à l'aide de ces formules on pouvait déterminer la constante électrodynamique c de façon univoque, car toutes les grandeurs qui figurent dans ces formules sont définies et peuvent être mesurées expérimentalement. Notons que ces formules ne sont utilisables qu'en principe pour la détermination de la constante c et ne conviennent pas pour une mesure pratique. Nous décrirons au § 51 une méthode pratique de mesure de la constante électrodynamique c.

Dans le cas général les forces d'interaction magnétique $\boldsymbol{F}_{12}$ et $\boldsymbol{F}_{21}$ ne satisfont pas au principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Ce principe est surtout mis en défaut lorsque les vitesses $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ sont rectangulaires, la vitesse $\boldsymbol{v}_2$ étant dirigée suivant le vecteur $\boldsymbol{r}_{12}$ (fig. 136). Dans ce cas $\boldsymbol{B}_2 \sim [\boldsymbol{v}_2\boldsymbol{r}_{21}] = 0$, de sorte que $\boldsymbol{F}_{21} = 0$. La figure 136 laisse apparaître que $\boldsymbol{F}_{12} \neq 0$. Nous avons déjà noté maintes fois que dans le cas d'interactions s'effectuant par l'intermédiaire de champs, il n'est pas nécessaire que le principe d'égalité de l'action et de la réaction soit vérifié.

3. La formule (50.7) montre que le rapport de la force d'interaction magnétique des charges en mouvement à la force de leur attraction ou de leur répulsion coulombienne est de l'ordre de $(v/c)^2$. Les vitesses des mouvements stationnaires des électrons dans un métal parcouru par un courant électrique ne dépassent pas quelques centimètres par seconde et dans les électrolytes elles sont encore plus petites. Le rapport $(v/c)^2$ est donc très petit et ne dépasse pas 10^{-20} environ. On peut se demander alors pourquoi les moteurs électriques sont mus justement par les forces magnétiques (d'Ampère) devant lesquelles les forces d'interaction électrostatique ne jouent pratiquement aucun rôle. La raison en est qu'*au transport du courant participent un nombre énorme de particules chargées* et c'est ce qui compense la petitesse du facteur $(v/c)^2$. Il importe de remarquer encore que l'action du champ magnétique sur une charge mobile q dépend non pas des valeurs de q et de $\boldsymbol{v}$ prises séparément, mais de leur produit $q\boldsymbol{v}$. Lorsqu'un courant circule, les charges de signes contraires se meuvent en sens opposés, de sorte que pour ces charges le produit $q\boldsymbol{v}$ est de même signe. Les forces qui s'exercent dans un champ magnétique sur des particules de différents signes *s'additionnent arithmétiquement*. Les champs magnétiques créés par des charges en mouvement dépendent eux aussi du produit $q\boldsymbol{v}$, de sorte que les champs produits par des charges de signes contraires *s'additionnent arithmétiquement*. Le comportement des charges électriques vis-à-vis des champs électriques est tout autre. D'une part, la vitesse $\boldsymbol{v}$ ne figure ni dans la formule de l'intensité du champ électrique, ni dans celle des forces s'exerçant sur les charges dans les champs électriques. Comme les forces qui s'exercent sur des charges de signes contraires ont des sens opposés, on doit faire la *différence arithmétique*. D'autre

part, dans un corps chargé d'électricité, *les charges d'un signe donné sont dans une large mesure compensées par des charges de signe contraire.* Aussi grande que soit la charge électrique d'un corps, elle est infime devant la charge totale des particules de même signe contenues dans le corps (cf. § 10, pt. 4). C'est pour cela que les forces magnétiques surpassent de beaucoup les forces électriques s'exerçant sur les charges non compensées des corps.

4. Etablissons maintenant la loi permettant de déterminer le champ magnétique d'un élément de courant isolé. Comme nous l'avons fait en électrostatique, nous partirons du *principe de superposition* qui est une généralisation des faits expérimentaux. Selon ce principe, *les champs magnétiques créés par différentes charges électriques en mouvement s'additionnent vectoriellement, chaque charge excitant un champ qui ne dépend absolument pas de l'existence d'autres charges.* En utilisant (50.2) le principe de superposition conduit à l'expression suivante du champ magnétique d'un élément de courant volumique

$$dB = \frac{1}{c}\frac{[jr]}{r^3}\,dV. \tag{50.8}$$

Pour un élément de courant linéique nous obtenons de même

$$dB = \frac{\mathcal{J}}{c}\frac{[dlr]}{r^3}. \tag{50.9}$$

Ces formules expriment la *loi* dite *de Biot* (1774-1862) et *Savart* (1791-1841). Le champ total s'obtient en intégrant (50.8) et (50.9) sur tous les courants, i.e.

$$B = \frac{1}{c}\int \frac{[jr]}{r^3}\,dV, \tag{50.10}$$

ou

$$B = \oint \frac{\mathcal{J}}{c}\frac{[dlr]}{r^3}. \tag{50.11}$$

Ces expressions ne sont valables que *pour des courants continus.* Or les courants continus sont toujours des courants fermés. Aucune des grandeurs observables n'aurait été modifiée si on ajoutait au second membre de (50.9) un terme arbitraire dont l'intégrale sur un contour fermé serait nulle. C'est pour cette raison que dans le cadre de la théorie des courants continus la loi élémentaire de Biot et Savart (50.8) ou (50.9) est *en principe incontrôlable expérimentalement,* car il est impossible d'isoler des éléments de courants continus afin

de les soumettre aux expériences. *La loi de Biot et Savart exprimée sous sa forme intégrale* (50.10) *ou* (50.11) *est par contre vérifiable par l'expérience.* Pour cette raison nous fondons notre exposé de la théorie du champ magnétique des courants continus sur la loi régissant le champ magnétique d'une charge en mouvement et non sur la loi élémentaire de Biot et Savart comme c'est généralement l'usage. *En principe le champ créé par une charge en mouvement peut toujours être mesuré*, quoique ce soit une expérience fort ardue. En effet la démonstration du fait que les charges macroscopiques mobiles créent des champs magnétiques demanda de nombreux efforts. Ce n'est qu'en 1877 que Rowland (1848-1901), travaillant dans le laboratoire de Helmholtz (1821-1894). réussit à le faire. Les recherches furent poursuivies par de nombreux savants et ne furent parachevées que par l'étude fondamentale de A. A. Eichenwald (1863-1944) réalisée à Moscou en 1901-1904.

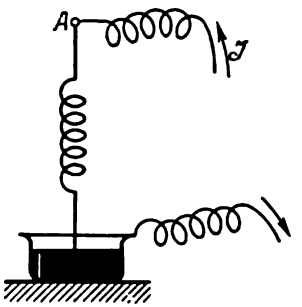


Fig. 137

5. Il résulte des formules (50.4) et (50.5) que les courants parallèles doivent s'attirer et que les courants antiparallèles doivent se repousser. Il est facile d'en faire la démonstration. On prend deux fils souples disposés à petite distance parallèlement l'un à l'autre et on y fait passer un courant de grande intensité (plusieurs centaines d'ampères) une fois dans le même sens et une autre fois en sens contraire. Si les fils ne sont pas parallèles, les forces d'interaction deviennent plus faibles et cherchent à déformer les fils afin de les rendre parallèles.

Suspendons par un bout un fil souple enroulé en hélice. Lorsqu'on y fait passer un courant électrique, l'hélice se raccourcit du fait de l'attraction mutuelle des courants parallèles circulant dans les spires. En modifiant les conditions de l'expérience on arrive à exciter des oscillations dans le fil enroulé. On prend pour cela un fil de faible densité, en aluminium par exemple, et on l'enroule en hélice de plusieurs dizaines de spires. On fixe l'extrémité supérieure de l'hélice à l'amenée de courant A, tandis que son extrémité inférieure plonge dans un bain de mercure (fig. 137). Lorsqu'on y fait passer un courant, l'hélice se raccourcit et ouvre le contact électrique. Le courant ne passant plus, l'hélice s'allonge et son extrémité inférieure replonge dans le mercure ; le contact étant rétabli, le courant passe à nouveau, l'hélice se raccourcit, etc. Ainsi apparaissent des oscillations s'accompagnant d'allongements et de raccourcissements périodiques de l'hélice. A chaque rupture du circuit une étincelle jaillit entre le bout du fil et la surface du mercure et s'accompagne d'un claquement caractéristique.

§ 51. Application de la loi de Biot et Savart au calcul des champs magnétiques. Les systèmes d'unités de mesure

1. Considérons d'abord un fil rectiligne de grande longueur parcouru par un courant continu $\mathcal{J}$. Les conducteurs d'amenée doivent se trouver à une distance suffisamment grande pour pouvoir négliger leurs champs magnétiques dans la région de l'espace étudiée. Dans ces conditions on peut poser que le fil est infiniment long. Le champ magnétique de l'élément de courant $\mathcal{J}d\boldsymbol{l}$ (fig. 138) est

$$d\boldsymbol{B}=\frac{\mathcal{J}}{cr^3}[d\boldsymbol{l}\boldsymbol{r}]=\frac{\mathcal{J}}{cr^3}[d\boldsymbol{l}_\perp\boldsymbol{r}],$$

où $d\boldsymbol{l}_\perp$ est la composante du vecteur $d\boldsymbol{l}$ orthogonale à $\boldsymbol{r}$. Les lignes de force magnétiques seront des cercles dont les centres se trouvent sur l'axe du fil. Sous forme scalaire

$$dB=\frac{\mathcal{J}}{cr^2}dl_\perp=\frac{\mathcal{J}}{cr}d\alpha,$$

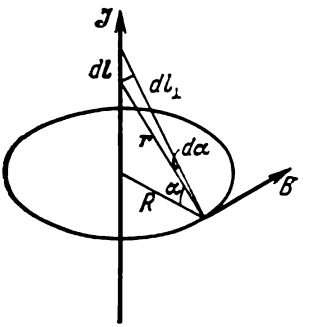


Fig. 138

où $d\alpha$ est l'angle sous lequel on aperçoit l'élément $d\boldsymbol{l}$ du point d'observation. En introduisant la distance jusqu'au fil $R = r\cos\alpha$, on obtient $dB = \mathcal{J}\cos\alpha\, d\alpha/(cR)$. En intégrant cette expression entre $\alpha = -\pi/2$ et $\alpha = +\pi/2$ on obtient le résultat cherché:

$$B=\frac{2\mathcal{J}}{cR}. \tag{51.1}$$

Il est maintenant facile de calculer l'interaction de deux courants continus $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ parallèles et infiniment longs. Le premier courant crée à l'endroit du second courant un champ magnétique $B_1 = 2\mathcal{J}_1/(cR)$, R étant la distance entre les courants. Ce champ exerce sur un segment de longueur l du second courant une force $F = \mathcal{J}_2 l B_1/c$ ou

$$F=\frac{2}{Rc^2}\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 l. \tag{51.2}$$

Ayant mesuré F, cette formule permet de calculer la valeur numérique de la constante électrodynamique c. La première détermination de cette constante a été réalisée en 1856 par un procédé différent par Wilhelm Weber (1804-1891) et Rudolf Kohlrausch (1809-1858). Ils constatèrent avec étonnement qu'aux erreurs expérimentales près *la valeur de c coïncidait avec la vitesse de la lumière dans le vide.* Les mesures qui furent effectuées plus tard par d'autres savants confirmèrent de façon indubitable que la constante électrodynamique et la

vitesse de la lumière dans le vide étaient *une seule et même constante physique*. Les recherches théoriques de Maxwell démontrèrent que ce résultat fondamental ne fait qu'exprimer la *nature électromagnétique de la lumière*.

2. La connaissance de la valeur numérique de la constante c ouvre la voie à la construction rationnelle d'un système d'unités de mesures adéquates à la théorie des champs électriques et magnétiques. En introduisant la notation $q^{(m)} = q/c$ les formules fondamentales (49.1) et (50.2) se récriront sans facteur c:

$$F = q^{(m)} [vB], \tag{51.3}$$

$$B = \frac{q^{(m)}}{r^3} [vr]. \tag{51.4}$$

De ce fait on peut définir de nouvelles unités de charge (et de courant) qui sont c fois plus grandes que les unités électrostatiques correspondantes et qui s'en distinguent par les dimensions. Ces nouvelles unités servent de base au système C.G.S. magnétique ou C.G.S.M. Le dixième de l'unité C.G.S.M. de charge s'appelle le *coulomb* et le dixième de l'unité de courant s'appelle l'*ampère*. Ce sont là des *définitions exactes* du coulomb et de l'ampère. (Les définitions quelque peu inexactes que nous avons utilisées jusqu'ici étaient fondées sur une valeur approchée de la constante électrodynamique $c \approx \approx 3 \cdot 10^{10}$ cm/s.)

On peut donner maintenant une définition de l'unité d'intensité de champ magnétique qui s'appelle le *gauss*. Supposons que les vecteurs v et B soient rectangulaires et que $q^{(m)} = 1$ un. C.G.S.M., $v = 1$ cm/s, $B = 1$ G. La formule (51.3) donne alors $F = 1$ dyne. La définition suivante en découle. *Le gauss est l'intensité d'un champ magnétique qui exerce une force de une dyne sur l'unité de charge C.G.S.M. lorsque cette charge se meut perpendiculairement au champ avec une vitesse de* 1 cm/s. Il est facile d'énoncer cette définition en remplaçant l'unité de charge électrique par l'unité de courant électrique. Pour se faire une idée concrète du gauss, notons que l'intensité du champ magnétique terrestre varie de 0,4 G (à l'équateur) à 0,7 G (au pôle). En géomagnétisme on utilise une unité plus petite — le *gamma* γ. Par définition $1\gamma = 10^{-5}$ G.

Le système C.G.S.E. n'est utilisé que pour la mesure de grandeurs purement électriques: charge, intensité et induction du champ électrique, potentiel électrique, capacité, force électromotrice, conductance, résistance électrique, etc. Le système C.G.S.M. ne s'applique qu'à la mesure de grandeurs purement magnétiques: intensité et induction du champ magnétique, flux magnétique, coefficients de self-inductance et d'inductance mutuelle, moments magnétiques, vecteur aimantation, etc. Aucun de ces systèmes n'est utilisé comme système unique d'unités de mesure des grandeurs électriques et magnétiques. Le système gaussien que nous utilisons dans ce cours est un

système combiné. Les unités des grandeurs purement électriques y coïncident avec les unités C.G.S.E. et les unités des grandeurs purement magnétiques coïncident avec les unités C.G.S.M.

3. Calculons l'intensité du champ magnétique sur l'axe d'un courant circulaire (fig. 139). L'élément de courant $\mathcal{J}dl$ crée un champ magnétique dB orthogonal au rayon vecteur r. Décomposons ce champ en deux composantes: une composante axiale dB_z et une

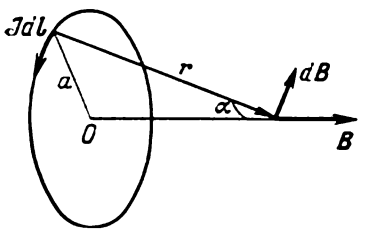


Fig. 139

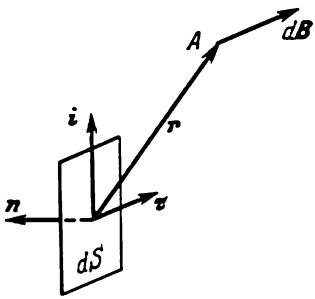


Fig. 140

composante radiale dB_r. Lors de l'intégration le long du contour du courant circulaire les composantes radiales s'éliminent mutuellement. Le champ résultant est donc orienté suivant l'axe Z et on n'a à intégrer que sur la composante axiale:

$$dB_z = \frac{\mathcal{J}\,dl}{cr^2}\sin\alpha.$$

L'angle α est le même pour tous les points du courant circulaire. L'intégration se réduit à une simple multiplication par la longueur $2\pi a$ du contour. Ainsi donc

$$B_z = B = \frac{2\pi a\mathcal{J}}{cr^2}\sin\alpha = \frac{2\pi a^2\mathcal{J}}{cr^3}. \qquad (51.5)$$

Pour des points se trouvant en dehors de l'axe, l'expression du champ d'un courant circulaire est fort compliquée.

4. Il est parfois commode de faire appel aux *courants superficiels*; ce sont des courants qui circulent dans une mince couche superficielle des corps. Traçons sur cette surface une ligne normale à la direction du courant. Le courant par unité de longueur de cette ligne est désigné sous le nom de *densité de courant linéique* et on l'assimile à un vecteur i dirigé le long du courant. On adopte comme sens positif de circulation autour du courant superficiel, ainsi que de tout autre courant le sens de rotation d'un tire-bouchon que l'on fait avancer dans le sens du courant.

Considérons un élément de surface dS parcouru par un courant superficiel continu de densité linéique $\boldsymbol{i}$ (fig. 140). Cet élément de surface parcouru par le courant peut être considéré comme un élément de courant superficiel $\boldsymbol{i}\, dS$ produisant un champ magnétique

$$d\boldsymbol{B} = \frac{[\boldsymbol{i}\boldsymbol{r}]}{cr^3}\, dS.$$

Le vecteur $d\boldsymbol{B}$ est perpendiculaire au courant $\boldsymbol{i}$. On peut le décomposer en une composante $d\boldsymbol{B}_\tau$ tangente à la surface dS et une composante $d\boldsymbol{B}_n$ normale à dS. Calculons la composante $d\boldsymbol{B}_\tau$. Plaçons le vecteur unitaire $\boldsymbol{\tau}$ dans le plan de dS et orientons-le normalement

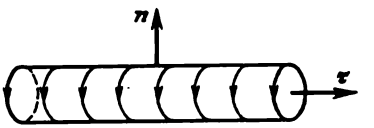


Fig. 141

au courant $\boldsymbol{i}$ dans le sens positif de circulation autour du contour (cf. fig. 140). Le vecteur unitaire de la normale $\boldsymbol{n}$ peut être orienté de façon arbitraire. Il est évident que

$$d\boldsymbol{B}_\tau = (\boldsymbol{\tau}\, d\boldsymbol{B}) = i\,\frac{\boldsymbol{\tau}\,[\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{r}]}{cr^3}\, dS = i\,\frac{[\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{i}_1]\,\boldsymbol{r}}{cr^3}\, dS,$$

où $\boldsymbol{i}_1$ est le vecteur unitaire le long du courant $\boldsymbol{i}$. Comme $[\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{i}_1] = -\boldsymbol{n}$, on a

$$d\boldsymbol{B}_\tau = -i\,\frac{(\boldsymbol{r}\boldsymbol{n})}{cr^3}\, dS = \frac{i}{c}\, d\Omega, \tag{51.6}$$

où $d\Omega$ est l'angle solide sous lequel on voit du point d'observation A la face interne de la surface dS.

5. Appliquons la formule auxiliaire (51.6) à un tube cylindrique sur la surface duquel, normalement à ses génératrices, circule un courant continu de densité linéique i (fig. 141). Un tel tube parcouru par un courant est appelé *solénoïde*. Calculons le champ magnétique sur l'axe du solénoïde. Par raison de symétrie le champ $\boldsymbol{B}$ est dirigé suivant l'axe du solénoïde. Pour calculer B il suffit donc de faire la somme des composantes tangentielles $d\boldsymbol{B}_\tau$ créées par les différents éléments superficiels de courant. Comme la valeur de i est constante sur toute la surface du solénoïde, l'application de la formule (51.6) donne

$$B = \frac{i}{c}\,\Omega, \tag{51.7}$$

où Ω est l'angle solide total sous lequel on voit du point d'observation la surface interne du solénoïde. La formule (51.7) est vérifiée

que le point d'observation se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur du solénoïde.

Dans le cas particulier où un solénoïde est de grande longueur et où le point d'observation se trouve à l'intérieur du solénoïde à grande distance de ses extrémités, on peut négliger les angles solides s'appuyant sur les bases du tube du solénoïde. Cela revient à considérer le solénoïde comme infiniment long. Dans ce cas $\Omega = 4\pi$, et

$$B = \frac{4\pi}{c} i. \tag{51.8}$$

Aux extrémités du solénoïde l'intensité du champ est deux fois plus petite. Nous démontrerons ultérieurement que la formule (51.8) est valable pour tout point à l'intérieur du solénoïde, même s'il ne se trouve pas sur son axe.

Un fil enroulé en hélice avec un pas petit devant le rayon des spires peut être considéré en approximation comme un solénoïde. Soient $\mathcal{J}$ le courant continu passant dans le solénoïde, N le nombre de spires et l la longueur du solénoïde ; comme $i = N\mathcal{J}/l$, on a

$$B = \frac{4\pi}{c} \frac{N\mathcal{J}}{l}. \tag{51.9}$$

Cette formule ne tient pas compte de l'inclinaison des spires. Elle n'est pas utilisable à proximité immédiate du fil ni à son intérieur.

§ 52. Moment des forces s'exerçant dans un champ magnétique sur une spire parcourue par un courant

1. La force résultante s'exerçant dans un champ magnétique permanent sur une spire parcourue par un courant est donnée par l'expression

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathcal{J}}{c} \oint [d\boldsymbol{l}\boldsymbol{B}],$$

où l'intégration est étendue au contour de la spire. Si le champ magnétique est uniforme, on peut faire sortir le vecteur $\boldsymbol{B}$ de sous le signe d'intégration et le problème se ramène au calcul de l'intégrale vectorielle $\oint d\boldsymbol{l}$ qui est égale à zéro. On en conclut que dans un champ uniforme la force $\boldsymbol{F}$ est nulle elle aussi. Mais en général le moment $\boldsymbol{M}$ de cette force ne s'annule pas. Il convient de calculer ce moment.

2. Considérons d'abord une spire plane, parallèle au champ magnétique $\boldsymbol{B}$ (fig. 142). En menant un faisceau de lignes de force suffisamment dense, découpons les spires en couples d'éléments de courant $\mathcal{J}dl_1$ et $\mathcal{J}dl_2$. Les forces d'Ampère $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ agissant sur ces couples sont orthogonales au plan de la spire et de sens mutuellement opposés. D'après la loi d'Ampère $F_1 = \mathcal{J}B\, dl_1 \sin\alpha/c = \mathcal{J}B\, dh/c$, où

dh est la hauteur du quadrilatère courbe $AECD$. La même expression définit la force F_2. Ainsi $F_1 = F_2$, ce qui signifie que F_1 et F_2 constituent un couple de forces de moment $dM = \mathcal{J}Ba\, dh/c = \mathcal{J}B\, dS/c$, où a est le bras de levier du couple et dS l'aire du quadrilatère $AECD$. En intégrant on obtient $M = \mathcal{J}BS/c$, où S est l'aire embrassée par la spire de courant considérée. Le moment de rotation M

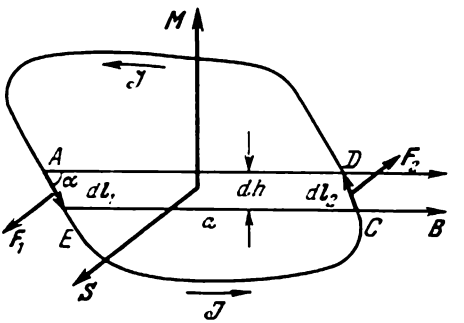


Fig. 142

est dirigé suivant la verticale ascendante. Introduisons le vecteur aire du contour S formant avec la direction du courant un trièdre de référence direct. (Le vecteur S est orthogonal au plan de la figure et pointe vers le lecteur.) Le résultat obtenu se laisse alors écrire sous forme vectorielle :

$$M = [\vec{\mathfrak{M}} B], \tag{52.1}$$

où l'on a utilisé la notation

$$\vec{\mathfrak{M}} = \frac{\mathcal{J}}{c} S. \tag{52.2}$$

Le vecteur $\vec{\mathfrak{M}}$ s'appelle *moment magnétique du courant.*

Supposons maintenant que le plan de la spire est perpendiculaire au champ magnétique. Dans ce cas la force d'Ampère $dF = \mathcal{J}[dlB]/c$ qui s'exerce sur le courant élémentaire $\mathcal{J}dl$ sera contenue dans le plan de la spire et aura pour module $\mathcal{J}B\, dl/c$. Suivant le sens du courant ces forces ne feront qu'allonger ou comprimer la spire, quoique leur moment soit nul. On s'en rend parfaitement compte lorsqu'on considère une spire en forme de triangle ou de rectangle (fig. 143). (Les points indiquent que le champ magnétique est normal au plan de la figure et pointe vers le lecteur.) Le cas général d'une spire (plane) de forme quelconque se ramène à ces cas particuliers. Il suffit de tracer des droites découpant le plan de la spire en cellules rectangulaires ou triangulaires infinitésimales et de s'imaginer que les segments de droites sont parcourus en tous sens

par des courants d'intensité $\mathcal{J}$ (fig. 144). L'addition de ces courants ne change rien, car le courant total passant par chacune de ces droites est nul. Mais le moment total M peut maintenant être représenté sous forme d'une somme de moments s'exerçant sur les rectangles

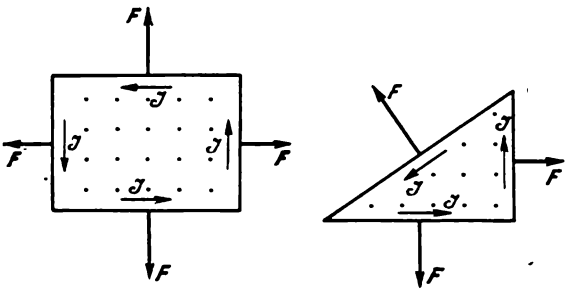


Fig. 143.

et les triangles élémentaires. Comme ces moments sont tous nuls, le moment total M est également nul.

Considérons encore le cas où la direction du champ magnétique fait un certain angle avec le plan du contour. Représentons le vecteur B sous la forme $B = B_{\parallel} + B_{\perp}$, où $B_{\parallel}$ est la composante du vecteur B, qui est parallèle au plan du contour et $B_{\perp}$ sa composante perpendiculaire à ce même plan. Comme la deuxième composante ne contribue pas au moment M, on a $M = [\vec{\mathfrak{M}}\, B_{\parallel}] = [\vec{\mathfrak{M}}\, B]$. La formule (52.1) est donc vérifiée.

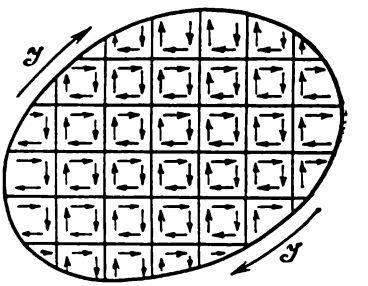


Fig 144

La formule (52.1) s'applique aussi au cas où le contour de courant n'est pas plan, mais le champ magnétique est uniforme. Pour le démontrer considérons une surface quelconque S limitée par le contour parcouru par un courant et décomposons-la en surfaces élémentaires dS par des lignes auxiliaires (cf. fig. 144). En faisant passer dans ces lignes auxiliaires des courants $\mathcal{J}$ égaux et de sens contraires, on pourra représenter le moment M sous forme de la somme des moments s'exerçant sur les éléments de surface dS. Etant infiniment petits, ces éléments de surface peuvent être considérés comme plans et on peut donc leur appliquer la formule (52.1). En composant les moments s'exerçant sur les éléments de surface on retrouve la formule (52.1); le moment $\vec{\mathfrak{M}}$ sera donné par la formule (52.2) où le vecteur S désigne l'intégrale vectorielle $S = \int dS$ étendue à la surface S que limite le contour du courant. Le vecteur S ne dépend

pas du choix de la surface auxiliaire S, mais seulement du contour qui limite cette surface.

La formule (52.1) s'applique aux solénoïdes, puisque ceux-ci peuvent être considérés comme un système de courants circulaires. Le moment magnétique du solénoïde est donné par (52.2) si on entend par $\mathcal{J}$ le courant total parcourant la surface latérale du solénoïde et par S l'aire de sa section droite. Pour une hélice de petit pas comportant N spires $\vec{\mathfrak{M}} = N\mathcal{J}S/c$.

3. Sous l'action du moment de rotation $\boldsymbol{M}$ la spire ou la bobine tournent dans un sens tel que les vecteurs $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{B}$ soient parallèles et de même sens. C'est la position d'équilibre stable. Si les vecteurs $\vec{\mathfrak{M}}$ et $\boldsymbol{B}$ sont parallèles et de sens opposés, c'est une position d'équilibre instable.

La formule (52.1) s'applique de façon approchée au cas de champs magnétiques non uniformes, à condition que les dimensions de la spire ou de la bobine soient petites. On peut alors négliger l'influence de l'inhomogénéité du champ sur le moment de rotation. Les petites bobines peuvent être utilisées pour la mesure des champs magnétiques. On les appelle alors *bobines d'épreuve*. Les boucles et les bobines d'épreuve jouent en magnétisme le même rôle que les charges d'essai en électrostatique. Lorsqu'on place une bobine d'épreuve dans un champ magnétique, son moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ tend à s'aligner suivant la direction du champ $\boldsymbol{B}$. Faisons tourner la bobine de 90° afin que le moment $\boldsymbol{M}$ soit maximal. Le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ sera alors perpendiculaire au vecteur $\boldsymbol{B}$ et $(\vec{\mathfrak{M}}\boldsymbol{B}) = 0$. En multipliant vectoriellement l'égalité (52.1) par $\vec{\mathfrak{M}}$ on obtient

$$\boldsymbol{B} = \frac{[\boldsymbol{M}\vec{\mathfrak{M}}]}{\mathfrak{M}^2}. \tag{52.3}$$

Par mesure du moment de rotation $\boldsymbol{M}$ on peut calculer à l'aide de cette formule l'intensité du champ magnétique en module et en direction. De telles mesures permettent de vérifier la loi de Biot et Savart sous forme intégrale (50.11).

§ 53. Théorème de Gauss pour les champs magnétiques

Nous avons commencé l'étude du champ électrique par la *loi élémentaire* définissant l'intensité du champ électrique créé par une charge ponctuelle fixe. Nous avons déduit de cette loi deux *théorèmes de formes intégrales* concernant l'un le flux du vecteur $\boldsymbol{E}$ à travers une surface fermée et l'autre la circulation de ce même vecteur $\boldsymbol{E}$ le long d'un contour fermé. Ensuite nous avons mis ces théorèmes sous *forme différentielle* afin de démontrer qu'ils étaient conformes aux conceptions fondamentales de la *théorie des champs*. Nous allons faire la même chose pour le champ magnétique. La loi élémentaire

(50.2) définit le champ magnétique créé par une charge ponctuelle animée d'un mouvement uniforme. En admettant que le champ magnétique ne peut être créé que par de telles charges, nous allons calculer, d'une part, le flux du vecteur $\boldsymbol{B}$ (que nous appellerons pour abréger *flux magnétique*) à travers une surface fermée, et d'autre part, la circulation de ce vecteur le long d'un contour fermé.

Calcul du flux magnétique. Le principe de superposition s'applique aux champs magnétiques créés par des charges en mouvement. D'autre part, le flux de la somme géométrique de plusieurs vecteurs à travers une surface quelconque est égal à la somme algébrique des flux de ces vecteurs à travers cette même surface. Il suffit donc de considérer le cas particulier où le champ $\boldsymbol{B}$ est créé par une seule charge ponctuelle animée d'un mouvement uniforme de vitesse $\boldsymbol{v}$.

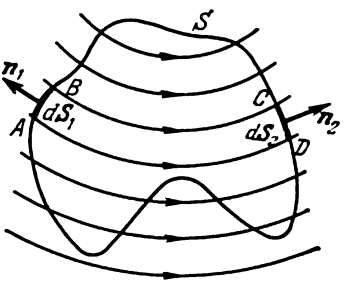


Fig. 145

Démontrons que *le flux magnétique à travers toute surface fermée S est nul* (fig. 145). Pour simplifier nous supposerons que la charge en mouvement uniforme se meut perpendiculairement au plan de la figure. Les lignes de force magnétiques seront des cercles coaxiaux dont les plans sont parallèles au plan de la figure et dont les centres se situent sur la trajectoire rectiligne de la charge ponctuelle. Considérons un tube annulaire infiniment mince $ABCD$ formé par les lignes de force magnétiques. Par suite de la symétrie axiale, le flux magnétique à travers la section droite du tube reste constant sur toute sa longueur. Le tube traverse la surface fermée S un nombre de fois pair, deux fois par exemple. Les flux magnétiques à travers les surfaces dS_1 et dS_2 que le tube découpe sur la surface S sont de même grandeur mais de signes contraires. La somme des flux à travers les surfaces de ce type est donc nulle. On arrive à ce même résultat si le tube intercepte la surface S un nombre quelconque de fois, vu que ce nombre est toujours pair. On peut diviser tout l'espace en tubes magnétiques annulaires infiniment minces et aucun d'eux ne contribuera au flux magnétique à travers la surface fermée S. Il s'ensuit que le flux total à travers toute surface fermée est nul. Le théorème est donc démontré et on peut écrire

$$\oint (\boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}) = 0, \tag{53.1}$$

ce qui s'écrit sous forme différentielle

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{53.2}$$

En théorie du champ électrique les équations correspondantes étaient

$$\oint (\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S}) = 4\pi q, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho.$$

On pourrait supposer, comme on le faisait au début de l'étude du magnétisme, que les sources de champ magnétique sont des *charges magnétiques* interagissant entre elles conformément à la loi de Coulomb. Mais cette hypothèse est en désaccord avec la formule (53.1) qui montre qu'*il n'y a pas de charges magnétiques.* Il est certain qu'une conclusion aussi fondamentale reste valable bien en dehors de la théorie des champs magnétiques permanents. On peut donc s'attendre à ce que *l'équation* (53.1) *ou l'équation* (53.2) *qui lui est équivalente s'appliquent à n'importe quel champ magnétique.* Toutes les données factuelles dont on dispose confirment la conclusion ci-dessus. Les équations (53.1) et (53.2) font partie du *système d'équations de Maxwell.*

Les champs de force dont la divergence est partout nulle sont appelés *champs solénoïdaux.* Il s'ensuit que *le champ magnétique est un champ solénoïdal qui a pour sources non pas des charges magnétiques mais des courants électriques.*

§ 54. Compléments concernant les angles solides

1. Il a été déjà question des angles solides au § 5. Pour nos besoins ultérieurs, il importe de généraliser la notion d'angle solide. Considérons un contour fermé arbitraire L et une surface fermée S quelconque limitée par ce contour (fig. 146, *a*).

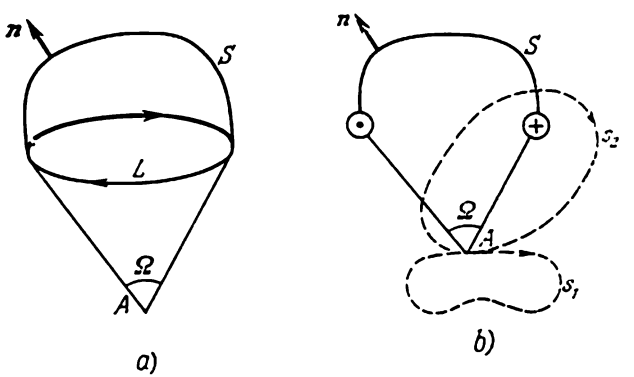


Fig. 146

Fixons un sens positif de circulation le long du contour L et un sens positif de la normale $\boldsymbol{n}$ à la surface S. Les sens positifs choisis doivent correspondre aux corrélations d'un trièdre direct. Pour simplifier les raisonnements nous utiliserons des figures planes au lieu de figures spatiales. Ainsi la trace de la section du contour fermé L par le plan de la figure sera représentée par deux petits cercles. Le cercle avec un point au centre indiquera que le contour vient couper le plan de

la figure dans le sens pointant vers le lecteur, tandis que le cercle contenant une croix indique qu'il le fait dans le sens contraire. Nous reprendrons la convention selon laquelle la face de la surface S par laquelle la normale n entre dans le volume délimité sera appelée face *intérieure* et la face par laquelle elle en sort sera la face *extérieure*. En conséquence l'angle solide Ω sera compté *positivement* si on aperçoit du sommet de l'angle Ω la face intérieure de la surface S, et *négativement* si c'est la face extérieure que l'on voit. Nous conserverons cette convention jusqu'à contre-ordre.

2. Lorsqu'on déplace le sommet de l'angle solide, sa grandeur Ω varie en général de façon continue, excepté le cas où le sommet A traverse la surface S. L'angle solide s'accroît alors par saut de $+4\pi$ lorsque le sommet A passe de la face intérieure à la face extérieure de la surface S, et de -4π lorsqu'il se déplace en sens contraire. Pour fixer les idées considérons d'abord le cas particulier d'un contour L et d'une surface S plans. Si le sommet A se trouve infiniment près du côté extérieur de la surface S, cette surface est vue du sommet A sous un angle -2π. Lorsque le sommet A traverse la surface S et se trouve infiniment près de sa face intérieure, l'angle solide devient égal à $+2\pi$ et s'accroît donc de 4π. Supposons maintenant que la surface ACB limitée par le contour L est quelconque (fig. 147). Soient *1* et *2* deux points infiniment rapprochés se trouvant de part et d'autre de la surface ACB. Traçons une seconde surface $AC'B$ également limitée par le contour L, infiniment proche de la surface ACB et telle que les deux points *1* et *2* se trouvent du même côté de cette nouvelle surface. Les angles solides Ω_1' et Ω_2' sous lesquels on voit cette surface des points *1* et *2* seront infiniment peu différents et tels que $\Omega_1' = \Omega_1$. Considérons maintenant une surface fermée $ACBC'A$. Comme sur la surface ACB la normale n pointe vers l'extérieur et sur la surface $AC'B$ vers l'intérieur de la surface fermée $ACBC'A$, on verra celle-ci du point *2* sous un angle $\Omega_2 - \Omega_2'$. Mais comme c'est une surface fermée, cet angle doit être égal à 4π, c'est-à-dire $\Omega_2 - \Omega_2' = 4\pi$. Mais à des infiniment petits près on a évidemment $\Omega_2' = \Omega_1' = \Omega_1$ et par suite $\Omega_2 - \Omega_1 = 4\pi$, c.q.f.d.

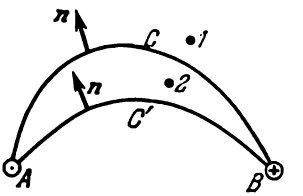


Fig. 147

3. Du fait du comportement discontinu de l'angle solide Ω, celui-ci convient mal à l'étude des contours fermés parcourus par des courants. En effet le point de discontinuité de la grandeur Ω dépend de la position de la surface auxiliaire S limitée par le contour L. Or le champ magnétique du courant qui circule dans ce contour ne dépend d'aucune surface auxiliaire. Une certaine généralisation de la notion d'angle solide permet de se libérer de l'inconvénient indiqué. *Il faut pour cela définir l'angle solide comme une fonction infiniment multiforme de la position de son sommet.* Si le sommet occupe une certaine position initiale, on définit l'angle solide comme on le fait usuellement. Lorsque le sommet A décrit un chemin fermé arbitraire s_1 (cf. fig. 146, *b*) et revient à son point de départ sans couper aucune surface (ou en la coupant en sens contraires un nombre pair de fois) limitée par le contour L, l'angle solide Ω reprend sa valeur première. Mais si le chemin fermé s_2 embrasse le contour L, l'angle solide s'accroît de 4π; lors du contournement dans le sens négatif, l'accroissement de l'angle solide sera égal à -4π. Ainsi l'angle solide est défini, à un terme additif près, égal à $4\pi n$, où n est un entier (positif ou négatif). Dans ce cas un déplacement continu du sommet A s'accompagne d'une variation continue de l'angle solide et sa valeur, qui ne dépend d'aucune surface limitée par le contour L, n'est définie que par le contour L et le sens positif du contournement qui a été choisi. On peut donc parler maintenant de l'angle solide sous lequel on voit le *contour L lui-même* et non plus la surface qu'il limite. C'est dans ce sens que nous entendrons la notion d'angle solide lorsque nous rattacherons au paragraphe suivant cette notion à l'intensité du champ magnétique.

4. Précisons la question de la dérivation des angles solides. Supposons que le contour servant à définir l'angle solide Ω soit fixe. La valeur de l'angle solide Ω ne dépendra alors que de la position de son sommet. Calculons les dérivées de la grandeur Ω par rapport aux coordonnées x, y, z de ce sommet. Lorsque le sommet se déplace de $d\boldsymbol{r}$ (fig. 148, *a*), l'accroissement de l'angle solide sera $d\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$. Le sommet étant fixe, l'angle solide prendrait le même accroissement si le contour se déplaçait d'un bloc de $-d\boldsymbol{r}$ (fig. 148, *b*). Lors de ce déplacement les points du contour décrivent une surface cylindrique S que l'on aperçoit du sommet A sous un angle solide Ω_{lat}. Il ressort de la figure que $\Omega_1 = \Omega_2 + \Omega_{\text{lat}}$, i.e. $d\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = -\Omega_{\text{lat}}$. L'angle solide Ω_{lat} est défini par l'expression

$$\Omega_{\text{lat}} = -\int \frac{(d\boldsymbol{S}\boldsymbol{r})}{r^3},$$

où $d\boldsymbol{S}$ est un élément de surface latérale; le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ est mené de l'élément de surface $d\boldsymbol{S}$ au sommet de l'angle solide et la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ à la surface cylindrique est menée vers l'extérieur, comme indiqué sur la figure.

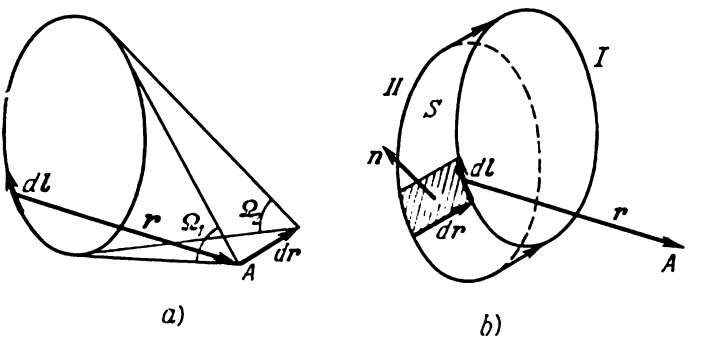


Fig. 148

En désignant par $d\boldsymbol{l}$ un élément de longueur du contour et compte tenu du sens que nous avons adopté pour la normale, on a $d\boldsymbol{S} = [d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{l}]$. En portant cette expression dans la formule précédente et en faisant sortir $d\boldsymbol{r}$ de sous le signe d'intégration, on obtient

$$\Omega_{\text{lat}} = -\oint \frac{[d\boldsymbol{r}\, d\boldsymbol{l}]\, \boldsymbol{r}}{r^3} = -d\boldsymbol{r} \oint \frac{[d\boldsymbol{l}\boldsymbol{r}]}{r^3} = -\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r},$$

avec la notation

$$\boldsymbol{a} = \oint \frac{[d\boldsymbol{l}\boldsymbol{r}]}{r^3}.$$

L'intégration se fait sur le contour définissant l'angle solide. Ainsi $d\Omega = \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r} = a_x\, dx + a_y\, dy + a_z\, dz$. On en tire

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = a_x, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = a_y, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial z} = a_z,$$

et sous forme vectorielle

$$\operatorname{grad}\Omega = \oint \frac{[d\boldsymbol{l}\boldsymbol{r}]}{r^3}. \tag{54.1}$$

§ 55. Théorème sur la circulation du champ magnétique dans le vide

1. L'intégrale linéaire $\int\limits_{12} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s}$ que l'on appelle *différence de potentiel (tension) magnétique* entre les points 1 et 2 dépend non seulement des positions de ces points, mais aussi du chemin d'intégration. Il ne prendra une valeur définie qu'une fois que le chemin aura été précisé. Supposons d'abord que le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ est créé par un courant continu $\mathcal{J}$ parcourant une spire fermée infiniment mince. L'intensité de ce champ est définie par (50.11) ou en vertu de la formule (54.1) par

$$\boldsymbol{B} = -\operatorname{grad} \varphi_m, \tag{55.1}$$

où

$$\varphi_m = -\frac{\mathcal{J}}{c}\Omega, \tag{55.2}$$

Ω étant l'angle solide sous lequel on voit la spire du point d'observation. La grandeur φ_m porte le nom de *potentiel magnétique*. Tout comme l'angle solide Ω le potentiel magnétique est une *fonction multiforme (infiniment multiforme)* du point d'observation. La tension magnétique est liée au potentiel magnétique par la relation

$$\int\limits_{12} \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s} = -\int\limits_{12} d\varphi_m = \varphi_{m1} - \varphi_{m2}. \tag{55.3}$$

2. Si les points 1 et 2 sont confondus, i.e. si le chemin d'intégration est fermé, la tension magnétique se transforme en *circulation* $\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s}$ le long de ce chemin fermé. Conformément aux définitions des propriétés des angles solides, données au paragraphe précédent, la circulation $\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s}$ doit être égale à zéro si le chemin d'intégration n'embrasse pas le courant. S'il embrasse le courant une fois, on a

$$\oint \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{s} = \frac{4\pi}{c}\mathcal{J}. \tag{55.4}$$

Le courant $\mathcal{J}$ sera considéré comme positif si son sens et le sens de parcours du chemin d'intégration satisfont aux corrélations propres à un trièdre de référence direct.

Supposons maintenant que le champ magnétique soit créé par plusieurs spires fermées infiniment minces parcourues par des courants continus. C'est le cas général puisque les courants continus sont toujours fermés et l'espace qu'ils embrassent peut être divisé en lignes de courant fermées infiniment minces jouant le rôle de

spires infiniment minces. Les champs magnétiques des différentes spires satisfont au principe de superposition, tandis que les circulations de ces champs le long d'un même contour fermé s'additionnent algébriquement. C'est pour cela que dans le cas général on retrouve la formule (55.4). On doit seulement entendre par $\mathcal{J}$ la somme des courants dans tous les conducteurs embrassés par le contour de circulation. On arrive ainsi à la proposition suivante : *la circulation du champ magnétique des courants continus le long de tout contour fermé est égale au produit de la somme des courants traversant le contour de circulation par* $4\pi/c$. Cette proposition est appelée *théorème sur la circulation* du vecteur intensité de champ magnétique.

Si la densité spatiale du courant j est finie, on a $\mathcal{J} = \int\limits_S j_n\, dS = \int\limits_S (j\, dS)$, où S désigne n'importe quelle surface limitée par le contour par rapport auquel on calcule la circulation. Dans ce cas la formule (55.4) s'écrit

$$\oint (B\, ds) = \frac{4\pi}{c} \int (j\, dS). \tag{55.5}$$

Dans toute région de l'espace où il n'y a pas de courants électriques la circulation $\oint B\, ds$ s'annule sur tout contour fermé, ce qui implique que dans ces régions le champ magnétique dérive d'un potentiel. La formule (55.5) montre que le champ ne sera pas à potentiel là où il y a des courants électriques.

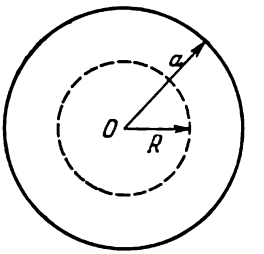
3. En théorie du champ magnétique des courants continus le théorème sur la circulation joue à peu près le même rôle que celui que joue le théorème de Gauss en électrostatique. En présence d'une certaine symétrie le théorème sur la circulation permet parfois de calculer très simplement l'intensité de champ magnétique. Donnons-en quelques exemples.

Exemple 1. *Champ magnétique d'un fil rectiligne infiniment long parcouru par un courant.* Par raison de symétrie les lignes de force magnétiques sont des cercles centrés sur l'axe du courant (cf. fig. 138). La longueur du vecteur B est la même en tous les points d'une ligne de force. La circulation du champ magnétique le long d'une ligne de force est, d'une part, égale à $2\pi RB$ et, d'autre part, d'après le théorème sur la circulation, elle est égale à $4\pi\mathcal{J}/c$. En égalant les deux expressions on obtient

$$B = \frac{2\mathcal{J}}{cR}. \tag{55.6}$$

Nous avons déjà obtenu ce même résultat au § 51 par intégration des champs magnétiques créés par des éléments de courant.

Considérons maintenant un fil cylindrique de rayon a rectiligne et infiniment long parcouru par un courant $\mathcal{J}$ de densité constante. On conçoit aisément que le champ extérieur est donné par la formule (55.6). Il reste à calculer le champ à l'intérieur de ce conducteur. Il est évident qu'à l'intérieur du fil les lignes de force magnétiques seront encore des cercles coaxiaux. L'une de ces lignes de force est représentée en pointillé sur la figure 149. La circulation du vecteur B sur cette ligne de force est égale, d'une part, à $2\pi RB$. D'autre part, d'après le théorème sur la circulation, cette même quantité est égale à $4\pi\mathcal{J}'/c$, où $\mathcal{J}' = \mathcal{J}R^2/a^2$ est le courant traversant le contour considéré. En identifiant les deux expressions on trouve



$$B = \frac{2\mathcal{J}}{ca^2} R \quad (R < a). \qquad (55.7)$$

Fig. 149

Si le fil cylindrique est creux et si la densité superficielle de courant est constante, le champ extérieur sera toujours donné par la formule (55.6), mais le champ intérieur est dans ce cas égal à zéro.

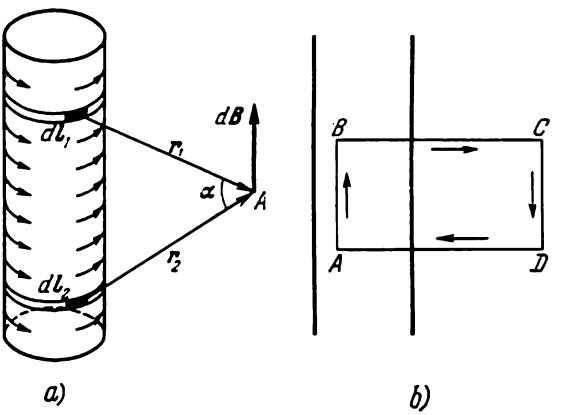


Fig. 150

Exemple 2. *Champ magnétique d'un solénoïde infiniment long.* Posons que la densité superficielle du courant i circulant sur la surface du solénoïde est constante sur toute sa longueur. Il s'agit de démontrer que si le champ magnétique n'est pas nul, il doit être dirigé parallèlement à l'axe du solénoïde. Considérons deux éléments de courant $\mathcal{J}dl_1$ et $\mathcal{J}dl_2$ symétriques par rapport au point de référence A, comme indiqué sur la figure 150, *a*. D'après la loi de Biot et Savart, le champ magnétique résultant créé par ces deux élé-

ments de courant au point A est donné par l'expression

$$dB = \frac{\mathcal{J}}{cr_1^3}[dl_1 r_1] + \frac{\mathcal{J}}{cr_2^3}[dl_2 r_2] = \frac{\mathcal{J}}{cr_1^3}[dl_1(r_1 + r_2)].$$

Comme les vecteurs dl_1 et $(r_1 + r_2)$ sont tous deux perpendiculaires à l'axe du solénoïde, le champ dB est parallèle à cet axe. On peut subdiviser toute la surface du solénoïde infini en couples d'éléments analogues à dl_1 et dl_2. Le champ magnétique de chacun de ces couples sera parallèle à l'axe du solénoïde. Il en résulte que ce résultat doit être valable pour le champ total du solénoïde. La démonstration ne dépend pas de la position du point d'observation A, qu'il soit à l'intérieur ou à l'extérieur du solénoïde.

Voyons ce que devient le champ magnétique d'un solénoïde de longueur infinie lorsque le point d'observation A s'éloigne à l'infini. Nous démontrerons au § 57 que le champ magnétique d'une spire isolée décroît à grande distance en raison inverse du cube de la distance. Considérons une partie finie du solénoïde que l'on voit du point A sous un angle α (cf. fig. 150, *a*) et décomposons-la en un grand nombre N de courants circulaires. Eloignons le point A à l'infini en maintenant constants l'angle α et le nombre N. L'intensité de chacun des courants circulaires doit augmenter proportionnellement à la longueur de la partie considérée du solénoïde, donc proportionnellement à la distance au point d'observation. Si l'intensité de courant avait été constante et que la distance augmentait, le champ magnétique aurait diminué en raison inverse du cube de la distance, comme indiqué plus haut. Mais comme l'intensité de courant augmente, la diminution du champ sera plus lente et le champ diminuera en raison inverse du carré de la distance. Mais même dans ce cas le champ magnétique de la partie considérée du solénoïde, ainsi que celui du solénoïde de longueur infinie, s'annule à l'infini.

Appliquons maintenant le théorème sur la circulation à un contour rectangulaire $ABCD$ dont le côté AB se trouve à l'intérieur du solénoïde et le côté CD en est éloigné à l'infini (fig. 150, *b*). Les segments BC et AD n'apportent aucune contribution à la circulation puisqu'ils sont orthogonaux au champ magnétique. D'après ce qui vient d'être dit, le côté CD n'apporte lui non plus aucune contribution à la circulation. La circulation se réduit à l'intégrale sur le côté AB, qui est égale à Bl, l étant la longueur du côté AB. Selon le théorème sur la circulation, cette même quantité est donnée par $4\pi\mathcal{J}/c = 4\pi il/c$. En identifiant les deux formules, on trouve

$$B = \frac{4\pi}{c} i. \tag{55.8}$$

Ce résultat est vérifié pour des solénoïdes de sections droites de forme quelconque. A l'intérieur d'un solénoïde infini le champ magnétique est uniforme et à l'extérieur il est nul.

La formule (55.8) s'applique à peu de chose près à la partie centrale d'un solénoïde de longueur finie si cette partie est éloignée de ses bords. A proximité des bords le champ magnétique est déformé et cesse d'être uniforme.

Pour une bobine à fil

$$B = \frac{4\pi}{c} \frac{N\mathcal{J}}{l}, \tag{55.9}$$

où N est le nombre de spires, l la longueur de la bobine et $\mathcal{J}$ l'intensité de courant dans son enroulement. Cette formule ne représente le champ magnétique d'un solénoïde réel que de façon approchée. Outre la distorsion du champ à proximité des bords du solénoïde,

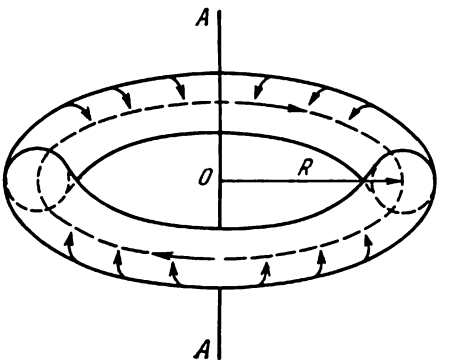


Fig. 151

l'homogénéité du champ est détériorée au voisinage immédiat des spires. Le courant réel ne se laisse qu'approximativement assimiler à un courant superficiel de densité linéique constante puisque chaque spire est embrassée par des lignes de force magnétiques. En outre, du fait de l'inclinaison des spires par rapport à l'axe du solénoïde, il existe une composante du courant parallèle à cet axe, qui déforme aussi le champ.

Exemple 3. *Champ magnétique d'une bobine toroïdale.* Remplaçons la bobine réelle par un tore idéal sur la surface duquel circule un courant de densité linéique i constante (fig. 151). Les lignes de courant sont contenues dans les plans méridiens, i.e. dans les plans passant par l'axe AA du système. Lorsqu'on fait tourner le tore d'un angle quelconque autour de l'axe AA, il se superpose à lui-même. Il en sera de même avec les lignes de force magnétiques que l'on ferait tourner en laissant le tore fixe. Il en résulte que les lignes de force seront des cercles centrés sur l'axe AA. Considérons un de ces cercles de rayon R se trouvant à l'intérieur du tore (en pointillé sur la figure 151). La circulation du champ magnétique

le long de ce cercle est égale à $2\pi RB$. Le courant total traversant l'aire délimitée par ce cercle est égal à $N\mathcal{J}$, N étant le nombre de spires de la bobine toroïdale. D'après le théorème sur la circulation $2\pi RB = 4\pi N\mathcal{J}/c$ et par suite

$$B = \frac{2}{cR} N\mathcal{J}. \tag{55.10}$$

A l'intérieur du tore le champ magnétique est confondu avec le champ que crée un courant rectiligne d'intensité $N\mathcal{J}$ dirigé suivant l'axe AA. En dehors du tore le champ magnétique est nul. En faisant tendre N et R vers l'infini de façon que le rapport $i = N\mathcal{J}/(2\pi R)$ reste constant, on retrouve à la limite la formule (55.8) donnant le champ magnétique d'un solénoïde de longueur infinie.

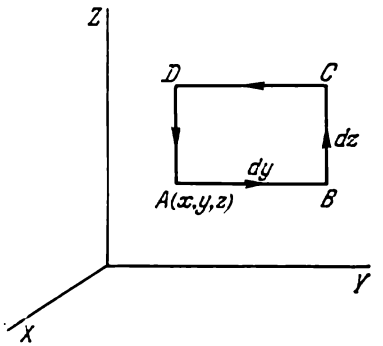


Fig. 152

§ 56. Forme différentielle du théorème sur la circulation

1. On peut exprimer le théorème sur la circulation sous une forme différentielle équivalente à sa forme intégrale (55.4) ou (55.5). Pour ce faire, appliquons ce théorème à un contour rectangulaire infiniment petit $ABCD$ de côtés dy et dz dont le plan est orthogonal à l'axe X (fig. 152). L'apport du côté AB à la circulation vaut $B_y(x, y, z)\,dy$ et celui du côté opposé CD est $-B_y(x, y, z + dz)\,dy$. Leur somme est égale à

$$-B_y(x, y, z+dz)\,dy + B_y(x, y, z)\,dy = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\,dy\,dz = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\,dS,$$

où $dS = dy\,dz$ est l'aire du rectangle $ABCD$. De façon analogue les côtés BC et AD donnent le terme $+\frac{\partial B_z}{\partial y}dS$. La circulation totale est donc

$$\oint B_s\,ds = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) dS.$$

Selon le théorème sur la circulation celle-ci est égale à $4\pi j_x\,dS/c$ puisque $j_x\,dS$ est le courant total traversant le contour $ABCD$. En identifiant ces deux expressions on obtient l'équation

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c}\,j_x.$$

De même

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j_y,$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} j_z.$$

En multipliant ces équations par les vecteurs unitaires des coordonnées $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ et en sommant ces produits on obtient

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}. \tag{56.1}$$

C'est l'une des plus importantes formules de la théorie de l'électricité. Le symbole rot $\boldsymbol{B}$ désigne le vecteur

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \equiv \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) \boldsymbol{e}_x + \\ + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) \boldsymbol{e}_z. \tag{56.2}$$

L'équation différentielle (56.2) joue un rôle important dans différents domaines des mathématiques et de la physique. Elle s'appelle rotor du vecteur $\boldsymbol{B}$. Tout formellement on peut considérer rot $\boldsymbol{B}$ comme le produit vectoriel de l'opérateur différentiel

$$\nabla = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

par le vecteur $\boldsymbol{B}$, i.e.

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} \equiv [\nabla \boldsymbol{B}] \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{56.3}$$

2. Les champs vectoriels dont le rotor n'est pas nul sont appelés *champs rotationnels*. La formule (56.1) montre que le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ est un champ *rotationnel* dans toutes les régions de l'espace où circulent des courants électriques et il est *irrotationnel* là où il n'y a pas de courants. Dans ce dernier cas le vecteur $\boldsymbol{B}$ peut être représenté sous forme de gradient du potentiel magnétique. Mais cette forme n'est plus valable là où circulent des courants puisque la notion de potentiel magnétique y est dénuée de sens. En combinant (18.4) et (56.2) on trouve aisément

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0 \tag{56.4}$$

et ce quelle que soit la fonction φ. Si le champ magnétique vérifiait l'équation $\boldsymbol{B} = -\operatorname{grad} \varphi_m$, on pourrait en déduire rot $\boldsymbol{B} = 0$. Cela exige que a densité de courant $\boldsymbol{j}$ soit nulle, ce que montre la comparaison des formules (56.1) et rot $\boldsymbol{B} = 0$. C'est ce résultat qui démontre notre proposition.

Les équations fondamentales du champ magnétique des courants continus dans le vide se laissent écrire sous la forme

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{56.5}$$

Comparons-les aux équations fondamentales du champ électrostatique dans le vide:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \tag{56.6}$$

On voit que le champ électrostatique dérive toujours d'un potentiel et qu'il a pour sources des charges électriques fixes. Par contre le champ magnétique ne dérive jamais d'un potentiel; il est solénoïdal et a pour sources des courants électriques.

3. Pour conclure exposons le *théorème* mathématique *de Stokes* (1819-1903) que l'on utilise largement pour effectuer des transformations mathématiques en théorie des champs. Ce théorème affirme que

$$\oint (\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{s}) = \int (\operatorname{rot} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{S}), \tag{56.7}$$

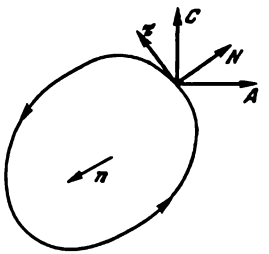


Fig. 153

où $\boldsymbol{A}$ est un vecteur quelconque. L'intégrale de gauche est prise le long d'un contour fermé s et celle de droite est étendue à toute surface limitée par ce contour. Compte tenu de l'artifice utilisé sur la figure 144, il suffit de démontrer la formule (56.7) pour un contour infiniment petit. Un contour infiniment petit peut être considéré comme plan. Notons $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire au plan de ce contour et $\boldsymbol{N}$ la normale unitaire au contour lui-même contenue dans le plan du contour (fig. 153). Introduisons le vecteur $\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}]$ qui se déduit de $\boldsymbol{A}$ par rotation autour de la normale $\boldsymbol{n}$. Il est évident que le vecteur $\boldsymbol{C}$ est contenu dans le plan du contour. Appliquons à ce vecteur la formule mathématique de Gauss-Ostrogradsky

$$\oint (\boldsymbol{C}\boldsymbol{N})\, ds = \int \operatorname{div} \boldsymbol{C}\, dS.$$

On démontre sans difficulté que $\operatorname{div} \boldsymbol{C} = \operatorname{div} [\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}] = \boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$. D'autre part

$$(\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}) = [\boldsymbol{A}\boldsymbol{n}]\, \boldsymbol{N} = \boldsymbol{A}\, [\boldsymbol{n}\boldsymbol{N}] = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\tau}),$$

où $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{n}\boldsymbol{N}]$ est le vecteur unitaire de la tangente au contour s. On obtient ainsi

$$\oint (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\tau})\, ds = \int (\boldsymbol{n} \operatorname{rot} \boldsymbol{A})\, dS,$$

ce qui démontre le théorème. Il résulte de cette démonstration que

$$\operatorname{rot}_n \boldsymbol{A} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint (\boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{s})}{S}. \tag{56.8}$$

C'est la *définition invariante de la projection du rotor de* $\boldsymbol{A}$ sur la direction d'un vecteur quelconque $\boldsymbol{n}$; c'est donc une *définition invariante du rotor lui-même.*

§ 57. Equivalence des champs magnétiques des courants et d'un feuillet magnétique

1. Avant que furent découverts les effets magnétiques des courants, on attribuait l'origine des phénomènes magnétiques à l'existence de *magnétismes Nord* et *Sud* dont les interactions étaient régies par la même loi de Coulomb que celle qui définit les interactions des charges électriques. Mais les charges magnétiques se distinguent essentiellement des charges électriques en ce qu'on ne peut les séparer dans un aimant. Ce fut une raison suffisante pour mettre en doute l'existence des charges magnétiques. Ampère émit une hypothèse qui fut confirmée par toutes les recherches ultérieures, selon laquelle *il n'existe pas de charges magnétiques et les seules sources de champ magnétique sont les courants électriques.* Ampère adjoignit aux courants macroscopiques ordinaires les *courants moléculaires* qui d'après ses conceptions circulaient dans les atomes des substances. Au XXe siècle, on identifia les courants moléculaires d'Ampère aux mouvements des électrons et des noyaux atomiques constituant les atomes des substances. On peut se demander alors pourquoi la théorie formelle fondée sur le concept des charges magnétiques, qui n'existent réellement pas, conduisait à des résultats corrects. La réponse à cette question est fournie par le *théorème d'Ampère* sur l'équivalence des champs magnétiques créés par les courants et les feuillets magnétiques.

2. Considérons d'abord une spire de courant élémentaire. Le champ magnétique en dehors de la spire se laisse exprimer par le potentiel magnétique (55.2). Pour une spire élémentaire $\Omega = -(\boldsymbol{S}\boldsymbol{r})/r^3$, où $\boldsymbol{S}$ est le vecteur d'un élément de surface limité par le contour de courant. Le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$ est mené de la spire au point d'observation, ce qui explique le signe moins dans la formule ci-dessus. En utilisant cette formule on trouve

$$\varphi_m = \frac{(\vec{\mathfrak{M}}\boldsymbol{r})}{r^3}, \tag{57.1}$$

où $\vec{\mathfrak{M}}$ est le moment magnétique du courant défini par (52.2). La formule (57.1) coïncide avec la formule (19.6) relative au potentiel électrique d'un dipôle ponctuel, le moment dipolaire $\boldsymbol{p}$ y étant remplacé par le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ du courant. Ainsi lorsqu'on cherche à calculer l'intensité du champ magnétique, on peut remplacer la spire élémentaire parcourue par un courant par un aimant élémentaire constitué par deux charges magnétiques de signes contraires légèrement décalées l'une par rapport à l'autre. On en conclut que le champ magnétique d'une spire élémentaire, tout comme le champ d'un dipôle ponctuel, varie en raison inverse du cube de la distance. Ce résultat a été utilisé dans la démonstration de la formule de l'intensité du champ magnétique d'un solénoïde (55.8).

Pour généraliser ce résultat aux spires de dimensions finies parcourues par un courant, on utilise le procédé usuel de décomposition de la spire finie en une multitude de spires élémentaires (cf. fig. 144). En remplaçant chaque spire élémentaire par un dipôle équivalent, on obtient ce que l'on appelle un « feuillet magnétique », i.e. une surface S limitée par le contour de courant dont une face est recouverte uniformément de magnétisme Nord et l'autre de magnétisme Sud. A l'unité d'aire de cette surface correspond un moment magnétique

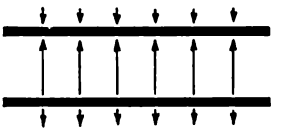


Fig. 154

$$\vec{\mathfrak{m}} = \frac{\mathcal{J}}{c}\boldsymbol{n}, \qquad (57.2)$$

que l'on appelle *puissance du feuillet magnétique*. (Le vecteur unitaire de la normale $\boldsymbol{n}$ à la surface S doit être avec le sens du courant dans un rapport conforme à un trièdre de référence direct.) Le champ magnétique que crée le feuillet magnétique dans l'espace extérieur coïncide avec celui que crée le courant $\mathcal{J}$ circulant sur le contour du feuillet. C'est ce qu'affirme le théorème d'Ampère. La surface S, limitée par le contour de courant considéré, peut être quelconque.

3. L'équivalence des champs magnétiques créés par le courant et par le feuillet magnétique ne se manifeste que dans le milieu extérieur. A l'intérieur du feuillet le champ magnétique se distingue essentiellement de celui du courant aux points correspondants de l'espace. Les lignes de force du champ magnétique et le potentiel magnétique ne présentent aucune discontinuité. Par contre, à chaque traversée du feuillet magnétique, le potentiel varie par saut de $4\pi\mathfrak{m} = 4\pi\mathcal{J}/c$. Cela tient à ce qu'à l'intérieur du feuillet le champ magnétique est très intense et son sens y est opposé à celui du champ extérieur. Le feuillet magnétique se comporte de ce point de vue comme un condensateur à armatures très rapprochées (fig. 154). Au début de la théorie du magnétisme on ne s'intéressait qu'aux champs magnétiques extérieurs aux aimants. En vertu du théorème d'Ampère on pouvait les simuler avec exactitude à l'aide des champs dus aux charges magnétiques adéquatement réparties à l'intérieur de l'aimant. C'est ce qui explique que les calculs fondés sur la notion de charges magnétiques donnaient des résultats corrects. Mais si on essayait d'appliquer ces conceptions au calcul des champs magnétiques à l'intérieur des aimants ou dans les régions de l'espace parcourues par des courants électriques, on aurait obtenu des résultats erronés.

4. L'analogie entre les courants et les feuillets magnétiques concerne non seulement les champs magnétiques qu'ils créent, mais aussi les forces qui s'exercent sur les courants et les feuillets placés dans un champ magnétique. Nous avons montré précédemment qu'une spire élémentaire parcourue par le courant et placée dans un

champ magnétique était soumise à un moment rotatoire $M = [\vec{\mathfrak{M}} B]$. Il nous reste à démontrer que dans un champ non uniforme une spire élémentaire est soumise à une force égale à

$$F = (\vec{\mathfrak{M}} \nabla) B. \tag{57.3}$$

Pour le démontrer il suffit de considérer le cas d'un contour élémentaire en forme de rectangle infiniment petit, puisqu'en traçant sur tout contour deux systèmes de courbes quelconques on peut le décomposer en quadrilatères plus petits (cf. fig. 144). Les mailles adjacentes aux frontières du contour ne seront pas rectangulaires, mais on peut tracer un nombre de courbes de division suffisamment grand pour que l'aire de ces mailles devienne très petite devant l'aire du contour.

Orientons les axes X et Z parallèlement aux côtés du contour rectangulaire (cf. fig. 152). Représentons les côtés AB et BC par les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$. Les forces s'exerçant sur les côtés AB et CD sont respectivement égales à $\frac{1}{c} \mathcal{J} [\boldsymbol{a}\boldsymbol{B}_1]$ et à $-\frac{1}{c} \mathcal{J} [\boldsymbol{a}\boldsymbol{B}_2]$, $\boldsymbol{B}_1$ et $\boldsymbol{B}_2$ étant les intensités moyennes des champs magnétiques correspondants. Comme $\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2 = -b\, \partial \boldsymbol{B}/\partial z$, la résultante de ces forces est

$$\boldsymbol{F}_1 = -\frac{\mathcal{J}}{c}\left[\boldsymbol{a}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}\right] b = -\frac{\mathcal{J}}{c} ab\left[\boldsymbol{e}_y \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}\right] = -\frac{\mathcal{J}}{c} S\left[\boldsymbol{e}_y \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}\right],$$

où $S = ab$ est l'aire du contour. Par conséquent $\boldsymbol{F}_1 = -\mathfrak{M}[\boldsymbol{e}_y\, \partial \boldsymbol{B}/\partial z]$. De même la résultante des forces appliquées aux côtés opposés DA et BC est $\boldsymbol{F}_2 = \mathfrak{M}\, [\boldsymbol{e}_z\, \partial \boldsymbol{B}/\partial y]$. La force totale appliquée au contour est donc

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \mathfrak{M}\left\{\left[\boldsymbol{e}_z \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial y}\right] - \left[\boldsymbol{e}_y \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}\right]\right\}.$$

En y portant $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{e}_x + B_y \boldsymbol{e}_y + B_z \boldsymbol{e}_z$ on obtient

$$\boldsymbol{F} = \mathfrak{M}\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial B_x}{\partial z}\boldsymbol{e}_z - \frac{\partial B_y}{\partial y}\boldsymbol{e}_x - \frac{\partial B_z}{\partial z}\boldsymbol{e}_x\right).$$

D'après (53.2) $\partial B_y/\partial y + \partial B_z/\partial z = -\partial B_x/\partial x$. Si nous supposons en outre que le contour se trouve dans un espace où ne circule aucun courant, l'application du théorème sur la circulation (56.1) montre que $\partial B_x/\partial y = \partial B_y/\partial x$, $\partial B_z/\partial z = \partial B_z/\partial x$. Il s'ensuit que

$$\boldsymbol{F} = \mathfrak{M}\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial B_y}{\partial x}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial B_z}{\partial x}\boldsymbol{e}_z\right) =$$

$$= \mathfrak{M}\frac{\partial}{\partial x}(B_x \boldsymbol{e}_x + B_y \boldsymbol{e}_y + B_z \boldsymbol{e}_z) = \mathfrak{M}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x}.$$

Comme le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ est dirigé suivant l'axe X, cette expression coïncide avec (57.3).

PROBLÈMES

1. Calculer la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique B permanent et uniforme.

Solution. La force appliquée $F = \frac{e}{c}[vB]$ est normale à la vitesse v de la particule et ne produit donc aucun travail; par suite la vitesse v de la particule reste constante en module. Mais sa direction peut varier. Supposons d'abord que la vitesse v soit perpendiculaire au champ magnétique B. La particule décrira alors une trajectoire circulaire. La vitesse angulaire de rotation ω est donnée par l'équation

$$-m\omega^2 r = \frac{e}{c}[vB].$$

En y substituant $v = [\omega r]$ on obtient

$$-m\omega^2 r = \frac{e}{c}[[\omega r]B] = \frac{e}{c}(\omega B)\, r,$$

d'où

$$\omega = -\frac{e}{mc}B. \tag{57.4}$$

La grandeur $|\omega|$ s'appelle *fréquence de cyclotron* et le rayon de la trajectoire circulaire

$$r = \frac{v}{|\omega|} = \frac{mcv}{|e|\,B} \tag{57.5}$$

s'appelle *rayon de Larmor*.

Si la vitesse v n'est pas perpendiculaire au champ B, et si le mouvement n'est pas relativiste, on peut poser $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$, où $v_{\parallel}$ est la composante de la vitesse le long du champ B et $v_{\perp}$ est la composante perpendiculaire à B. La particule tournera sur la trajectoire circulaire avec la même fréquence (57.4), mais le rayon de la trajectoire sera

$$r_{\perp} = \frac{mcv_{\perp}}{|e|\,B}. \tag{57.6}$$

A cette rotation vient se superposer un mouvement uniforme le long de B avec la vitesse $v_{\parallel}$. La trajectoire de la particule est une hélice dont l'axe est parallèle au champ magnétique B.

2. Une particule cosmique chargée (un proton par exemple) est captée par le champ magnétique terrestre et tourne autour de la Terre dans le plan équatorial sur une trajectoire circulaire de rayon $R = 6700$ km. Sur cette trajectoire l'intensité du champ magnétique terrestre est $B = 0{,}4$ G. Calculer l'énergie de la particule.

Réponse. $\mathscr{E} = mc^2 = eBR = 80$ GeV.

Indication. La vitesse de la particule cosmique est tellement proche de la vitesse de la lumière que son énergie au repos est négligeable devant son énergie cinétique. On calcule l'énergie cinétique par la formule $\mathscr{E} = mc^2$, où m est la masse relativiste de la particule.

3. L'accélérateur de protons de Serpoukhov permet d'accélérer les protons jusqu'à l'énergie $\mathscr{E} = 76$ GeV $= 7{,}6 \cdot 10^{10}$ eV. Si on néglige les parties de la trajectoire où la particule subit des accélérations, on peut poser que les protons accélérés se meuvent sur une trajectoire circulaire de rayon $R = 236$ m et y sont retenus par un champ magnétique normal au plan de l'orbite. Calculer l'intensité du champ magnétique nécessaire.

Réponse. $B = \mathscr{E}/(Re) = V/R = 1{,}07 \cdot 10^4$ G (V est la tension d'accélération correspondant à l'énergie $\mathscr{E}$, égale à $7{,}6 \cdot 10^{10}$ V $= 2{,}53 \cdot 10^8$ un. C.G.S.E.).

Indication. Considérer les protons comme des particules ultrarelativistes, puisque leur vitesse est tellement proche de la vitesse de la lumière que

l'énergie au repos des protons est négligeable devant leur énergie cinétique. Sous cette condition on calculera l'énergie cinétique par la formule $\mathscr{E} = mc^2$, où m est la masse relativiste du proton.

4. Une bille légère de masse $m = 0{,}5$ g et de rayon $r = 1$ cm est suspendue à un fil de grande longueur et tourne sur une trajectoire circulaire horizontale de rayon petit par rapport à la longueur du fil de suspension (pendule conique). Calculer la variation de la vitesse angulaire de rotation $\Delta\omega$ de la bille lorsque celle-ci aura été chargée jusqu'au potentiel $V = 3000$ V et placée dans un champ

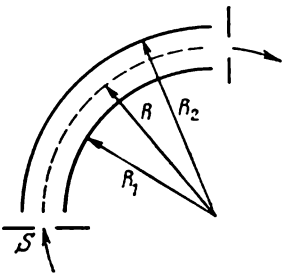


Fig. 155

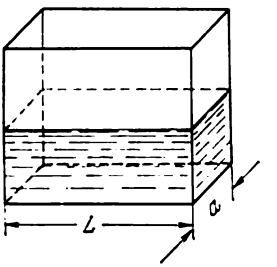


Fig. 156

magnétique vertical d'intensité $B = 3000$ G. Dans quel cas la vitesse angulaire de la bille s'accroîtra-t-elle et dans quel autre diminuera-t-elle?

N o t e. La formule définitive de la variation de la vitesse angulaire peut être simplifiée en utilisant la relation $\omega_0 = qB/(mc) \ll \sqrt{g/l}$, où q est la charge de la bille, l la longueur du fil de suspension et g l'accélération de la pesanteur.

R é p o n s e. $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \pm qB/(2mc) = \pm rVB/(2mc) = 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}$. La vitesse angulaire augmente lorsque les vecteurs B et ω_0 sont de sens opposés et diminue lorsqu'ils sont de même sens.

5. On dispose une aiguille aimantée au centre d'un cadre sous forme d'un triangle équilatéral de côté $a=36$ cm. Le plan du triangle est confondu avec le plan du méridien magnétique terrestre. Quelle intensité de courant $\mathcal{J}$ doit-on faire passer dans le cadre pour que l'aiguille tourne d'un angle de 45°? La composante horizontale du champ magnétique terrestre est $B_0 = 0{,}4$ G.

R é p o n s e. $\mathcal{J} = 1/18\ caB_0 = 2{,}4 \cdot 10^{10}$ un. C.G.S.E. $= 8$ A.

6. Un séparateur de masse, qui est un appareil destiné à separer les particules atomiques de masses différentes, se compose d'un condensateur cylindrique de rayon intérieur $R_1 = 2{,}4$ cm et de rayon extérieur $R_2 = 3$ cm (fig. 155). Le faisceau d'ions pénètre dans le séparateur à travers une fente étroite S disposée au milieu des armatures. Parallèlement à l'axe du condensateur (i.e. normalement au plan de la figure) on applique un champ magnétique uniforme $B = 2000$ G.

Quelle différence de potentiel et dans quel sens doit-on appliquer aux armatures du condensateur pour que l'ion positif Li^7 portant une seule charge décrive dans le condensateur une trajectoire médiane de rayon $R = 2{,}7$ cm? Calculer l'intensité du champ électrique sur cette trajectoire. L'énergie de l'ion est $\mathscr{E} = 1000$ eV. La masse de l'atome d'hydrogène est $1{,}67 \cdot 10^{-24}$ g. De combien faut-il faire varier la différence de potentiel appliquée pour que l'ion Li^6 puisse décrire la même trajectoire?

R é p o n s e. Pour Li^7 on a $V = ER \ln (R_2/R_1) \approx E(R_2 - R_1) \approx 245$ V, $E = 408$ V/cm. Pour Li^6 on a $V = 229$ V, $E = 381$ V/cm.

7. On verse un électrolyte de conductivité $\lambda = 0{,}2\ \mathrm{ohm}^{-1} \cdot \mathrm{cm}^{-1}$ dans une cuvette rectangulaire dont les parois avant et arrière sont en métal et les parois latérales sont en un matériau diélectrique (fig. 156). On applique aux parois

métalliques une tension $V = 30$ V et on dispose la cuvette dans un champ magnétique uniforme $B = 100$ G dirigé suivant la verticale. Dimensions de la cuvette: $L = 20$ cm, $a = 2$ cm; densité de l'électrolyte $\rho = 1$ g/cm³. Calculer la différence Δh des niveaux du liquide auprès de la paroi de gauche et de la paroi de droite de la cuvette.

Réponse. $\Delta h = \dfrac{\lambda VBL}{ac\,\rho g} = 0{,}6$ cm.

8. Pour évacuer la chaleur produite dans les réacteurs nucléaires on utilise comme fluide caloporteur des métaux fondus. Pour assurer la circulation des métaux fondus dans les conduits, on utilise des pompes électromagnétiques: une partie du conduit contenant le métal fondu est placée dans un champ magnétique transversal, i.e. le champ perpendiculaire à l'axe du conduit. On fait passer à travers cette même partie du conduit un courant électrique transversal

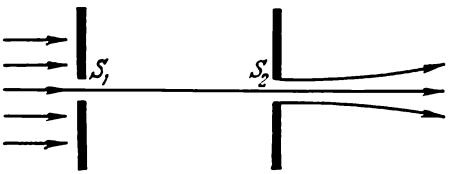


Fig. 157

perpendiculairement à l'axe du conduit et au champ magnétique; ainsi apparaît une force qui met le liquide en mouvement. Evaluer l'intensité de courant nécessaire pour assurer la circulation du mercure à travers un conduit de diamètre $D = 20$ mm et de longueur $L = 10$ m avec une vitesse $V = 1$ l/s. Viscosité du mercure $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ dynes·s/cm². Intensité du champ magnétique $B = 1000$ G.

Solution. La force s'exerçant sur la colonne de mercure dans le conduit est $F \approx \mathcal{J}DB/c$. Cette force équivaut à une différence de pression aux extrémités du conduit égale à $P_2 - P_1 = 4F/(\pi D^2)$. En portant cette différence de pression dans la formule de Poiseuille (cf. t. I, § 97) on trouve

$$\mathcal{J} \approx 32\eta\, cL/(BD^3) = 1{,}8 \cdot 10^{12} \text{ un. C.G.S.E.} = 600 \text{ A}.$$

9. Calculer le rapport de la force de répulsion coulombienne à la force d'attraction d'Ampère s'exerçant entre deux faisceaux parallèles d'électrons ayant été accélérés par une différence de potentiel $V = 10$ kV.

Réponse. $F_{\text{coul}}/F_{\text{amp}} = mc^2\,(2eV) \approx 25$.

10. Deux fentes S_1 et S_2 (fig. 157) de largeur $d = 0{,}1$ cm chacune, pratiquées dans un vase évacué, permettent de découper un faisceau plan d'électrons d'une énergie $\mathscr{E} = 400$ eV. A quelle distance x de la fente S_2 la largeur du faisceau électronique se trouvera-t-elle doublée par suite de la répulsion coulombienne des électrons, sachant que le courant électronique par unité de longueur de la fente (à la sortie de la fente S_2) est $i = 10^{-4}$ A/cm? Poser que les fentes sont infiniment longues.

Solution. On peut calculer le champ électrique E en négligeant l'élargissement du faisceau. A la frontière du faisceau et en dehors de celui-ci $E = 2\pi\sigma$, où $\sigma = i/e$ est la charge par unité de surface du faisceau. Les électrons se trouvant à la périphérie du faisceau se meuvent dans le sens latéral avec une accélération constante et au bout d'un temps t se déplacent de

$$\Delta y = eEt^2/(2m) = eEx^2/(2mv^2).$$

La distance cherchée x correspond à $\Delta y = d/2$, d'où

$$x = \sqrt{m\,dv^3/(2\pi ie)}, \quad v = \sqrt{2\mathscr{E}/m}$$

d'où $x = 13$ cm.

11. Un conducteur cylindrique de longueur infinie (fig. 158) est constitué de deux cylindres coaxiaux: au centre un cylindre massif de rayon r_1 fabriqué avec un matériau de résistivité ρ_1 et à l'extérieur un cylindre creux de rayon extérieur r_2 et de résistivité ρ_2. La surface extérieure du cylindre massif est en con-

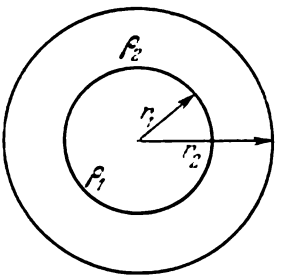


Fig. 158

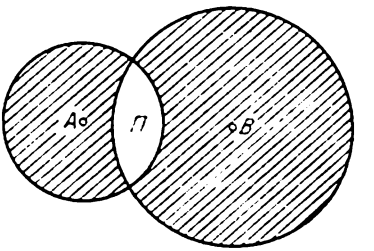


Fig. 159

tact électrique avec la surface intérieure du cylindre creux. Le conducteur est parcouru parallèlement à son axe par un courant continu $\mathscr{J}$. Trouver l'expression de l'intensité du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur des cylindres.

Réponse.

$$B = \begin{cases} 2\mathscr{J}\rho_2 r/(cA) & (r \leqslant r_1), \\ 2\mathscr{J}\,[\rho_1(r^2 - r_1^2) + \rho_2 r_1^2]/(cAr) & (r_1 \leqslant r \leqslant r_2), \\ 2\mathscr{J}/(cr), & (r \geqslant r_2), \end{cases}$$

$$A = \rho_1(r_2^2 - r_1^2) + \rho_2 r_1^2.$$

12. Un tube cylindrique à paroi mince, de rayon $a = 25$ mm, est parcouru par un courant continu $\mathscr{J} = 20$ A. Le tube comporte une fente de largeur $d = 1$ mm parallèle à l'axe du tube. Calculer le champ magnétique à l'intérieur du tube à grande distance r du milieu de la fente ($r \gg d$).

Réponse. A l'intérieur du tube les lignes de force magnétiques ont la forme d'arcs de cercles coaxiaux centrés sur l'axe de la fente. $B = \mathscr{J}\,d/(\pi\,car)$. Sur l'axe du tube (pour $r = a$) $B = \mathscr{J}\,d/(\pi\,ca^2) \approx 0{,}1$ G.

13. Deux conducteurs rectilignes de longueur infinie en matériau non magnétique et isolés l'un de l'autre sont parcourus en sens opposés par des courants de même densité $j = 1000$ A/cm². Les conducteurs sont délimités par des secteurs cylindriques et sont séparés l'un de l'autre par une cavité П. (Sur la figure 159 les sections droites des conducteurs sont hachurées. Calculer la grandeur et le sens du champ magnétique dans la cavité П. Dans le conducteur de gauche le courant pointe vers le lecteur et dans celui de droite il s'en éloigne. La distance entre les axes des cylindres est $AB = D = 5$ cm.

Réponse. $B = 2\pi jD = 3140$ G. Le champ B est perpendiculaire à la droite AB et orienté suivant la verticale ascendante.

14. Calculer l'intensité de champ magnétique à l'intérieur d'une cavité cylindrique infinie pratiquée dans un conducteur cylindrique infini, parcouru

par un courant continu de densité j, uniformément réparti sur la section du conducteur. La distance entre les axes du conducteur et de la cavité est égale à d.

Réponse. $B = \frac{2\pi}{c} j\,[sd]$, où s est un vecteur unitaire orienté suivant le courant et d un vecteur mené de l'axe du conducteur à l'axe de la cavité cylindrique.

15. Un vase cylindrique de rayon R et de grande hauteur est rempli d'électrolyte. A l'intérieur du vase et parallèlement à son axe on dispose une tige métallique cylindrique de rayon r dont la surface est recouverte d'une peinture isolante. La distance entre les axes du vase et de la tige est a. L'électrolyte est parcouru par un courant d'intensité $\mathcal{J}$ qui est parallèle à l'axe et qui retourne à la source par la tige isolée. En supposant que dans l'électrolyte la densité de courant est constante, calculer la force qu'exerce le champ magnétique créé par ces courants sur l'unité de longueur de la tige. Quel est le sens de cette force?

Réponse. $F = \frac{2\mathcal{J}^2}{c^2(R^2-r^2)} a$. La force est orientée de l'axe du cylindre vers l'axe de la tige.

16. Une bille chargée de rayon a tourne d'un mouvement uniforme autour de son diamètre avec la vitesse angulaire ω. La charge totale de la bille est q. Calculer le champ magnétique créé par la bille à une distance r grande devant a, en admettant que la charge q est uniformément répartie: 1) sur la surface de la bille, 2) dans le volume de la bille.

Réponse. 1) $B = \frac{qa^2}{3c}\left[\frac{3(\omega r)r}{r^5} - \frac{\omega}{r^3}\right]$; 2) $B = \frac{qa^2}{5c}\left[\frac{3(\omega r)r}{r^5} - \frac{\omega}{r^3}\right]$. (Le vecteur r est mené par le centre de la bille.)

Solution. Considérons le cas 1). Traçons sur la surface de la bille une zone sphérique infiniment étroite comprise entre les angles ϑ et $\vartheta + d\vartheta$ (fig. 160). Lorsque cette zone tourne à la vitesse angulaire ω elle est équivalente à un courant circulaire $d\mathcal{J} = \omega q \times \sin\vartheta\, d\vartheta/(4\pi)$ de moment magnétique $d\mathfrak{M} = S\, d\mathcal{J}/c = \pi a^2 q\omega \sin^3\vartheta d\vartheta/(4\pi c)$. En intégrant sur ϑ on trouve le moment magnétique de la bille: $\mathfrak{M} = qa^2\omega/(3c)$. On en tire le résultat indiqué dans la réponse. Le cas 2) est traité de façon analogue.

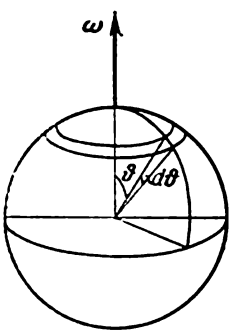


Fig. 160

17. Pour simuler la trajectoire d'une particule atomique de charge e et d'impulsion p en mouvement dans un champ magnétique permanent, on met souvent à profit le fait qu'un cordon conducteur souple et très léger (impondérable) parcouru par un courant $\mathcal{J}$ et soumis à une tension mécanique T constante occupe dans le même champ magnétique une position se confondant avec la trajectoire de la particule. (On suppose qu'en dehors du champ magnétique les différents segments du cordon sont rectilignes et parallèles aux segments rectilignes correspondants de la trajectoire de la particule.) Justifier cette méthode et trouver la relation existant entre $\mathcal{J}$, e, p, T. La grandeur du champ magnétique B peut varier dans l'espace mais sa direction doit être invariable. Le cordon et la trajectoire de la particule sont perpendiculaires au champ magnétique.

Solution. Le rayon de courbure de la trajectoire de la particule dans un champ magnétique est $\rho = cp/(eB)$. L'unité de longueur du cordon tendu est soumise à une force élastique orthogonale T/ρ_1 qui est équilibrée par la force d'Ampère $\mathcal{J}B/c$. On en tire le rayon de courbure du cordon $\rho_1 = Tc/(\mathcal{J}B)$. Si $\rho_1 = \rho$, i.e. $\mathcal{J}p = Te$, la forme de la trajectoire sera confondue avec celle du cordon.

§ 58. Champ magnétique dans les substances

1. Dans les substances le champ magnétique peut être excité, d'une part, par les courants électriques circulant dans des fils et, d'autre part, par les mouvements des particules chargées à l'intérieur des atomes et des molécules. Selon la théorie semi-classique de Bohr, les électrons tournent autour des noyaux atomiques sur des orbites fermées. En outre ils tournent autour de leurs propres axes à l'instar des planètes. A cette rotation interne est lié un certain moment cinétique appelé *spin de l'électron*. Les noyaux atomiques possèdent également un spin. Les rotations orbitales et de spin des particules chargées sont analogues à des courants et créent des champs magnétiques. Les conceptions concrètes du mouvement des électrons sur des orbites classiques et de leurs rotations autour de leurs propres axes furent remplacées plus tard par une conception plus générale et plus abstraite du mouvement élaborée par la mécanique quantique. Dans cette nouvelle conception la notion de trajectoire des particules n'existe plus. Le terme « mouvement orbital » y subsiste mais ne présente qu'une signification conventionnelle. Pour la théorie du magnétisme, ce qui importe ce n'est pas la représentabilité des mouvements, mais les moments mécanique et magnétique liés à ces mouvements. Selon les conceptions modernes, le magnétisme des substances serait dû à trois causes: 1) au mouvement orbital des électrons autour des noyaux atomiques; 2) au spin des électrons; 3) au spin des noyaux atomiques. Etant lourds, les noyaux atomiques tournent beaucoup plus lentement que les électrons autour de leurs propres axes. Par suite les moments magnétiques des noyaux atomiques sont des milliers de fois plus petits que ceux des électrons. Le magnétisme nucléaire ne devient notable qu'à proximité du zéro absolu de température et encore à condition que les moments magnétiques de spin et orbital des électrons se compensent mutuellement en donnant un moment résultant nul.

Etant animés de mouvements thermiques désordonnés, les atomes sont orientés dans les substances de façon chaotique en l'absence de champ magnétique extérieur. Les champs magnétiques qu'ils créent se compensent mutuellement dans l'espace extérieur. Lorsqu'on applique un champ magnétique extérieur, les atomes s'orientent complètement ou partiellement le long du champ et leur compensation mutuelle n'a plus lieu. On dit alors que le corps est *aimanté*. Les corps susceptibles d'être aimantés sont appelés *corps magnétiques*. La majorité des substances ne s'aimantent que faiblement sous l'action d'un champ magnétique extérieur. Seules les substances *ferromagnétiques* présentent des propriétés magnétiques bien marquées: ce sont le fer, le cobalt, le nickel, nombre de leurs alliages ainsi que certains éléments des terres rares. Les aimants permanents fabriqués en aciers et en différents alliages magnétiques restent aiman-

tés en l'absence de champ magnétique extérieur. On peut aimanter (bien que faiblement) une tige d'acier dans le champ magnétique terrestre en l'orientant le long du méridien magnétique et en le tapotant avec un marteau. Sur l'extrémité de la tige dirigée vers le pôle magnétique Sud (il est au Nord) apparaît un pôle magnétique Nord, et sur l'autre extrémité apparaît un pôle Sud. Si on retourne la tige et si on la tapote avec un marteau, ses pôles s'inversent.

2. Tout comme le champ électrique, le champ magnétique peut être *microscopique* ou *macroscopique*. Le champ microscopique est un champ vrai créé par les charges élémentaires mobiles de la substance. Il varie très fortement sur des distances atomiques. Le champ macroscopique dérive du champ microscopique par moyennage sur des régions de l'espace physiquement infinitésimales. On désigne par $\boldsymbol{B}$ l'intensité du champ macroscopique. Le vecteur $\boldsymbol{B}$ est le vecteur fondamental caractérisant le champ macroscopique dans les substances. Du point de vue champ magnétique produit, les rotations orbitales et de spin des électrons et des noyaux atomiques sont équivalentes à des courants circulant dans les atomes des substances. On les appelle *courants moléculaires*. Pour calculer le champ macroscopique $\boldsymbol{B}$, on effectue un moyennage des courants moléculaires en les remplaçant par des courants macroscopiques variant dans l'espace de façon continue. Ces courants macroscopiques variables sont appelés *courants d'aimantation*. Nous noterons $\boldsymbol{j}_m$ leur densité. Les courants usuels qui se propagent le long des fils électriques sont liés au déplacement des porteurs de courant, électrons et ions, dans les substances. On les appelle *courants de conduction*. Nous noterons $\boldsymbol{j}$ la densité des courants de conduction. Ainsi le champ $\boldsymbol{B}$ est créé par les courants de conduction et d'aimantation. L'influence du milieu sur le champ magnétique se réduit à l'action des courants d'aimantation. Si on connaît les courants d'aimantation et de conduction, on peut s'abstraire de l'existence de la substance et calculer l'intensité $\boldsymbol{B}$ du champ magnétique par les formules établies pour le vide.

Puisque le vecteur $\boldsymbol{B}$ est l'intensité du champ magnétique excité dans le vide par certains courants, il doit vérifier l'équation

$$\oint \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S} = 0, \tag{58.1}$$

qui sous forme différentielle s'écrit

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{58.2}$$

Chacune de ces équations exprime le fait qu'il n'existe pas de charges magnétiques.

Le théorème sur la circulation s'applique évidemment au vecteur $\boldsymbol{B}$, à condition d'ajouter au courant de conduction $\mathcal{J}$ le cou-

rant d'aimantation $\mathcal{J}_m$. On obtient alors

$$\oint_L (B\,dl) = \frac{4\pi}{c}(\mathcal{J} + \mathcal{J}_m), \tag{58.3}$$

et sous forme différentielle

$$\operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c}(j + j_m). \tag{58.4}$$

Dans la formule (58.3) $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}_m$ dénotent les courants totaux de conduction et d'aimantation qui s'écoulent à travers le contour fermé L.

3. D'habitude on caractérise l'aimantation du milieu non par les courants d'aimantation, comme nous venons de le faire, mais

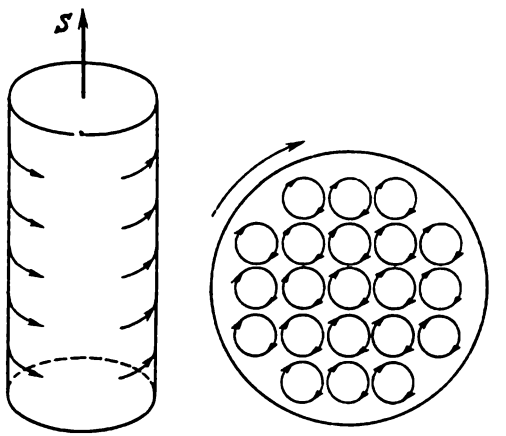


Fig. 161

par le *vecteur aimantation* I. C'est le moment magnétique moyen de l'unité de volume du magnétique produit par les courants moléculaires. La densité des courants d'aimantation circulant dans le milieu peut s'exprimer en termes de I.

Supposons d'abord que la substance magnétique se présente sous forme d'un cylindre circulaire aimanté dont le moment magnétique est orienté le long de l'axe du cylindre (fig. 161). Dans une substance magnétique aimantée, les courants moléculaires sont corrélés, de sorte que les champs magnétiques créés par chacun d'eux se renforcent mutuellement. En notant $\vec{\mathfrak{M}}$ le moment magnétique moyen d'une molécule, on a évidemment

$$I = n\vec{\mathfrak{M}}, \tag{58.5}$$

n étant le nombre moyen de molécules contenues dans l'unité de volume. Le moment magnétique total du cylindre considéré est

égal à VI, où $V = SL$ est le volume du cylindre (S aire de la base, L hauteur). Aux points de contact des molécules adjacentes, leurs courants moléculaires sont orientés en sens opposés et se compensent à l'échelle macroscopique. Seuls les courants moléculaires périphériques ne sont pas compensés; s'additionnant ils produisent un courant superficiel macroscopique $\mathcal{J}_m$ circulant sur la surface latérale du cylindre. Dans l'espace extérieur ce courant crée le même champ magnétique que le ferait la totalité des courants moléculaires, c'est donc le courant d'aimantation $\mathcal{J}_m$. Son moment magnétique est égal, d'une part, à $\mathcal{J}_m S/c$ et, d'autre part, à $VI = SLI$. Par conséquent $\mathcal{J}_m S/c = SLI$ et comme les vecteurs S et I ont même orientation $\mathcal{J}_m = cLI$. Le courant d'aimantation superficiel par unité de longueur du cylindre est égal à

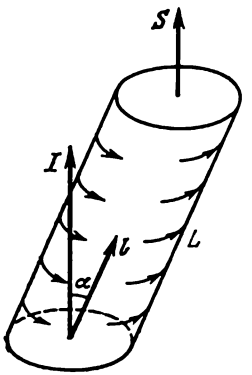


Fig. 162

$$i_m = cI. \tag{58.6}$$

Généralisons le résultat (58.6) au cas d'un cylindre oblique (fig. 162). Posons que les courants d'aimantation superficiels circulent dans des plans parallèles aux bases du cylindre. Le vecteur aimantation I sera perpendiculaire à ces bases. En notant α l'angle entre le vecteur I et l'axe du cylindre, pour le moment magnétique de celui-ci on peut écrire $VI = SLI \cos \alpha$. Ce même moment s'exprime par $\mathcal{J}_m S/c = Li_m S/c$, i_m étant le courant d'aimantation par unité de longueur de la génératrice de la surface latérale du cylindre. En égalant ces deux expressions on obtient

$$i_m = cI \cos \alpha = c\,(Il) = cI_l, \tag{58.7}$$

où l désigne le vecteur unitaire dirigé suivant l'axe du cylindre. Ainsi le courant i_m ne dépend que de la composante axiale du vecteur I. La formule (58.7) est la forme généralisée de (58.6). On peut l'utiliser dans les cas où l'aimantation de la substance magnétique n'est pas uniforme. On doit prendre alors un cylindre infiniment petit. Si l'aimantation n'est pas uniforme, la substance magnétique est parcourue non seulement par des courants superficiels, mais encore par des courants d'aimantation spatiaux. On donne dans le paragraphe suivant l'expression de la densité de ces derniers courants.

§ 59. Théorème sur la circulation du vecteur champ magnétique dans les substances

1. Calculons la circulation du vecteur B le long d'un contour fermé L. Pour cela nous devons calculer le courant d'aimantation $\mathcal{J}_m$ traversant ce contour. Menons une surface arbitraire S limitée

par le contour considéré. La figure 163 représente la section de cette surface et du contour L qui la limite par le plan de la figure. Certains courants moléculaires interceptent deux fois la surface S, une fois dans le sens positif et une autre fois dans le sens négatif. Ces courants ne contribuent donc pas au courant d'aimantation transperçant la surface S. D'autres courants moléculaires embrassent le contour L et chacun de ces courants ne traverse la surface S qu'une seule fois car le courant moléculaire dirigé en sens inverse se trouve

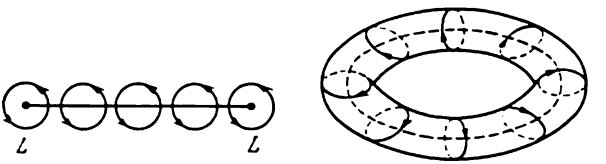


Fig. 163

au-delà de la surface S. Ce sont ces courants moléculaires qui donnent naissance au courant d'aimantation macroscopique $\mathcal{J}_m$ traversant la surface S.

Cherchons à exprimer le courant $\mathcal{J}_m$ par le vecteur aimantation I. Entourons le contour L d'un tube infiniment mince (fig. 163, à droite). D'après (58.7) la surface de ce tube est parcourue par un courant d'aimantation de densité linéaire $i_m = cI_l$. Ce courant ne traverse qu'une seule fois la surface S. Le courant par unité de longueur du tube est $i_m\, dl = cI_l\, dl = c\,(I\, dl)$. Le courant d'aimantation total traversant la surface S s'obtient en intégrant le long du contour fermé L:

$$\mathcal{J}_m = c \oint_L (I\, dl). \tag{59.1}$$

En portant cette expression dans la formule (58.3) on confère à cette dernière la forme suivante:

$$\oint (B - 4\pi I)\, dl = \frac{4\pi}{c}\, \mathcal{J} \tag{59.2}$$

et sous forme différentielle

$$\operatorname{rot} B = \frac{4\pi}{c}\,(j + c \operatorname{rot} I). \tag{59.3}$$

En comparant (59.3) avec (58.4) on obtient

$$j_m = c \operatorname{rot} I. \tag{59.4}$$

Si l'aimantation est uniforme, i.e. $I = \text{const}$, on a $j_m = 0$ et si elle ne l'est pas la densité spatiale du courant d'aimantation est généralement différente de zéro.

2. Introduisons le vecteur auxiliaire

$$H = B - 4\pi I. \tag{59.5}$$

Les formules (59.2) et (59.3) s'écriront alors

$$\oint H\,dl = \frac{4\pi}{c}\mathcal{J}, \tag{59.6}$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j. \tag{59.7}$$

Nous voyons que l'introduction du vecteur H a fait disparaître les courants d'aimantation et les formules (59.6) et (59.7) ne contiennent plus que les courants de conduction. C'est l'avantage que procure l'introduction du vecteur H. En théorie du magnétisme le vecteur auxiliaire H joue le même rôle que celui que joue le vecteur D en théorie des diélectriques. Le vecteur fondamental est le vecteur B qui, étant un *vecteur de force*, devrait s'appeler intensité de champ magnétique dans les substances. Mais pour des raisons historiques c'est le vecteur H qu'on appelle *intensité de champ magnétique dans les substances*, le vecteur B étant improprement appelé *induction magnétique*. Cette terminologie malencontreuse prit naissance parce que la théorie du magnétisme se développa dans ses débuts par analogie avec l'électrostatique. On admettait que le champ magnétique avait pour source des *charges magnétiques* dont l'existence fut démentie plus tard. Nous sommes contraints d'utiliser cette terminologie puisqu'elle est d'usage général, mais nous éviterons d'user des termes « induction » et « intensité » de champ magnétique en les remplaçant respectivement par « vecteur B » et « vecteur H ». Dans le vide les vecteurs B et H sont confondus.

3. D'après la définition (59.5) les vecteurs B et H ont mêmes dimensions et doivent avoir la même unité de mesure. Dans le système gaussien l'unité de B est le *gauss*. La même unité sert à mesurer H mais on l'appelle alors *œrsted*. On mesure donc B en gauss et H en œrsteds et on estime qu'il est incorrect de dire que le champ B vaut tant d'œrsteds et le champ H tant de gauss. Nous ne pouvons approuver une telle convention puisqu'*il n'existe absolument aucune différence entre le gauss et l'œrsted*. On devrait conserver une seule dénomination de cette unité de mesure, le gauss ou l'œrsted.

§ 60. Conditions aux limites pour les vecteurs B et H

1. Il est facile de déduire des équations (58.1) et (59.6) les conditions que doivent vérifier les vecteurs B et H sur la surface de séparation de deux magnétiques. Formellement l'équation (58.1) ne se distingue pas de l'équation correspondante du vecteur induction électrique D en l'absence de charges électriques. Il en résulte que

sur une surface de séparation les composantes normales du vecteur B doivent être continues:

$$B_{1n} = B_{2n}. \tag{60.1}$$

Etablissons maintenant les conditions aux limites pour le vecteur H. Pour assurer la généralité de la démonstration, nous supposerons que la surface de séparation est parcourue par un courant de conduction superficiel de densité linéaire i. Appliquons le théorème de la circulation (59.6) à un contour rectangulaire infiniment petit $ABCD$ dont la hauteur est négligeable devant la longueur l de sa base (fig. 164). On pourra négliger alors la contribution des côtés AB et CD à la circulation. Dans cette approximation la circulation du vecteur H sera $(H_{2t} - H_{1t})\, l$. D'après le théorème de la circulation, cette même grandeur est égale à $\frac{4\pi}{c}\, i_N l$, où i_N est la composante du courant i le long de la normale au contour $N = [nt]$. En égalant les deux expressions, on obtient

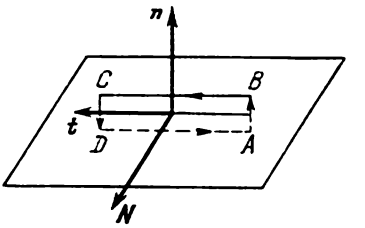


Fig. 164

$$H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c}\, i_N. \tag{60.2}$$

Mettons cette relation sous forme vectorielle et introduisons pour cela le vecteur unité de la tangente à la surface de séparation $t = [Nn]$. Le premier membre de l'égalité (60.2) s'écrira alors sous la forme

$$(H_2 - H_1)\, t = (H_2 - H_1)\cdot[Nn] = ([nH_2] - [nH_1])\, N$$

et le second membre sous la forme $(4\pi)/c\ (iN)$. Le vecteur N contenu dans la surface de séparation peut y prendre n'importe quelle orientation. Aussi en égalant ces deux dernières expressions on obtient

$$[nH_2] - [nH_1] = \frac{4\pi}{c}\, i. \tag{60.3}$$

Si aucun courant de conduction ne circule sur la surface de séparation

$$H_{1t} = H_{2t}, \tag{60.4}$$

ce qui signifie que les composantes tangentielles du vecteur H sont continues sur les surfaces de séparation de magnétiques différents.

2. Les conditions aux limites (60.1) et (60.4) suggèrent une *méthode de principe* pour la mesure des vecteurs B et H dans les substances. Il est impossible de mesurer le champ magnétique dans une substance à l'aide d'une spire d'épreuve ou d'une aiguille aiman-

tée pour deux raisons. Premièrement, parce qu'il n'est pas toujours possible de disposer une spire d'épreuve au sein de la substance étudiée (par exemple dans le cas d'une substance solide) et deuxièmement, même si on pouvait le faire, on ne saurait déduire les vecteurs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$ de la force s'exerçant sur la spire et de son moment. Par suite il est nécessaire de pratiquer une cavité dans la substance et de mesurer $\boldsymbol{B}$ dans cette cavité. Or le résultat de la mesure doit dépendre de la forme de la cavité. Nous considérerons deux cas importants.

Premier cas. On a creusé dans le magnétique un canal infiniment étroit parallèlement au champ magnétique. L'extraction de la substance qui remplissait le canal ne perturbe qu'infiniment peu le champ dans la substance environnante. En vertu de la condition aux limites (60.4) les vecteurs $\boldsymbol{H}$ dans le canal et dans la substance environnante doivent être les mêmes. Plaçons la spire d'épreuve dans le canal et mesurons la grandeur de $\boldsymbol{B}$. Cette dernière sera égale au vecteur $\boldsymbol{H}$ dans la substance ambiante.

Deuxième cas. On pratique dans le magnétique une fente délimitée par deux plans infiniment rapprochés orthogonaux au champ magnétique. L'extraction de la substance qui remplissait cette fente infiniment étroite ne perturbe qu'infiniment peu le champ magnétique dans la substance environnante. En vertu de (60.1) les vecteurs $\boldsymbol{B}$ dans la fente et dans le milieu ambiant sont les mêmes. Ayant mesuré $\boldsymbol{B}$ dans la fente, on détermine sa valeur dans le magnétique.

§ 61. Susceptibilité et perméabilité magnétiques

1. Le fer et toutes les substances dites ferromagnétiques (acier, cobalt, nickel, alliages magnétiques divers) ne présentent pas seulement des propriétés magnétiques très marquées, mais se caractérisent aussi par une relation compliquée entre les vecteurs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{I}$. Outre le fait que cette relation n'est pas linéaire, on observe pour ces substances un effet d'*hystérésis*, terme qui désigne l'existence d'une dépendance de l'aimantation avec l'histoire du corps étudié. Pour les milieux para- et diamagnétiques (ceux-ci possèdent des propriétés magnétiques faibles par comparaison avec les ferromagnétiques) la relation entre $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{I}$ est linéaire et pour les milieux isotropes elle peut être écrite sous la forme $\boldsymbol{I} = \varkappa_1 \boldsymbol{B}$. Il aurait été rationnel d'écrire la relation entre $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{B}$ sous cette forme, mais en raison des circonstances historiques dont nous avons parlé au § 59, il est d'usage d'exprimer le vecteur $\boldsymbol{I}$ non pas en fonction de $\boldsymbol{B}$, mais en fonction de $\boldsymbol{H}$. On écrit donc

$$\boldsymbol{I} = \varkappa \boldsymbol{H}. \tag{61.1}$$

On ne commet ainsi aucune erreur puisqu'en vertu de (59.5) $\boldsymbol{I}$, étant proportionnel à $\boldsymbol{B}$, l'est aussi à $\boldsymbol{H}$. En portant (61.1) dans

(59.5) on obtient

$$B = \mu H, \tag{61.2}$$

où

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa. \tag{61.3}$$

La grandeur $\varkappa$ s'appelle *susceptibilité magnétique* et la grandeur μ *perméabilité magnétique* des substances. Les substances pour lesquelles $\varkappa > 0$ et donc $\mu > 1$ sont dites *paramagnétiques*. Sont paramagnétiques l'oxygène, l'aluminium, le platine, le chlorure de fer III ($FeCl_3$), etc. Les substances pour lesquelles $\varkappa < 0$ et $\mu < 1$ sont dites *diamagnétiques*. Tels sont l'azote, le gaz carbonique, l'eau, l'argent, le bismuth, etc. Les paramagnétiques s'aimantent dans le sens du champ magnétique et les diamagnétiques à l'encontre du champ magnétique.

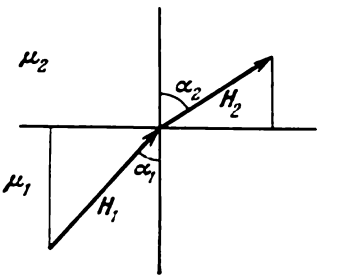


Fig. 165

On utilise souvent une relation de la forme (61.2) pour les ferromagnétiques, le fer doux par exemple. Il est évident que cette relation ne tient pas compte des effets d'hystérésis. Pour tenir compte des effets non linéaires, on doit encore considérer μ comme une fonction de l'intensité du champ magnétique H (ou B). Dans les champs faibles on peut développer B suivant les puissances de H et ne conserver que le premier terme de ce développement. Dans cette approximation la grandeur μ peut être considérée comme une constante. Nous étudierons plus en détail les propriétés des ferromagnétiques aux paragraphes 76, 77, 79, 80. Dans l'étude de divers phénomènes magnétiques nous utiliserons maintenant les relations (61.1) et (61.2) en supposant que les $\varkappa$ et les μ sont des constantes indépendantes de l'intensité du champ magnétique appliqué. Il est évident que ce n'est rigoureusement valable que pour les dia- et les paramagnétiques. Pour les ferromagnétiques les résultats que l'on obtient ainsi ne devront être considérés que comme des estimations.

2. A la frontière de deux magnétiques, les lignes de force magnétiques doivent subir une réfraction, ainsi que le montrent les formules (60.1) et (60.4) compte tenu de (61.2). Considérons une frontière plane où ne circule aucun courant de conduction (fig. 165). La continuité des composantes tangentielles du vecteur H conduit à la relation

$$H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2$$

et la continuité des composantes normales du vecteur B à la relation

$$\mu_1 H_1 \cos \alpha_1 = \mu_2 H_2 \cos \alpha_2.$$

On tire de ces deux équations

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}. \tag{61.4}$$

C'est une relation analogue à (15.9) qui fut établie pour les lignes de force électriques. Lorsqu'on passe d'un magnétique de plus faible perméabilité dans un magnétique de perméabilité plus grande, la ligne de force magnétique s'écarte de la normale vers la frontière. Le résultat en est une *concentration des lignes de force magnétiques* dans le magnétique de plus grande perméabilité μ.

La figure 51 montre la déformation des lignes de force électriques résultant de l'introduction d'une sphère diélectrique creuse dans un champ électrique uniforme. Une sphère creuse en fer agit de la même façon dans un champ magnétique. Du fait de la réfraction les lignes de force magnétiques se concentrent surtout dans le fer. A l'intérieur de la cavité leur concentration est petite, ce qui témoigne que le champ magnétique y est notablement plus faible qu'à l'extérieur ; cela signifie que l'enveloppe en fer se comporte comme un écran vis-à-vis du champ magnétique extérieur. C'est le principe du *blindage magnétique*. Pour soustraire un appareil sensible à l'action de champs magnétiques extérieurs, on l'enferme dans une enceinte en fer.

Mais cette enceinte ne saurait soustraire les corps extérieurs aux champs magnétiques créés par des courants ou par des aimants se trouvant à l'intérieur de l'enceinte. Ainsi, par exemple, le champ magnétique créé par un fil cylindrique rectiligne parcouru par un courant ne sera pas modifié si on enferme le fil dans un tube de fer coaxial. Cela résulte directement du théorème de la circulation. Les lignes de force magnétiques sont alors des cercles centrés sur l'axe du conducteur (cf. fig. 138). La circulation du vecteur $\boldsymbol{H}$ le long de l'un de ces cercles sera $2\pi RH$. Selon le théorème de la circulation cette même quantité s'exprime aussi par $4\pi\,\mathcal{J}/c$. En égalant les deux expressions on trouve $H = 2\,\mathcal{J}/(cR)$, que le conducteur soit blindé ou non. On s'en rend aisément compte à l'aide de l'expérience de démonstration suivante. On réalise d'abord l'expérience d'Œrsted avec un fil ordinaire (cf. fig. 134). On répète ensuite cette expérience après avoir enfermé le même fil dans un tube en fer. Dans les deux cas l'aiguille aimantée dévie d'un même angle.

Une enceinte en fer ne protège que partiellement les corps qu'elle contient contre l'action des champs magnétiques extérieurs. Plus la perméabilité magnétique μ du matériau de l'enceinte est grande, meilleur est l'effet de blindage. Il existe cependant des corps qui de ce point de vue sont parfaits. Ce sont les *supraconducteurs*. Une enceinte en supraconducteur se trouvant dans l'état de supraconductibilité assure une protection totale du corps qu'elle renferme contre l'action des champs magnétiques extérieurs (cf. § 80).

3. Lorsqu'on introduit une substance magnétique dans un champ magnétique uniforme, elle s'aimante. Le champ magnétique qui apparaît dans ce corps dépend fortement de la forme de ce dernier. Dans le cas général le champ intérieur n'est pas uniforme. Ce n'est que pour des corps taillés en forme d'ellipsoïde que le champ magnétique intérieur est uniforme. Ce champ intérieur se distingue du champ extérieur non seulement en grandeur mais aussi en direction. Les cas limites de l'ellipsoïde sont des cylindres infiniment longs et courts. Si l'axe du cylindre est parallèle au champ magnétique extérieur, le calcul s'en trouve très simplifié. A l'intérieur d'un cylindre de très grande longueur, le vecteur H est égal au vecteur H_0 du champ magnétique extérieur. Par suite

$$I = \varkappa H = \frac{\mu-1}{4\pi} H_0 = \frac{\mu-1}{4\pi} B_0$$

puisque dans l'espace extérieur $H_0 = B_0$. Dans le cas d'un cylindre très court

$$I = \varkappa H = \frac{\varkappa}{\mu} B = \frac{\mu-1}{4\pi\mu} B_0.$$

Pour un champ extérieur B_0 donné, l'aimantation des substances magnétiques de grande perméabilité μ est dans le premier cas beaucoup plus grande que dans le second. Pour des cylindres de longueurs intermédiaires l'aimantation I n'est pas homogène, mais sa valeur sera intermédiaire entre les deux valeurs limites trouvées. Il est facile de montrer (cf. § 16) que l'aimantation d'une sphère est homogène et qu'elle est donnée par la formule

$$I = \frac{3}{4\pi} \frac{\mu-1}{\mu+2} B_0.$$

La variation de l'aimantation en fonction de la forme du corps peut être illustrée par une expérience de démonstration très spectaculaire. On prend un faisceau de tiges de fer minces attachées ensemble par des fils à coudre et on le place en position verticale sur une table. La partie supérieure du faisceau pénètre à une faible profondeur dans une bobine verticale disposée au-dessus du faisceau. On fait passer dans la bobine un courant continu d'une intensité telle que la force tendant à attirer le faisceau dans la bobine soit légèrement inférieure au poids des tiges de fer. Le faisceau se comporte comme une grosse tige et s'aimante faiblement. Si on fait brûler les fils d'attache, on voit les tiges se précipiter à l'intérieur de la bobine et s'y maintenir. Cela tient à ce que les tiges n'étant plus fixées les unes aux autres, chacune d'elles se comporte indépendamment des autres et s'aimante beaucoup plus fortement.

Afin de décrire les effets dont il a été question ci-dessus on introduit généralement les notions de *champ* et de *facteur démagnétisants*. Soit H_0 le champ magnétique extérieur uniforme où on place un

corps magnétique de forme ellipsoïdale. Comme nous l'avons signalé plus haut, le champ $\boldsymbol{H}$ à l'intérieur de ce corps de forme ellipsoïdale sera uniforme. On peut le présenter sous la forme $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_\circ$. Le champ $\boldsymbol{H}_\circ$ est le *champ démagnétisant* car dans les substances ferro- et paramagnétiques, il est orienté à l'encontre du champ extérieur $\boldsymbol{H}_0$ et l'affaiblit. On peut exprimer le champ démagnétisant par une relation telle que $\boldsymbol{H}_\circ = -N\boldsymbol{I}$, le facteur N n'étant fonction que de la forme du corps; N est le *facteur démagnétisant*. Nous estimons quant à nous que les notions de champ et de facteur démagnétisants sont inutiles et leur emploi ne fait qu'embrouiller l'interprétation des faits expérimentaux. Le problème réel consiste à élucider l'influence qu'exerce la forme du corps sur le vecteur aimantation $\boldsymbol{I}$ lorsque ce corps est placé dans un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}_0$.

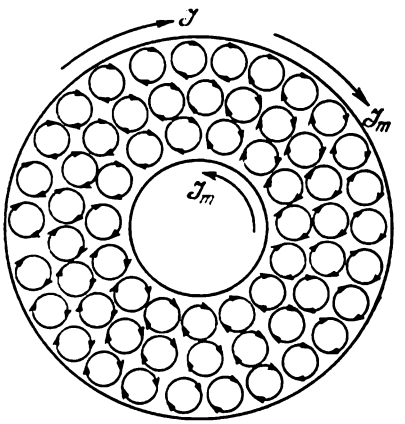


Fig. 166

4. Nous avons défini le vecteur $\boldsymbol{B}$ dans une substance ferromagnétique comme l'intensité du champ magnétique résultant créé par les courants de conduction et d'aimantation. Dans certains cas on peut interpréter de la même façon le vecteur $\boldsymbol{H}$. Considérons, par exemple, un solénoïde de longueur infinie sur la surface duquel circule un courant de conduction de densité linéique constante. L'intérieur de ce solénoïde est rempli de substance magnétique homogène dans laquelle on a pratiqué le long de l'axe du solénoïde un canal cylindrique infiniment étroit. La figure 166 représente la section droite du solénoïde. Nous avons montré au paragraphe précédent que le vecteur $\boldsymbol{H}$ dans la substance magnétique est confondu avec le vecteur $\boldsymbol{H}$ dans le canal. Les courants d'aimantation se réduisent aux courants superficiels circulant sur la surface extérieure du cylindre et sur la surface intérieure du canal. Comme ces courants circulent en sens opposés, les champs magnétiques qu'ils excitent sont orientés en sens inverse et se compensent mutuellement. Le champ total dans le canal n'est dû qu'aux courants de conduction. On peut donc interpréter le vecteur $\boldsymbol{H}$ comme l'intensité du champ magnétique dû seulement aux courants de conduction.

Une telle interprétation est justifiée toutes les fois que l'aimantation est partout homogène. En effet si on forme la divergence des deux membres de l'équation (59.5) on trouve

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = -4\pi \operatorname{div} \boldsymbol{I}. \tag{61.5}$$

Si I = const on arrive au système d'équations suivant:

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j, \quad \operatorname{div} H = 0$$

qui est identique aux équations correspondantes pour le vide. Les solutions de ces deux systèmes seront elles aussi identiques pour le vide et pour les substances magnétiques, à condition que les courants de conduction j y soient les mêmes. On en conclut que si dans tout l'espace div $I = 0$, le vecteur H dans les magnétiques peut être considéré comme l'intensité du champ magnétique excité par les seuls courants de conduction. Mais si div I n'est pas nul partout, cette interprétation n'est plus valable. Dans ce dernier cas la signification physique du vecteur H n'est plus aussi simple et on doit définir ce dernier de façon formelle à l'aide de la relation (59.5). Par exemple, si le milieu n'est pas homogène, on aura

$$\operatorname{div} B = \operatorname{div} (\mu H) = \mu \operatorname{div} H + H \operatorname{grad} \mu = 0,$$

soit div $H = -H$ grad μ/μ, i.e. div $H \neq 0$. Dans le cas considéré le champ H n'est donc pas produit par les seuls courants de conduction.

5. Tout courant passant à travers un fil immergé dans un milieu aimanté (une substance magnétique) est soumis à l'action des courants de conduction et d'aimantation. Dans la substance magnétique la loi d'Ampère doit donc s'écrire comme avant:

$$F = \frac{\mathcal{J}}{c} [ds \cdot B], \tag{61.6}$$

où on entend par B le champ magnétique créé par tous les courants (de conduction et d'aimantation) à l'exclusion de l'élément de courant $\mathcal{J}\, ds$.

Dans un milieu homogène parcouru par les mêmes courants de conduction le vecteur B est proportionnel à la perméabilité magnétique μ. En effet dans ce cas on peut écrire les équations (58.2) et (59.7) sous la forme

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} B = \frac{4\pi\mu}{c} j.$$

Si les courants j sont donnés, rot B et donc le vecteur B sont proportionnels à μ. Il s'ensuit que si on remplit l'espace compris entre les conducteurs d'une substance magnétique homogène, la force d'interaction des courants augmente de μ fois.

Illustrons ce résultat important en prenant pour exemple l'interaction de deux fils rectilignes parallèles parcourus par les courants $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ (fig. 167). Au début les fils se trouvent dans le vide, puis on remplit tout l'espace d'une substance magnétique homogène. Autour du fil *1* circulent alors des courants moléculaires qui renfor-

cent le courant $\mathcal{J}_1$. De ce fait le champ magnétique B_1 du premier fil conducteur augmente de μ fois. La force que le champ B_1 exerce sur le courant $\mathcal{J}_2$ passant dans le fil *2* augmente d'autant de fois. Autour de ce dernier circulent aussi des courants d'aimantation, mais ils ne donnent aucune contribution à la force qui s'exerce sur le courant $\mathcal{J}_2$. Cela tient à ce qu'ils circulent à la surface du second fil parallèlement à son axe et que le champ magnétique de tels courants est nul dans tout l'espace occupé par le second fil.

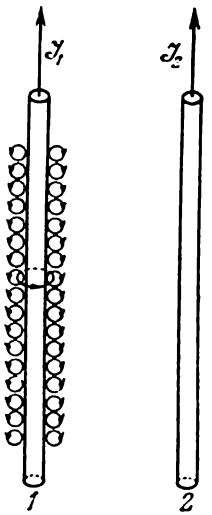


Fig. 167

§ 62. Travail de déplacement dans un champ magnétique permanent d'une spire parcourue par un courant

1. Commençons par l'étude d'un cas particulier. Soient deux fils parallèles AB et CD placés dans un champ magnétique uniforme permanent orthogonal au plan de la figure 168 et pointant vers le lecteur. A gauche se trouve une source de courant non indiquée sur la figure. Sur les fils se déplace librement un pont conducteur KL court-circuitant le courant $\mathcal{J}$ qui circule à la gauche du pont. En notant l la longueur du pont, la force qu'exerce le champ magnétique sur le pont est $F = \frac{\mathcal{J}}{c} lB$. Lorsque le pont se déplace de dx, cette force produit un travail

$$\delta A = \frac{\mathcal{J}}{c} lB\,dx = \frac{\mathcal{J}}{c} d(BS),$$

où S désigne l'aire du rectangle $AKLC$. Le produit BS est le flux magnétique traversant le rectangle $AKLC$. En le notant Φ on obtient pour le travail élémentaire

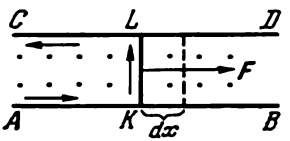


Fig. 168

$$\delta A = \frac{\mathcal{J}}{c} d\Phi \qquad (62.1)$$

et pour le travail fini

$$A_{12} = \frac{\mathcal{J}}{c}(\Phi_2 - \Phi_1). \qquad (62.2)$$

Ainsi le travail que fournit le champ magnétique pour déplacer un courant est égal au produit de l'accroissement du flux magnétique par $\mathcal{J}/c$. Ce résultat suppose que le courant $\mathcal{J}$ ne varie pas lors du déplacement du pont KL.

2. Ce résultat reste valable pour une orientation quelconque du champ magnétique. Pour le démontrer il suffit de décomposer le

vecteur $\boldsymbol{B}$ en trois composantes: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_n + \boldsymbol{B}_l + \boldsymbol{B}_x$. La composante $\boldsymbol{B}_l$ le long du pont est parallèle au courant qui y passe et n'exerce donc aucune force sur le pont. La composante $\boldsymbol{B}_x$ parallèle au déplacement du pont fait apparaître une force normale au déplacement et ne fournit donc aucun travail. Seule la composante $\boldsymbol{B}_n$ normale au plan de la figure dans lequel se déplace le pont KL produit du travail. Ce travail est donné par les formules (62.1) et (62.2).

3. Il nous reste à démontrer que les formules (62.1) et (62.2) s'appliquent à n'importe quelle spire parcourue par un courant et se déplaçant de façon arbitraire dans un champ magnétique non uniforme permanent. La spire peut non seulement se déplacer d'un bloc, mais encore se déformer de façon quelconque. Pour le démontrer on découpe en pensée la spire en éléments de courant infiniment petits et on étudie leurs déplacements infinitésimaux. Lorsqu'un élément de courant effectue un déplacement infiniment petit, on peut admettre que le champ magnétique est uniforme sur la distance parcourue. On peut donc appliquer à ce déplacement la formule du travail élémentaire (62.1). En faisant la somme de tous les travaux élémentaires produits par tous les éléments de courant, on retrouve la formule (62.1), où $d\Phi$ désigne l'accroissement du flux magnétique traversant la spire. En intégrant on obtient la formule (62.2). Soulignons expressément que lors du déplacement de la spire, l'intensité du courant qui y circule *doit être maintenue constante* par un accroissement convenable de la force électromotrice de la source.

§ 63. Procédé de Gauss pour la mesure des champs magnétiques

Les aimants permanents sont des substances magnétiques dont le vecteur aimantation $\boldsymbol{I}$ ne varie pratiquement pas lorsqu'on soumet l'aimant à l'action d'un champ magnétique extérieur (à condition qu'il ne soit pas trop fort). C'est sur ce fait que se fonde le *procédé de Gauss* de mesure de l'intensité des champs magnétiques. Considérons un aimant en forme de tige rectiligne aimantée parallèlement à son axe. Notons $\mathfrak{M}$ son moment magnétique. Lorsqu'on place l'aimant dans un champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}$, il est soumis à un moment de rotation $[\mathfrak{M}\boldsymbol{B}]$. Si l'aimant peut tourner librement autour de son centre de masse, sous l'action de ce moment de rotation le vecteur $\mathfrak{M}$ cherchera à se placer parallèlement à $\boldsymbol{B}$. Si nous écartons l'aimant de sa position d'équilibre, il se mettra à effectuer de petites oscillations de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{\mathfrak{M}B}}, \tag{63.1}$$

où Θ est le moment d'inertie de l'aimant.

Fixons maintenant l'aimant dans une position orthogonale par rapport au champ magnétique $\boldsymbol{B}$ et disposons une petite aiguille aimantée à grande distance dans le prolongement de l'axe de l'aimant. En assimilant l'aimant à un dipôle ponctuel, on peut écrire pour le champ magnétique $\boldsymbol{B}_1$ de l'aimant à l'emplacement de l'aiguille aimantée $B_1 = 2\mathfrak{M}/r^3$, r étant la distance entre les centres de l'aimant et de l'aiguille aimantée. Ce champ est dirigé suivant l'axe de l'aimant, donc perpendiculairement au champ $\boldsymbol{B}$ à mesurer. Sous l'action des champs $\boldsymbol{B}_1$ et $\boldsymbol{B}$ l'aiguille occupe une position faisant un angle α avec le champ $\boldsymbol{B}$; cet angle est défini par

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B_1}{B} = \frac{2\mathfrak{M}}{Br^3}. \tag{63.2}$$

En mesurant la durée T des périodes et l'angle α on peut calculer par les formules (63.1) et (63.2) l'intensité du champ $\boldsymbol{B}$ et le moment magnétique $\mathfrak{M}$ de l'aimant.

Mais on peut procéder aussi d'une autre manière. On fixe encore l'aimant dans une position perpendiculaire au champ B_1 mais on dispose l'aiguille aimantée sur une ligne normale à l'axe de l'aimant et passant par son centre. Le champ $\boldsymbol{B}_2$ que crée l'aimant à l'emplacement de l'aiguille aimantée est donné par la formule $B_2 = \mathfrak{M}/r^3$; il est orienté en sens inverse du vecteur $\mathfrak{M}$, donc perpendiculairement au vecteur $\boldsymbol{B}$. L'angle α entre la direction de $\boldsymbol{B}$ et l'axe de l'aiguille aimantée dans sa position d'équilibre est défini par

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B_2}{B} = \frac{\mathfrak{M}}{Br^3} \tag{63.3}$$

que l'on peut utiliser à la place de (63.2).

Depuis que Gauss élabora ce procédé, il a été largement utilisé pour la mesure du champ magnétique terrestre. L'aimant et l'aiguille disposés dans un même plan horizontal ont toute latitude de tourner autour d'axes verticaux. Dans ce cas le procédé de Gauss sert à déterminer seulement la *composante horizontale* du champ magnétique terrestre et non le champ total $\boldsymbol{B}$.

§ 64. L'induction électromagnétique

1. La découverte de l'induction électromagnétique, faite par Faraday en 1831, fut l'une des découvertes fondamentales en électrodynamique. Pour faire la démonstration de cet effet, prenons un aimant permanent occupant une position fixe et une bobine de fil dont les extrémités sont reliées à un galvanomètre. Lorsqu'on approche la bobine de l'un des pôles de l'aimant, le galvanomètre accuse une déviation tant que dure ce mouvement, ce qui témoigne du passage d'un courant électrique dans la bobine. Lorsqu'on déplace la bobine en sens inverse, le sens du courant circulant dans la bobine

s'inverse. Le sens du courant passant par la bobine s'inverse aussi si on aura fait tourner l'aimant de 180° pour un sens de déplacement donné de la bobine. On peut remplacer l'aimant par une bobine parcourue par un courant ou par un électroaimant. D'une manière générale chaque fois qu'une bobine est en mouvement dans un champ magnétique permanent, un courant électrique y apparaît (exception faite de certains cas particuliers, dont il sera question plus loin). Ce courant disparaît dès qu'on arrête le mouvement de la bobine. Ce courant porte le nom de *courant induit* et le phénomène celui d'*induction électromagnétique*. Dans le cas particulier d'une rotation uniforme de la bobine dans un champ magnétique permanent, le courant induit change périodiquement d'intensité et de sens.

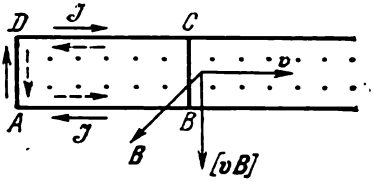


Fig. 169

2. L'apparition d'un courant électrique lors du mouvement d'un conducteur dans un champ magnétique s'explique par l'action de la force de Lorentz, qui se manifeste à chaque mouvement du conducteur. Considérons le cas simple de deux fils parallèles AB et CD placés dans un champ magnétique uniforme permanent perpendiculaire au plan de la figure et orienté vers le lecteur (fig. 169). Les extrémités de gauche des fils AB et CD sont court-circuitées et celles de droite sont en circuit ouvert. Un pont conducteur BC glisse librement le long du fil. Lorsque le pont se déplace vers la droite avec une vitesse v, il entraîne avec lui des électrons et des ions positifs. Toute charge e en mouvement dans un champ magnétique est soumise à la force de Lorentz $\boldsymbol{F} = \frac{e}{c}\,[\boldsymbol{vB}]$. S'il s'agit d'un ion positif, cette force s'exerce suivant la verticale descendante et s'il s'agit d'un électron négatif, elle s'exerce suivant la verticale ascendante. Sous l'action de cette force les électrons commencent à se déplacer dans le pont vers le haut, ce qui correspond au passage d'un courant dirigé vers le bas. C'est le courant induit. Ayant été redistribuées, les charges créent un champ électrique qui excite des courants dans les autres parties du contour $ABCD$. Sur la figure 169 ces courants sont représentés par des droites fléchées en trait plein.

Dans l'expérience qui vient d'être décrite, la force de Lorentz $\boldsymbol{F}$ peut jouer le rôle de force non électrique excitant un courant électrique. L'intensité de ce champ d'origine non électrique est $\boldsymbol{E}^{\text{étr}} = \frac{\boldsymbol{F}}{e} = \frac{1}{c}\,[\boldsymbol{vB}]$. La f.é.m. produite par ce champ est appelée *force électromotrice d'induction* que l'on note $\mathscr{E}^{\text{ind}}$. Dans le cas considéré $\mathscr{E}^{\text{ind}} = -\frac{v}{c}Bl$, où l est la longueur du pont. Le signe moins

est dû à ce que le champ $\frac{1}{c}[\boldsymbol{vB}]$ est orienté en sens contraire au sens positif de parcours du contour, que l'on définit en appliquant la règle du tire-bouchon au vecteur $\boldsymbol{B}$. Sur la figure 169 ce sens est montré par des flèches en pointillé. La quantité lv est l'accroissement de l'aire du contour $ABCD$ par unité de temps, donc le taux d'accroissement de cette aire. Il s'ensuit que la quantité vBl est égale à $d\Phi/dt$ qui est le taux d'accroissement du flux magnétique traversant l'aire du contour $ABCD$. Ainsi

$$\mathscr{E}^{\text{ind}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{64.1}$$

résultat qui reste valable dans le cas où le champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}$ fait un angle quelconque avec le plan du contour $ABCD$. Il suffit en effet de décomposer le vecteur $\boldsymbol{B}$ en ses composantes tangentielle $\boldsymbol{B}_t$ et normale $\boldsymbol{B}_n$ au plan du contour: $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_t + \boldsymbol{B}_n$. La composante $\boldsymbol{B}_t$ donne comme contribution au champ d'origine non électrique le terme $\frac{1}{c}[\boldsymbol{vB}_t]$ qui est orthogonal au pont. Ce terme ne provoque qu'une redistribution des charges électriques dans le sens latéral du pont, mais ne fait apparaître aucun courant. Le courant n'est dû qu'à la composante normale $\boldsymbol{B}_n$ et par conséquent $\mathscr{E}^{\text{ind}}$ est toujours défini par la formule (64.1).

Il est maintenant facile de généraliser la formule (64.1) à n'importe quel circuit fermé animé d'un mouvement quelconque dans un champ magnétique non uniforme permanent. Il suffit de découper, en pensée, le circuit en segments infiniment petits et d'étudier leurs mouvements. Lorsque chacun de ces segments n'effectue dans le champ magnétique qu'un déplacement infiniment petit, on peut considérer ce champ comme uniforme. Par suite la f.é.m. qui apparaît aux extrémités du segment considéré se laisse exprimer par la formule (64.1). En sommant les expressions de la f.é.m. pour tous les segments, on obtient un résultat de même forme, à la différence près que $\mathscr{E}^{\text{ind}}$ y représente la f.é.m. totale induite dans le circuit fermé constitué par le conducteur et $d\Phi/dt$ est le taux de variation du flux magnétique à travers toute surface délimitée par le contour.

La formule (64.1) exprime la *loi fondamentale de l'induction électromagnétique* et montre qu'à chaque mouvement d'un conducteur formant un contour fermé dans un champ magnétique il y apparaît une force électromotrice proportionnelle au taux de variation du flux magnétique embrassé par le contour de courant.

3. La formule (64.1) peut être établie également à l'aide de la loi de la conservation de l'énergie, comme le fit Helmholtz (1821-1894). Considérons un conducteur en forme de boucle comportant un élément galvanique de f.é.m. $\mathscr{E}$, qui se déplace dans un champ magnétique permanent non uniforme (dans le cas général). Dans le temps dt les forces d'Ampère appliquées à la boucle fournissent

un travail $\frac{\mathcal{J}}{c}\,d\Phi$. En outre la chaleur $R\mathcal{J}^2\,dt$ s'y dissipe par effet Joule. La somme de ces quantités doit être égale au travail fourni par l'élément galvanique $\mathcal{E}\,\mathcal{J}\,dt$, i.e.

$$\frac{1}{c}\mathcal{J}\,d\Phi+\mathcal{J}^2R\,dt=\mathcal{E}\mathcal{J}\,dt. \tag{64.2}$$

On en tire

$$\mathcal{J}=\frac{\mathcal{E}-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}}{R}. \tag{64.3}$$

Ainsi le courant qui circule dans une boucle en mouvement ne dépend pas uniquement de la f.é.m. de l'élément galvanique, mais comporte encore le terme $-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$. Ce terme est justement la f.é.m. d'induction.

Notons que l'équation (64.2) qui exprime la conservation de l'énergie peut être également vérifiée en posant $\mathcal{J}=0$. La loi de la conservation de l'énergie ne permet pas de décider laquelle des deux solutions doit être adoptée: $\mathcal{J}=0$ ou la solution (64.3). Cette seule loi ne permet pas de prédire l'existence de l'induction électromagnétique et il faut invoquer des considérations supplémentaires permettant d'éliminer la solution $\mathcal{J}=0$. Pour y arriver, Helmholtz branchait dans le circuit un élément galvanique de f.é.m. $\mathcal{E}$. Le fait que la f.é.m. supplémentaire $-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$, qui apparaît chaque fois que le conducteur est mis en mouvement, ne dépend pas de $\mathcal{E}$ permet de conclure que la même f.é.m. doit apparaître dans la boucle en mouvement en l'absence de tout élément galvanique. On peut même se passer de tout élément galvanique si on admet qu'un courant d'induction doit apparaître à chaque mouvement de la boucle. Dans ce dernier cas la loi de la conservation de l'énergie permet de déterminer l'intensité de ce courant et de là la valeur de la f.é.m. d'induction. C'est en cela que réside l'intérêt des considérations de Helmholtz.

4. Des courants induits peuvent apparaître aussi dans des conducteurs fixes. Prenons par exemple un conducteur en forme de boucle et un aimant permanent et voyons ce qui se produit si on met l'aimant en mouvement tout en laissant la boucle immobile. Les états de repos et de mouvement sont des concepts relatifs. L'effet d'induction ne doit dépendre que du *mouvement relatif du conducteur et de l'aimant*. On en conclut que le déplacement de l'aimant doit s'accompagner de l'apparition dans la boucle du même courant d'induction que celui qui apparaîtrait lors d'un mouvement convenable de la boucle. L'expérience confirme pleinement cette conclusion. Prenons la bobine que nous avons déjà utilisée, relions-la à un galvanomètre et approchons l'aimant de la bobine. Nous constatons

que l'aiguille du galvanomètre dévie, ce qui indique que la bobine est parcourue par un courant électrique. Lorsqu'on éloigne l'aimant de la bobine, l'aiguille du galvanomètre dévie en sens inverse, ce qui indique que le courant d'induction a changé de sens. Le résultat sera le même si on fait tourner l'aimant de 180° de manière à ce que la bobine se trouve en face de l'autre pôle, le mouvement de l'aimant étant le même qu'avant. Si on met l'aimant en rotation, le courant induit dans la bobine changera périodiquement de sens. Lorsque le mouvement de l'aimant cesse, le courant induit disparaît. On peut remplacer l'aimant par un électroaimant ou par une autre bobine parcourue par un courant qui crée un champ magnétique; leurs mouvements excitent dans la bobine fixe un courant électrique.

Dans ces expériences où l'aimant était mis en mouvement, c'est le flux magnétique traversant la bobine qui variait. Or on peut réaliser la même variation de flux magnétique sans mettre l'aimant en mouvement, en plaçant la bobine dans un champ magnétique variable. Comme ce champ variable peut être choisi à l'emplacement de la bobine exactement égal au champ magnétique produit par un aimant mobile, cette substitution ne peut modifier les conditions physiques dans lesquelles se trouve placée la bobine. On peut donc s'attendre à ce que le courant induit qui y apparaît soit le même, et l'expérience confirme cette supposition. Prenons deux bobines fixes emboîtées l'une dans l'autre. Si on fait passer dans l'une un courant alternatif, la deuxième bobine sera parcourue par un courant électrique induit. Il résulte de ces différentes expériences que l'apparition d'un courant induit est déterminée par la *variation du flux magnétique* traversant le conducteur et non par le procédé utilisé pour réaliser cette variation de flux.

Décrivons encore une autre expérience de démonstration pour illustrer cette assertion. On enfile sur un des bras d'un aimant en fer à cheval une bobine reliée à un galvanomètre (fig. 170). Si on relie les pôles de l'aimant par une barre de fer, on fait varier le flux magnétique qui traverse la bobine, et celle-ci sera parcourue par un courant induit qui fera dévier l'aiguille du galvanomètre. Lorsqu'on enlève la barre de fer, le flux magnétique varie en sens inverse, ce qui induit un courant et provoque une déviation de l'aiguille du galvanomètre en sens inverse.

Ainsi *chaque fois que varie le flux magnétique traversant un contour conducteur fermé, fixe ou mobile, ce contour sera parcouru par un courant induit et la f.é.m. d'induction sera toujours définie par la formule* (64.1).

§ 65. La règle de Lenz

1. La formule (64.1) permet de déterminer la grandeur et le *sens* du courant induit. En effet, plaçons dans un champ magnétique une boucle conductrice dont le sens de circulation positif forme avec

la direction du champ un système de référence direct (sur la figure 171 le champ magnétique est dirigé vers le lecteur). Supposons que le flux magnétique Φ est croissant. D'après la formule (64.1) $\mathscr{E}^{\text{ind}}$ sera négatif, de sorte que le courant induit parcourra la boucle dans le sens de circulation négatif. Ce courant affaiblit donc le champ magnétique extérieur et s'oppose ainsi à l'accroissement du flux

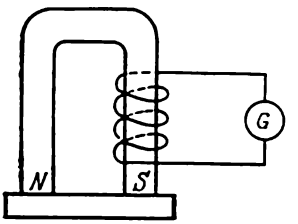


Fig. 170

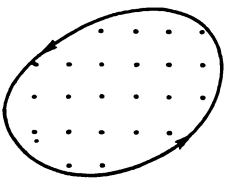


Fig. 171

magnétique. Si nous supposons maintenant que le flux magnétique Φ est décroissant, $\mathscr{E}^{\text{ind}}$ sera positif et le courant induit qui circule dans la spire dans le sens positif s'opposera à la décroissance du champ et du flux magnétique. Il s'ensuit que *le courant induit est*

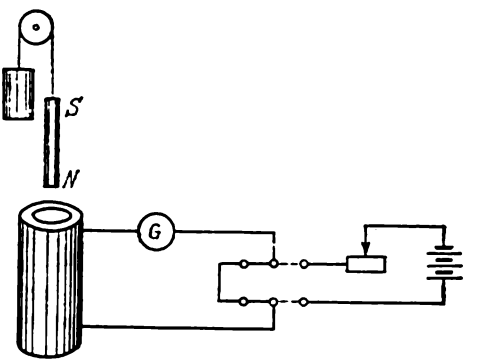


Fig. 172

toujours dirigé dans un sens tel qu'il s'oppose à la cause qui l'engendre. C'est la règle dite de Lenz (1804-1865). Le Chatelier (1850-1936), puis Braun (1850-1918) généralisèrent la règle de Lenz et l'étendirent à tous les phénomènes physiques (cf. t. II, § 51).

2. Suspendons un aimant rectiligne NS au-dessus d'une bobine et équilibrons-le à l'aide d'un poids suspendu à un fil passant par une poulie fixe (fig. 172). Branchons un galvanomètre dans le circuit de la bobine. Si on introduit rapidement l'aimant dans la bobine.

il apparaît un courant induit qui fait dévier l'aiguille du galvanomètre. Après avoir noté le sens de déviation du galvanomètre, branchons une batterie dans le circuit de la bobine et du galvanomètre. (Afin de ne pas détériorer le galvanomètre on le shuntera préalablement, car la batterie produira un courant beaucoup plus fort que le courant d'induction.) Si la mise en circuit de la batterie est suffisamment rapide pour que le courant qu'elle crée fasse dévier le galvanomètre dans le même sens que celui du courant induit (ce qui signifie que ces deux courants circulent dans le même sens), on constatera que le courant de la batterie repousse l'aimant hors de la bobine, conformément à la loi de Lenz. Mais si le courant de la batterie est de sens contraire au sens du courant induit, l'aimant est attiré par la bobine, comme le laisse prévoir la règle de Lenz. Des effets analogues se produisent lorsqu'on retire l'aimant de la bobine.

Prenons une bobine mince dont le noyau est composé de plusieurs tiges de fer disposées en position horizontale. Au centre de la bobine est placée horizontalement une tige de fer bien polie dont la longueur ($\sim$1 m) est près de trois fois plus grande que celle de la bobine. Enfilons sur cette tige de fer un anneau en aluminium ayant un diamètre légèrement supérieur au diamètre de la tige et pouvant donc se déplacer aisément le long de la tige. Si on fait passer un courant dans la bobine, on induira dans l'anneau un courant de sens opposé et l'anneau sera repoussé de la bobine. Si le courant d'alimentation est suffisamment fort, l'anneau sera brutalement rejeté jusqu'à l'extrémité de la tige. Lorsqu'on débranche la bobine, le courant induit est dirigé en sens inverse et l'anneau se déplacera en sens inverse et reviendra presque à son point de départ. On peut remplacer l'anneau par une petite bobine à suspension bifilaire.

L'expérience est beaucoup plus spectaculaire si on utilise le courant alternatif du réseau pour alimenter la bobine, comme le fit Elihu Thomson (1853-1937). La bobine munie de son noyau est alors placée verticalement et on enfile sur la tige en fer centrale un gros anneau en aluminium. (On utilise l'aluminium parce que c'est un métal léger de grande conductivité électrique.) On alimente la bobine par le courant alternatif du réseau urbain ; ce courant induit dans l'anneau un courant de sens opposé. Les deux courants se repoussent mutuellement mais la force de répulsion n'est pas constante et varie périodiquement avec une fréquence double de celle du réseau. Considérons en effet l'instant où les deux courants sont maximaux et circulent en sens opposés. La force de répulsion est alors maximale. Au bout d'une demi-période, le courant urbain et le courant induit s'inversent et la force de répulsion reprend la même valeur maximale. Si on branche brusquement la bobine sur le réseau urbain, la force de répulsion fera bondir l'anneau jusqu'au plafond de la salle d'étude. Si on immobilise l'anneau à l'aide d'une

pince, il s'échauffera fortement car sa résistance étant négligeable l'intensité du courant induit y sera très forte. On peut réaliser l'expérience de l'échauffement en remplaçant l'anneau en aluminium par un mince anneau de cuivre. La densité du cuivre et la résistance de l'anneau étant grandes, celui-ci ne sera pas rejeté mais seulement échauffé.

3. Lorsqu'on déplace un conducteur massif dans un champ magnétique, ou qu'on le place dans un champ magnétique variable, ce conducteur est le siège de courants induits dits *courants Foucault.*

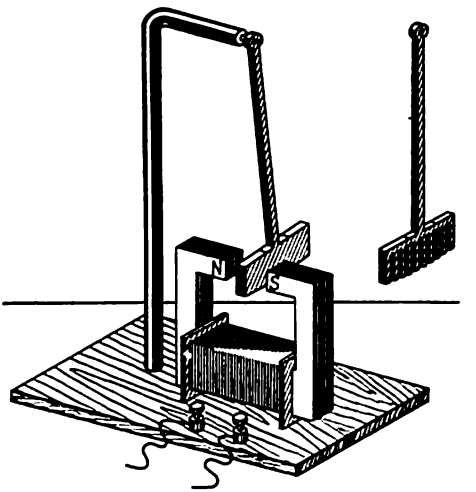


Fig. 173

Physiquement ils ne diffèrent en rien des courants induits dans des fils conducteurs. L'utilisation des courants de Foucault permet de réaliser une belle expérience de démonstration de la loi de Lenz. On prend un pendule découpé dans une grosse feuille de cuivre et ayant la forme d'un secteur tronqué (fig. 173). Ce pendule est suspendu à une tige et peut osciller librement autour d'un axe horizontal entre les pôles d'un électroaimant puissant qui crée un champ magnétique de $\sim$5000 G. Tant que l'électroaimant n'est pas alimenté, le pendule oscille avec un amortissement très faible, mais dès qu'on branche l'électroaimant et qu'apparaît un champ magnétique dans l'entrefer, apparaissent les courants de Foucault qui, conformément à la loi de Lenz, freinent le mouvement du pendule et celui-ci s'arrête presque aussitôt. Si on remplace le secteur massif du pendule par un secteur en dents de loup (cf. fig. 173), l'induction des courants de Foucault s'en trouve amoindrie et le pendule continue d'osciller dans le champ magnétique avec un faible amortissement. Cette expérience permet de justifier l'utilisation de noyaux feuille-

tés dans les électroaimants et les transformateurs. Dans les noyaux feuilletés les courants de Foucault sont faibles, de sorte que la chaleur dégagée par effet Joule y est faible.

Prenons un disque en aluminium ou en cuivre de 4 à 5 cm de diamètre et de 4 à 6 mm d'épaisseur et laissons-le tomber dans l'entrefer d'un électroaimant. Tant qu'il n'y a pas de champ magnétique, le disque tombe en chute libre. Branchons maintenant le champ magnétique de $\sim$5000 G et recommençons l'expérience. La chute du disque est maintenant très lente et rappelle la chute d'un corps dans un milieu de grande viscosité.

Disposons au-dessus d'une aiguille aimantée un disque de cuivre en position horizontale et mettons-le en rotation autour de l'axe vertical; l'aiguille aimantée se met à tourner dans le même sens que le disque. La raison en est que lors du mouvement relatif de l'aiguille aimantée et du disque, ce dernier est le siège de courants de Foucault, qui en vertu de la loi de Lenz tendent à ralentir ce mouvement relatif. C'est ce qui détermine la mise en rotation de l'aiguille aimantée.

§ 66. Conception maxwellienne de l'induction électromagnétique

1. Lorsqu'un conducteur se déplace dans un champ magnétique permanent, le courant induit est déterminé par la composante magnétique de la force de Lorentz $\frac{e}{c}[\boldsymbol{vB}]$. Quelle est la force qui excite un courant induit dans un conducteur immobile placé dans un champ magnétique variable? La réponse à cette question fut donnée par Maxwell. D'après Maxwell, *tout champ magnétique variable excite un champ électrique dans l'espace environnant.* C'est ce champ électrique qui est la cause des courants induits apparaissant dans les conducteurs. Maxwell donna une formulation approfondie de la loi de l'induction électromagnétique qui s'énonce comme suit:

Toute variation du champ magnétique dans le temps fait apparaître un champ électrique dans le milieu environnant. La circulation du vecteur $\boldsymbol{E}$ *de ce champ électrique le long de tout contour fermé immobile* s *est donnée par l'expression*

$$\oint_s (\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \tag{66.1}$$

où Φ est le *flux magnétique embrassé par le contour* s. Nous avons utilisé la notation de dérivée partielle pour représenter le taux de variation du flux magnétique afin de souligner que le contour s doit être immobile.

Il existe une différence essentielle entre les interprétations de Maxwell et de Faraday du phénomène de l'induction magnétique. D'après Faraday, l'induction électromagnétique consiste en l'*excitation d'un courant électrique*. On ne peut l'observer qu'à l'aide de *conducteurs fermés*. Maxwell, lui, estime que l'essence du phénomène consiste en l'*excitation d'un champ électrique*. L'induction électromagnétique doit alors se laisser déceler même s'il n'y a aucun conducteur dans l'espace considéré. L'apparition d'un courant induit dans un conducteur fermé que l'on place dans un champ magnétique variable n'est qu'*une des manifestations* de l'existence du champ électrique $\boldsymbol{E}$ créé à la suite d'une variation du champ magnétique. Le champ $\boldsymbol{E}$ peut se manifester de différentes autres manières, par exemple en provoquant la polarisation d'un diélectrique ou le claquage d'un condensateur, en accélérant ou en freinant le mouvement des particules chargées, etc. Ce champ peut faire apparaître un courant électrique dans un conducteur non fermé comme le montre l'expérience suivante.

On dispose côte à côte deux bobines dont les axes sont dans le prolongement l'un de l'autre. On connecte la première bobine à un générateur de son qui est un appareil produisant des courants alternatifs de fréquences comprises dans la gamme acoustique. On connecte la deuxième bobine aux plaques horizontales d'un oscillographe électronique. Lorsqu'on fait passer dans la première bobine un courant alternatif, on voit que le spot de l'oscillographe se déplace, quoique le circuit de la deuxième bobine soit ouvert. Sur l'écran on voit le spot lumineux effectuer des mouvements de va-et-vient et décrire une ligne verticale; lorsqu'on branche dans le circuit les plaques de balayage horizontal du spot, cette ligne verticale devient une sinusoïde. Cela montre qu'un champ électrique alternatif s'est établi entre les plaques horizontales de l'oscillographe. Les plaques déviatrices portent donc des charges électriques qui varient périodiquement dans le temps, tandis que la seconde bobine est parcourue par des courants induits alternatifs, quoique son circuit soit ouvert.

L'énoncé de la loi d'induction formulé par Maxwell présente un caractère plus général que celui de Faraday et constitue une des plus importantes généralisations de l'électrodynamique. L'énoncé de Maxwell s'exprime sous forme mathématique par la formule (66.1), où s désigne un contour mathématique fermé que l'on peut définir même dans un diélectrique et pas seulement dans un conducteur, comme l'implique l'énoncé de Faraday. Le flux magnétique Φ est défini par l'intégrale

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S} \tag{66.2}$$

étendue à une surface arbitraire S délimitée par le contour s. Il s'ensuit que la formule (66.1) peut s'écrire comme suit:

$$\oint_s (\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\, d\boldsymbol{S}. \qquad (66.3)$$

Cette équation est mathématiquement semblable à l'équation (55.5), où le vecteur $4\pi \boldsymbol{j}$ est remplacé par le vecteur $-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$. On peut donc mettre cette équation sous une forme différentielle en procédant exactement comme dans le cas de l'équation (55.5). On obtient ainsi le résultat suivant:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \qquad (66.4)$$

C'est la *forme différentielle de la loi de l'induction électromagnétique.* Les équations (66.3) et (66.4), qui sont équivalentes, traduisent l'une des plus importantes relations de la théorie du champ électromagnétique et font partie du système d'équations de Maxwell.

2. En électrostatique ce sont les charges électriques fixes qui constituent les sources du champ électrique. Pour un tel champ l'intégrale $\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s}$ prise le long de n'importe quel contour fermé est nulle. C'est pour cela que le seul champ électrostatique ne peut assurer l'écoulement permanent de charges électriques le long de conducteurs fermés. Le champ électrique excité par un champ magnétique variable dans le temps est non pas un champ à potentiel, mais un champ *rotationnel.* Le rotor de ce champ, ainsi que sa circulation sont en général différents de zéro. De ce fait tout champ rotationnel peut seul, sans intervention d'aucune autre force, assurer l'écoulement permanent des charges électriques dans des conducteurs fermés. Cet écoulement se manifeste sous forme de courants induits.

3. Dans le cas général où un conducteur se déplace dans un champ magnétique variable, le courant induit est généré, d'une part, par la force électrique $e\boldsymbol{E}$ et, d'autre part, par la force magnétique $\frac{e}{c}[\boldsymbol{vB}]$. En additionnant ces deux forces on peut dire que *dans tous les cas le courant induit est créé par la force de Lorentz totale*

$$\boldsymbol{F} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{vB}]\right). \qquad (66.5)$$

Les contributions relatives des composantes électrique et magnétique de la force de Lorentz aux courants induits dépendent du *référentiel adopté.* En effet la division du champ électromagnétique en champs électrique et magnétique dépend du référentiel adopté pour l'étude des phénomènes. Prenons deux référentiels, l'un fixe S et l'autre mobile S'. Notons $\boldsymbol{V}$ la vitesse du référentiel S' par rap-

port au référentiel S. Lorsqu'on passe d'un référentiel à l'autre, les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ se transforment de façon bien déterminée. Les lois de ces transformations seront exposées dans le tome IV de ce cours. Pour le moment on peut se faire une idée des lois de ces transformations en considérant le cas où la vitesse V est petite devant la vitesse de la lumière c. Les formules que nous donnons ci-après coïncident avec les formules relativistes exactes au premier ordre d'approximation du petit rapport V/c. L'erreur commise est de l'ordre de $(V/c)^2$.

Notons $\boldsymbol{v}$ la vitesse d'une particule par rapport au référentiel S et $\boldsymbol{v}'$ sa vitesse par rapport au référentiel S'. Ces vitesses sont liées par la relation $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}$. Dans le référentiel S la force appliquée à une particule portant la charge e est donnée par la formule (66.5) et dans le référentiel S' cette force est $\boldsymbol{F}' = e\left(\boldsymbol{E}' + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}'\boldsymbol{B}']\right)$, où $\boldsymbol{E}'$ et $\boldsymbol{B}'$ sont les champs électrique et magnétique dans le référentiel S'. En mécanique non relativiste, toute force est invariante: $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}$. Par conséquent, en remplaçant dans (66.5) la vitesse $\boldsymbol{v}$ par la vitesse $\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}$ on obtient $\boldsymbol{F}' = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{V}\boldsymbol{B}]\right) + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}'\boldsymbol{B}]$. Pour trouver l'intensité $\boldsymbol{E}'$ il suffit de considérer une particule qui soit fixe par rapport au référentiel S', ce qui revient à poser dans l'expression précédente $\boldsymbol{v}' = 0$. On trouve alors $\boldsymbol{F}' = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{V}\boldsymbol{B}]\right)$. D'autre part, cette même force est donnée par $\boldsymbol{F}' = e\boldsymbol{E}'$. En comparant les deux expressions on trouve

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{V}\boldsymbol{B}]. \tag{66.6}$$

Cette équation exprime la loi non relativiste de la transformation du champ électrique. On ne peut établir une loi analogue pour le champ magnétique sans recourir à la théorie de la relativité, aussi donnerons-nous cette loi sans la démontrer:

$$\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{V}\boldsymbol{E}]. \tag{66.7}$$

On peut se demander s'il existe un référentiel où le champ électromagnétique se réduise à un champ purement électrique ou à un champ purement magnétique. Pour qu'il devienne purement électrique, il faudrait que $\boldsymbol{B}' = 0$, ou en vertu de (66.7) que $\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{V}\boldsymbol{E}] = 0$. En écrivant cette équation sous la forme $\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{V}_\perp\boldsymbol{E}] = 0$ on définit la composante transversale de la vitesse $\boldsymbol{V}$ (par rapport au vecteur $\boldsymbol{E}$). La composante longitudinale de la vitesse $\boldsymbol{V}$ reste indéterminée. En multipliant vectoriellement cette dernière équa-

tion par E, on obtient

$$V_{\perp} = \frac{c}{E^2} [EB].$$

On voit que le référentiel jouissant de la propriété requise n'existe pas toujours. Il peut arriver que cette dernière équation conduise au résultat absurde $V_{\perp} > c$. Il est vrai qu'en théorie non relativiste on n'est pas fondé de tirer une telle conclusion puisque les formules (66.6) et (66.7) ne sont vérifiées que pour $V \ll c$. Cette conclusion est cependant correcte, comme le montrent les formules relativistes exactes de transformation des champs. De même il n'est pas toujours possible de définir un référentiel dans lequel le champ électromagnétique se réduit au seul champ magnétique. On en conclut que dans le cas général les courants induits sont dus à l'existence simultanée des champs électrique et magnétique et il n'est pas toujours possible de les considérer dans un autre référentiel comme la manifestation de l'un de ces champs.

§ 67. Le fluxmètre et la bande de Rogowski

Le phénomène de l'induction électromagnétique constitue une base commode pour élaborer un procédé simple de mesure de l'intensité des champs magnétiques. Relions à un galvanomètre balistique les extrémités d'une petite spire de fil conducteur en la disposant de sorte que son plan soit perpendiculaire au champ magnétique. Cette spire sera traversée par le flux magnétique Φ. Si on extrait rapidement la spire du champ, ou si on la fait tourner autour du diamètre de 90°, le flux magnétique qui la traverse deviendra nul. On arrive au même résultat en coupant le courant créant le champ magnétique. Lorsque le flux magnétique traversant la spire vient à varier, celle-ci est parcourue par un courant de durée très brève:

$$\mathcal{J} = -\frac{1}{Rc}\frac{d\Phi}{dt},$$

où R est la somme des résistances de la spire, du galvanomètre balistique et des fils de connexion. Au cours du temps où le flux varie de Φ à 0, le galvanomètre est traversé par une quantité d'électricité

$$q = -\frac{1}{Rc}\int_0^t \frac{d\Phi}{dt}\,dt = \frac{\Phi}{Rc}. \tag{67.1}$$

La déviation du cadre du galvanomètre balistique est proportionnelle à la charge q et constitue donc une mesure de cette charge. Connaissant q, on peut calculer à l'aide de la formule (67.1) le flux magnétique Φ et en déduire ensuite l'induction B. Pour accroître la sensibilité, il est recommandé de remplacer la spire unique par une

petite bobine plate comportant un grand nombre de spires. En notant n le nombre de spires total et S l'aire d'une spire, on a $\Phi = nSB$. Les bobines utilisées pour la mesure du flux magnétique ainsi que de l'induction B constituent ce qu'on appelle un *fluxmètre*. Cet appareil de mesure peut être préalablement gradué en valeurs de Φ ou directement en valeurs de B.

Le phénomène d'induction électromagnétique peut également être utilisé pour la mesure des *tensions magnétiques*, i.e. de l'intégrale linéaire $\int_{12} B\,ds$. En général la valeur de cette intégrale dépend non seulement des positions des points initial 1 et final 2, mais aussi de la courbe 12 reliant ces points. Mais dans certaines conditions

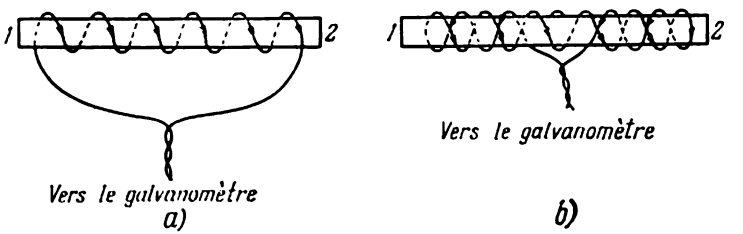


Fig. 174

on peut définir un ensemble de courbes 12 telles que l'intégrale $\int B\,ds$ le long de toutes ces courbes ait la même valeur. Il en sera ainsi chaque fois qu'il est possible de passer d'une courbe à une autre par une déformation continue au cours de laquelle on n'intercepte aucun courant électrique. Prenons un fil enroulé en hélice sur une bande souple et relions ses extrémités à un galvanomètre balistique (fig. 174, *a*). Faisons coïncider l'axe de l'hélice avec la ligne le long de laquelle on cherche à déterminer la tension magnétique entre les points *1* et *2*. On peut mesurer le flux magnétique Φ traversant la spirale en notant les indications du galvanomètre balistique, comme on l'a fait avec le fluxmètre. Le flux se laisse représenter par la formule

$$\Phi = \int SnB\,ds.$$

S désigne ici l'aire d'une spire, n le nombre de spires par unité de longueur de l'hélice. Si les valeurs de n et de S sont constantes le long de l'hélice, on a $\Phi = Sn \int (B\,ds)$, d'où

$$\int (B\,ds) = \frac{\Phi}{Sn} = \frac{cR}{nS}\,q. \qquad (67.2)$$

Dans les développements ci-dessus on a commis quelques erreurs. Le champ magnétique de l'hélice se compose des champs magnétiques des courants circulaires dont nous avons tenu compte. Mais il existe aussi une composante des courants parallèle à l'axe de l'hélice. Nous n'avons pas tenu compte du champ magnétique créé par cette composante. Nous n'avons pas tenu compte non plus du champ magnétique créé par les fils de connexion. Afin d'éliminer l'influence de ces champs magnétiques, on réalise l'enroulement en deux couches superposées, l'une allant à l'encontre de l'autre (fig. 174, *b*). Les extrémités des fils sont sorties en un même endroit, par exemple au milieu de la bande ; les fils de connexion sont torsadés. On réalise ainsi la *bande de Rogowski*. Pour mesurer une tension magnétique, on dispose la bande de Rogowski entre les points donnés et suivant la ligne donnée dans le champ magnétique. On débranche alors le courant excitant le champ magnétique et on mesure la déviation du galvanomètre qui est proportionnelle à la tension magnétique cherchée.

PROBLÈMES

1. *Analogie mécanique du phénomène d'induction électromagnétique.* Un tube replié en forme de tore et rempli de liquide se trouve dans le champ de la pesanteur terrestre. Lorsqu'on fait tourner le tore autour de son diamètre, le liquide se met en mouvement suivant l'axe du tube. Ce mouvement est analogue au courant induit apparaissant lors du mouvement d'un conducteur dans le champ magnétique. Le rôle de la force de Lorentz est assumé par la *force d'inertie de Coriolis*, résultant de la rotation de la Terre autour de son axe. Cette expérience peut servir à démontrer la rotation de la Terre et à mesurer la vitesse angulaire de cette rotation. En se fondant sur l'analogie qui existe entre cet effet et l'induction électromagnétique établir une théorie quantitative de l'effet en admettant que le liquide est incompressible et dénué de viscosité et que l'aire de la section droite du tube est partout constante.

Solution. Etudions le mouvement du liquide dans un référentiel lié à la Terre en rotation. Ce mouvement relatif s'effectue sous l'action des forces suivantes : de la force de gravitation, des gradients de pression du liquide, de la force d'inertie centrifuge et de la force d'inertie de Coriolis. A l'exclusion de la force de Coriolis, toutes ces forces sont potentielles. On peut donc représenter le mouvement relatif du liquide sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{a} = 2\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Omega}] + \boldsymbol{a}',$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ est la vitesse angulaire de rotation axiale de la Terre, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\text{rel}}$ la vitesse du liquide par rapport à la Terre et $\boldsymbol{a}'$ est l'accélération due aux forces potentielles. On peut exclure le vecteur potentiel $\boldsymbol{a}'$ en le remplaçant par la circulation du vecteur $\boldsymbol{a}$ le long d'un contour fermé. Si nous prenons pour contour fermé l'axe du tore, on aura

$$\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{s} = \oint_s \boldsymbol{f}_C\, d\boldsymbol{s},$$

où $\boldsymbol{f}_C = 2\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Omega}]$ est la force de Coriolis appliquée à l'unité de masse du liquide. Comme le liquide est incompressible et que la section droite du tube est partout la même, la composante axiale de l'accélération a_s est partout la même. En la faisant sortir de sous le signe d'intégration, nous obtenons $a_s = \mathscr{E}/s$, où s est la

longueur du tube et $\mathscr{E}$ dénote l'intégrale $\oint f_C\, ds$. Cette formule est analogue à la loi d'Ohm. Le rôle de l'intensité de courant, de la résistance et de la force électromotrice est assumé respectivement par les grandeurs a_s, s et $\mathscr{E}$. L'analogue du champ magnétique B est la vitesse angulaire de rotation de la Terre multipliée par deux: 2Ω. En vertu de la loi de l'induction électromagnétique, on peut écrire $\mathscr{E} = -d\Phi/dt$, où Φ est le flux du vecteur 2Ω qui traverse le contour s. On obtient ainsi

$$a_s = \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{s}\frac{d\Phi}{dt},$$

d'où

$$V = -\frac{1}{s}\Delta\Phi. \tag{67.3}$$

V désigne la composante axiale de la vitesse du liquide.

Supposons que le rayon du tore est R et que le tore est en position horizontale à l'instant initial. Notons S le vecteur de la surface du tore se trouvant en position horizontale. Faisons-le tourner de 180° autour d'un axe horizontal. On aura alors

$$\Phi_{in} = 2\,(\Omega S), \quad \Phi_f = -2\,(\Omega S),$$
$$\Delta\Phi = -4\,(\Omega S) = -4\Omega S \sin\vartheta,$$

où ϑ est la latitude géographique du lieu de l'expérience. En remplaçant S par πR^2 et s par $2\pi R$ dans la formule (67.3) et en supposant que le liquide était immobile à l'instant initial, on obtient

$$V = 2\Omega R \sin\vartheta.$$

Si le tore est au repos dans la position finale, le liquide s'y déplacera avec la vitesse $V = 2\Omega R \sin\vartheta$. Au pôle $\vartheta = 90°$ et $V = 2\Omega R$. On arrive au même résultat en rapportant tous les mouvements à un référentiel « fixe ». A l'équateur $V = 0$.

2. On maintient aux bornes d'un générateur une tension constante $V = 120$ V. On y connecte en série un rhéostat et un moteur électrique dont la résistance totale $r = 5$ ohms. Dans ces conditions l'enroulement du moteur électrique est parcouru par un courant $\mathcal{J} = 10$ A. On débranche le moteur de la source, on le branche sur une résistance $R = 100$ ohms (y compris la résistance propre du moteur) et on l'utilise comme dynamo. Calculer l'intensité i du courant généré dans le circuit du moteur électrique lorsqu'on le fait tourner à la même vitesse angulaire.

Réponse. $i = V/R - \mathcal{J}r/R = 0{,}7$ A.

3. Le long de deux tiges verticales dont les extrémités inférieures sont reliées par l'intermédiaire d'une résistance $R = 2$ ohms et dont les extrémités supérieures sont interconnectées à travers une pile de f.é.m. $\mathscr{E} = 1$ V et de résistance interne $r = 2$ ohms, glisse sans frottement un pont conducteur AB de longueur $l = 10$ cm et de masse $m = 10$ g (fig. 175). Ce montage est placé dans un champ magnétique uniforme dont l'induction B est normale au plan de la figure, pointe vers le lecteur et est numériquement égale à $B = 10^4$ G. Calculer la vitesse uniforme de déplacement du pont AB dans le champ de la pesanteur en négligeant le frottement et la résistance des tiges et du pont.

Réponse. $v = \dfrac{mg\,Rc - \mathscr{E}\,Bl}{2\,B^2 l^2}\,c = +500$ cm/s $= 5$ m/s. Le signe « plus » signifie que la vitesse v est dirigée suivant la verticale descendante.

4. Le long de deux tiges verticales reliées entre elles en haut et en bas par des résistances $R = 0{,}01$ ohm glisse sans frottement un pont conducteur AB de longueur $l = 100$ cm, de masse $m = 100$ g et ayant une résistance $R = 0{,}01$ ohm

(fig. 176). Ce montage est placé dans un champ magnétique uniforme dont l'induction B est normale au plan de la figure et vaut $B = 10\,000$ G. Calculer la vitesse de déplacement maximale que peut acquérir le pont en chute libre dans le champ de la pesanteur en négligeant le frottement et la résistance des tiges verticales.

Réponse. $v = \frac{3}{2}\frac{mg\,Rc^2}{B^2 l^2} = 1{,}5$ cm/s.

5. Une plaque de grande longueur en métal non magnétique ne portant pas de charges électriques se déplace d'un mouvement uniforme dans un champ magnétique uniforme $B = 1800$ G avec la vitesse $v = 6{,}28 \cdot 10^7$ cm/s. Les vecteurs v

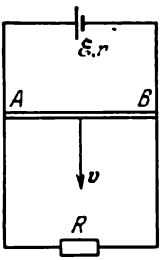


Fig. 175

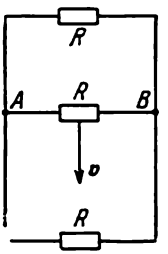


Fig. 176

et B sont rectangulaires entre eux et parallèles aux plans de la plaque. Calculer la densité superficielle des charges électriques qui apparaissent sur la plaque du fait de son mouvement.

Réponse. $\sigma = vB/(4\pi c) = 0{,}3$ un. C.G.S.E. $= 10^{-10}$ C/cm². L'électricité négative se déplace dans le sens du vecteur $[vB]$ et l'électricité positive en sens inverse.

6. Un cylindre de grande longueur, de rayon $R = 12{,}56$ cm, en métal non magnétique et ne portant pas de charges électriques est animé d'un mouvement de rotation uniforme avec une vitesse angulaire $\omega = 60$ rad/s dans un champ magnétique uniforme $B = 300$ G parallèle à l'axe du cylindre. Calculer la densité superficielle σ des charges électriques qui apparaissent sur la surface latérale du cylindre du fait de sa rotation. Préciser le signe des charges superficielles dans le cas où les vecteurs ω et B sont orientés dans le même sens. On négligera le champ magnétique dû aux charges et les effets d'inertie électroniques.

Réponse. $\sigma = \omega BR/(4\pi c) = 6 \cdot 10^{-7}$ un. C.G.S.E. $= 2 \cdot 10^{-16}$ C/cm². Les charges superficielles sont positives.

7. Une sphère de rayon a en métal non magnétique est animée d'un mouvement uniforme dans un champ magnétique permanent et uniforme B avec une vitesse v inclinée par rapport à la direction du champ. Calculer l'intensité du champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère dans un référentiel « fixe » par rapport auquel la sphère se meut avec la vitesse v. Calculer également les densités superficielle et spatiale des charges induites. Négliger le champ magnétique dû aux charges induites en mouvement.

Solution. Etant donné qu'à l'état permanent le courant à l'intérieur de la sphère doit être nul, le champ électrique $E^{(i)}$ doit être compensé par la force $\frac{1}{c}[vB]$. Le champ électrique à l'intérieur de la sphère est donc

$$E^{(i)} = -\frac{1}{c}[vB].$$

Il n'existe pas de charges spatiales à l'intérieur de la sphère puisque div $E^{(i)} = 0$. La composante tangentielle du champ $E^{(i)}$ et par suite celle du champ extérieur

$E^{(e)}$ sur la surface de la sphère sont égales à $E_\vartheta = -E^{(i)} \sin \vartheta$, ϑ étant l'angle entre la direction du vecteur $E^{(i)}$ et le rayon r mené par le centre de la sphère. Nous chercherons le champ extérieur $E^{(e)}$ comme le champ créé par un dipôle p placé au centre de la sphère:

$$E^{(e)} = \frac{3(pr)}{r^5} r - \frac{p}{r^3}.$$

On détermine aisément le vecteur p connaissant la valeur de la composante tangentielle E_ϑ. On obtient donc

$$E^{(e)} = \frac{3a^3}{cr^5} ([vB]\, r)\, r - \frac{a^3}{cr^3} [vB].$$

La densité superficielle des charges électriques σ se déduit du saut des composantes normales du champ électrique. Elle est égale à

$$\sigma = \frac{3}{4\pi c} ([vB]\, n),$$

où n est le vecteur unité de la normale extérieure à la surface de la sphère.

8. Comment fait-on pour mesurer au fluxmètre le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde long obturé par des couvercles non magnétiques, sans avoir à introduire le fluxmètre dans le solénoïde? L'enroulement du solénoïde s'arrête aux bords de la carcasse cylindrique.

R é p o n s e. Les dimensions du fluxmètre étant petites devant le rayon du solénoïde, on mesurera le champ magnétique au centre de l'une des bases du cylindre. Le champ à l'intérieur du solénoïde est deux fois plus grand.

9. On dispose un petit aimant rectiligne NS au centre d'une bague ronde de rayon a composée de N spires de fil dont les extrémités sont reliées à un galvanomètre balistique. L'axe de l'aimant est perpendiculaire au plan de la bague. Lorsqu'on enlève l'aimant, le galvanomètre dévie. Comment relier la valeur de cette déviation à celle du moment magnétique $\mathfrak{M}$ de l'aimant?

S o l u t i o n. Lorsqu'on enlève l'aimant, à travers le circuit passe la quantité d'électricité $Q = \Delta\Phi/R$, où $\Delta\Phi$ est la variation du flux magnétique embrassé par la bague et R la résistance du circuit (y compris la résistance du galvanomètre). Pour pouvoir calculer $\Delta\Phi$ nous supposerons d'abord que la bague ne comporte qu'une seule spire. Loin de l'aimant le champ magnétique est $B = \mathfrak{M}/r^3$. Cette formule n'est plus valable à proximité et à l'intérieur de l'aimant, mais le flux total à travers le plan infini contenant la spire est égal à zéro. Par conséquent pour calculer $\Delta\Phi$ on peut considérer un plan infini extérieur à la spire où la formule ci-dessus est valable. Cela signifie qu'on peut procéder à l'intégration dans les limites de $r = a$ à $r = \infty$. On trouve ainsi $\Delta\Phi = 2\pi\mathfrak{M}/a$. Pour une bobine de N spires on multiplie par N: $\Delta\Phi = 2\pi N\mathfrak{M}/a$. Par suite

$$RQ = 2\pi N\mathfrak{M}/a.$$

Ayant mesuré Q on en déduit $\mathfrak{M}$.

10. Une petite bille de masse $m = 1$ g portant une charge $q = 1$ un. C.G.S.E. est placée à l'intérieur d'un solénoïde sur un plan horizontal parfaitement lisse sur lequel elle peut glisser sans frottement. L'axe du solénoïde est vertical. A l'instant initial le courant était nul dans le solénoïde; ensuite on y fait passer un courant et on crée un champ magnétique uniforme permanent $B = 100$ G. Pendant l'accroissement de l'intensité du champ magnétique apparaît un champ électrique sous l'action duquel la bille est mise en mouvement. La montée du courant était tellement rapide que lors de l'établissement du champ la bille n'a pas eu le temps de se déplacer à une distance notable. Calculer le rayon de la trajectoire circulaire de la bille après établissement du champ magnétique ainsi que la période T de sa révolution sur cette trajectoire

sachant qu'à l'instant initial la bille se trouvait à une distance R de l'axe du solénoïde. Disposant des résultats numériques, décider si l'effet sera observable avec des billes macroscopiques. A quelles difficultés se heurterait-on dans une expérience avec des macroparticules chargées?

Réponse. $r = R/2$, $T = 2\pi mc/(qB) \approx 60$ ans.

11. On enfile un tore en diélectrique de permittivité ε sur un noyau cylindrique en fer, traversé par un flux magnétique uniforme $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$ (fig. 177). Le tore comporte un interstice d'air infiniment étroit résultant de deux coupures infiniment rapprochées parallèles aux plans méridiens. Calculer l'intensité E du champ électrique dans cet interstice en fonction de la distance r à l'axe du cylindre.

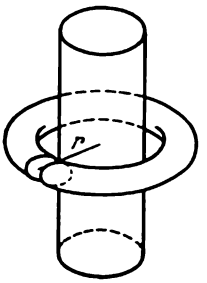


Fig. 177

Réponse. $E = \dfrac{\varepsilon\omega}{2\pi cr} \Phi_0 \sin \omega t$.

12. Un cylindre creux en diélectrique, de rayon interne r_1 et de rayon externe r_2 est mis en rotation uniforme avec la vitesse angulaire ω autour de son axe géométrique dans un champ magnétique uniforme. Le vecteur induction B du champ magnétique est parallèle à l'axe du cylindre; la permittivité diélectrique du cylindre est ε. Calculer: 1) la densité spatiale $\rho_{\text{lié}}$ des charges liées qui sont apparues dans le cylindre du fait de sa rotation dans le champ magnétique; 2) la charge spatiale totale q par unité de longueur du cylindre; 3) les densités des charges superficielles sur les deux surfaces du cylindre; 4) la charge globale du cylindre.

Solution. Une charge e tournant avec le cylindre est soumise à la force de Lorentz $F = \frac{e}{c}[vB] = \frac{e}{c}[[\omega r]B] = \frac{e}{c}(\omega B)r$. Cette force provoque la même polarisation du diélectrique que celle qui résulterait de l'application d'un champ électrique d'intensité $\frac{1}{c}(\omega B)r$, i.e.

$$P = \frac{\alpha}{c}(\omega B)r = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}(\omega B)r.$$

On en tire (puisque $\operatorname{div} r = \partial x/\partial x + \partial y/\partial y = 2$)

$$\rho_{\text{lié}} = -\operatorname{div} P = -\frac{\varepsilon - 1}{2\pi c}(\omega B),$$

$$q = \int \rho_{\text{lié}}\, dV = -\frac{\varepsilon - 1}{2c}(\omega B)(r_2^2 - r_1^2).$$

La densité superficielle des charges liées se trouvant sur la surface interne du cylindre est

$$\sigma_{1\ \text{lié}} = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}(\omega B)r_1$$

et celle de la surface externe du cylindre est

$$\sigma_{2\ \text{lié}} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}(\omega B)r_2.$$

La charge totale du cylindre est nulle.

§ 68. Inductance des fils électriques. Effets accompagnant l'application et la coupure d'un courant

1. Considérons un fil électrique fin en forme de boucle parcouru par un courant continu $\mathcal{J}$ (fig. 178). Soit $\boldsymbol{B}$ le champ magnétique créé par ce courant. Traçons à l'intérieur du fil parallèlement à son axe un contour mathématique fermé s et fixons sur ce contour un sens de parcours positif. Soit Φ le flux magnétique du vecteur $\boldsymbol{B}$ embrassé par le contour s. Si l'espace considéré ne renferme aucun corps ferromagnétique, les valeurs de $\boldsymbol{B}$ et de Φ seront proportionnelles au courant, ce qui permet d'écrire

$$\Phi = L\mathcal{J}^{(m)} = \frac{1}{c} L\mathcal{J}. \qquad (68.1)$$

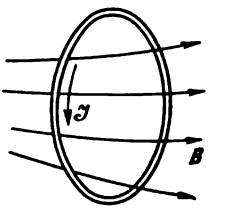


Fig. 178

$\mathcal{J}$ désigne ici l'intensité de courant dans le système gaussien d'unités de mesure et $\mathcal{J}^{(m)}$ l'intensité de ce même courant exprimée dans le système C.G.S.M. Le coefficient L est indépendant de l'intensité de courant, n'étant fonction que des dimensions et de la configuration du fil ; on l'appelle *inductance* ou encore *coefficient de self-inductance* du conducteur. Cette définition est quelque peu ambiguë puisqu'on n'a pas précisé la position du contour mathématique s. Tant qu'il s'agit de fils fins, cette imprécision est parfaitement négligeable. D'ailleurs on peut lever l'ambiguïté par un procédé qui sera décrit au § 69. Pour abréger nous appellerons la grandeur Φ *flux magnétique* à travers le contour conducteur fermé, quoique sa signification physique exacte n'apparaîtra qu'après introduction du contour mathématique auxiliaire s, comme nous l'avons fait ci-dessus.

Pour calculer l'inductance on ne peut remplacer un fil fin par un fil infiniment fin, i.e. par une ligne géométrique puisque dans ce cas le champ magnétique à proximité du fil serait proportionnel à $1/r$, r étant la distance jusqu'au fil, et on obtiendrait alors pour le flux magnétique et l'inductance des valeurs infinies. Plus le fil est fin, plus son inductance est grande, toutes choses égales d'ailleurs.

2. A titre d'exemple, calculons l'inductance d'un solénoïde en négligeant les effets de bord. Soient l la longueur du solénoïde, N le nombre total des spires et S l'aire d'une spire du solénoïde. A l'intérieur du solénoïde l'induction du champ magnétique est

$$B = \frac{4\pi}{c} \frac{\mathcal{J} N \mu}{l}.$$

Le flux magnétique embrassé par une spire est égal à BS et celui embrassé par N spires à BSN, i.e.

$$\Phi = \frac{4\pi}{c} \frac{\mu N^2 S}{l} \mathcal{J}.$$

En identifiant cette formule avec la formule (68.1) on trouve

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}. \tag{68.2}$$

3. Dans le système gaussien d'unités de mesure et dans le système C.G.S.M., l'unité de flux magnétique est le *maxwell*. Le maxwell est le flux magnétique produit par un champ magnétique de 1 gauss à travers une surface de 1 cm², normale au champ. Conformément à la loi de Biot et Savart

$$dB = \frac{\mathcal{J}}{cr^3} [dlr],$$

le flux a pour dimension celle de la quantité $\mathcal{J}l/c$. Compte tenu de cette remarque, il résulte de la formule (68.1) que dans les systèmes gaussien et C.G.S.M. le coefficient de self-inductance a la dimension d'une longueur. Dans ces systèmes l'unité de self-inductance s'appelle le *centimètre*. Le centimètre est l'inductance d'une spire telle qu'un courant de 1 unité C.G.S.M. y crée un flux magnétique de 1 maxwell. La formule (68.2) donne l'inductance du solénoïde en centimètres.

Dans le système des unités pratiques (volt, ampère, ohm, etc.) la loi de l'induction électromagnétique et la formule (68.1) s'écrivent comme suit:

$$\mathcal{E}'^{\text{ind}} = -\frac{d\Phi'}{dt}, \tag{68.3}$$

$$\Phi' = L'\mathcal{J}'. \tag{68.4}$$

Tous les symboles sont affectés de primes afin d'indiquer que toutes les grandeurs sont mesurées en unités pratiques. L'unité pratique de flux magnétique est le *weber*. Cette unité est définie en imposant qu'à un taux de variation du flux magnétique égal à 1 Wb/s corresponde dans le contour conducteur une force électromotrice de 1 volt. On peut dire aussi que le weber est égal à 1 *volt-seconde*. Etablissons la relation entre le weber et le maxwell. Dans le système gaussien

$$\mathcal{E}^{\text{ind}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Comme 1 V $= \frac{1}{300}$ un. C.G.S.E. de tension (environ), on a

$$\mathcal{E}'^{\text{ind}} \text{ (volts)} = 10^{-8} \frac{d\Phi \text{ (maxwells)}}{dt} \text{ (exact.)}.$$

En comparant cette formule à la formule (68.3) on voit que le weber est 10^8 fois plus grand que le maxwell :

$$1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ M}.$$

L'unité pratique d'inductance est le *henry*. C'est l'inductance d'un fil qui, parcouru par un courant de un ampère, crée un flux magnétique de 1 weber :

$$1 \text{ H} = \frac{1 \text{ Wb}}{1 \text{ A}} = \frac{10^8 \text{ M}}{\frac{1}{10} \text{ un. C.G.S.M. de courant}} = 10^9 \text{ cm}.$$

4. Etudions les effets qui sont dus à l'inductance des circuits et que l'on observe lorsqu'on établit ou lorsqu'on coupe un courant continu. Soit un circuit comportant une source de f.é.m. $\mathscr{E}$ constante, une bobine de self-induction et une résistance ohmique (fig. 179). Notons L l'inductance totale du circuit et R sa résistance totale. Lorsqu'on ferme l'interrupteur K, le courant n'atteint pas instantanément sa valeur limite $\mathscr{E}/R$ définie par la loi d'Ohm, mais croît progressivement. Le flux magnétique embrassé par le contour croît lui aussi progressivement et donne naissance à une f.é.m. d'induction et au courant induit correspondant. Ce courant est appelé *extra-courant de fermeture*. Conformément à la loi de Lenz, le sens de l'extra-courant de fermeture est opposé à celui du courant principal.

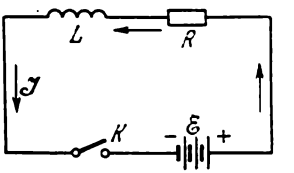


Fig. 179

L'intensité du courant alternatif n'est pas nécessairement la même en tout point d'un conducteur, puisqu'en certaines régions il peut y avoir accumulation de charges électriques. Cependant nous n'envisageons ici que des courants alternatifs qui varient lentement dans le temps. Dans ce cas les valeurs instantanées des courants sont les mêmes dans toutes les parties d'un circuit sans dérivations avec un haut degré de précision ; les champs magnétiques dans les conducteurs se laissent calculer alors à l'aide de la loi de Biot et Savart, comme si le courant était continu. On appelle ces courants *quasi stationnaires*. Les formules (68.3) et (68.4) s'appliquent aux courants quasi stationnaires dont l'intensité est donnée par l'expression

$$\mathcal{J} = \frac{\mathscr{E} + \mathscr{E}^{\text{ind}}}{R}.$$

En utilisant les unités pratiques

$$\mathcal{J}' = \frac{\mathscr{E}' - \frac{d\Phi'}{dt}}{R'}. \qquad (68.5)$$

C'est l'équation différentielle des courants quasi stationnaires. On peut l'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt}(L'\mathcal{J}') + R'\mathcal{J}' = \mathcal{E}'. \tag{68.6}$$

Si les fils conducteurs ne se déforment pas pendant le temps de variation du courant, l'inductance L' est constante et peut être sortie de sous le signe de dérivation:

$$L'\frac{d\mathcal{J}'}{dt} + R'\mathcal{J}' = \mathcal{E}'. \tag{68.7}$$

Lorsque $\mathcal{E}'$ est constant, la solution générale de cette équation est de la forme

$$\mathcal{J}' = Ce^{-\frac{R'}{L'}t} + \frac{\mathcal{E}'}{R'}.$$

La constante d'intégration C doit être définie à partir de la condition initiale: à l'instant de la fermeture du circuit, i.e. pour $t = 0$, le courant doit être nul. En utilisant cette condition on trouve sans peine

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \tag{68.8}$$

où τ est une constante ayant la dimension du temps:

$$\tau = L'/R'. \tag{68.9}$$

On l'appelle *temps d'établissement du courant.* Les symboles des grandeurs figurant dans la formule (68.8) ne comportent pas de primes car cette formule est valable quel que soit le système d'unités utilisé. Seule l'expression du temps d'établissement du courant change suivant le système d'unités. Dans le système d'unités gaussien

$$\tau = \frac{L}{c^2R}. \tag{68.10}$$

Le courant total $\mathcal{J}$ comporte deux termes dont le second, i.e. $-(\mathcal{E}/R)\,e^{-t/\tau}$ définit l'intensité de l'extra-courant de fermeture. Pour $t \to \infty$ l'extra-courant tend vers zéro et le courant total $\mathcal{J}$ tend vers sa valeur limite $\mathcal{E}/R$. Cela signifie que la valeur définitive du courant ne s'établit que progressivement et la vitesse de son établissement dépend de τ: au bout du temps τ l'intensité de l'extra-courant diminue de e fois.

5. Etudions maintenant le processus de la coupure du courant. Le schéma de l'expérience est représenté sur la figure 180. L'interrupteur K est d'abord fermé. Les sens des courants dans le circuit

sont indiqués par des flèches continues. Le courant total se divise entre la self-induction L et la résistance ohmique R montées en parallèle. Si la résistance interne de la batterie est négligeable, le courant dans la bobine de self-induction est $\mathcal{J}_0 = \mathcal{E}/r$. Après ouverture de l'interrupteur K, seul le contour $ABCD$ reste fermé. Le courant qui circulait initialement dans la bobine de self-induction présentait une certaine réserve d'énergie magnétique qui ne peut se dissiper instantanément. Le champ magnétique commence à décroître, ce qui donne naissance à une force électromotrice et à un courant induit dans le contour $ABCD$. Ce courant est l'*extra-courant d'ouverture*. Sur la figure 180 son sens est indiqué par des flèches en pointillé. Dans la bobine de self-induction l'extra-courant circule dans le même sens que le courant initial et dans les autres branches du contour $ABCD$ il circule en sens inverse à celui du courant initial. En désignant par R' la résistance totale du contour $ABCD$, on peut tirer l'intensité de courant à partir de l'équation différentielle

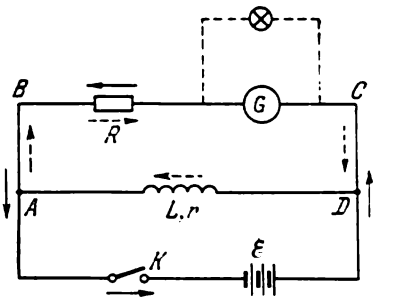


Fig. 180

$$L'\frac{d\mathcal{J}'}{dt} + R'\mathcal{J}' = 0$$

et de la condition initiale $\mathcal{J}' = \mathcal{J}'_0$ pour $t = 0$. Par suite

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J}'_0 e^{-t/\tau}, \qquad (68.11)$$

τ étant défini par (68.9). La f.é.m. d'induction est

$$\mathcal{E}'^{\text{ind}} = -L'\frac{d\mathcal{J}'}{dt} = \frac{L'\mathcal{J}'_0}{\tau}e^{-t/\tau} = \frac{R'}{r'}\mathcal{E}'e^{-t/\tau}. \qquad (68.12)$$

Si $R' \gg r'$ cette f.é.m. peut être notablement plus grande que la f.é.m. de la batterie. C'est la cause des ruptures électriques que l'on observe parfois lors de la coupure du courant dans les circuits comportant de grandes inductances.

Pour réaliser une expérience de démonstration de cet effet, on peut utiliser une bobine de 50 à 60 cm de long, de 8 à 10 cm de diamètre comportant un noyau composé de tiges de fer et un enroulement à plusieurs couches de fil de 1 mm de diamètre environ. Comme indiqué en pointillé sur la figure 180, on monte en parallèle une lampe d'éclairage pouvant supporter une tension plusieurs fois plus grande que la f.é.m. de la batterie (si celle-ci est de 4 V, on prendra une lampe de 12 V). Lorsque le circuit est fermé la lampe ne donne que peu de lumière, mais donne une lumière vive dès qu'on ouvre l'interrupteur K ; elle peut même être mise hors de service

si la f.é.m. d'induction est beaucoup plus grande que la f.é.m. de la batterie.

6. Considérons maintenant deux spires (ou deux bobines) parcourues par les courants continus $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$. Fixons arbitrairement sur ces spires des sens positifs de parcours. Si l'espace ambiant ne contient aucun corps ferromagnétique, les flux magnétiques Φ_1 et Φ_2 embrassés par les spires seront proportionnels aux courants et peuvent être représentés sous la forme

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{c} L_{11}\mathcal{J}_1 + \frac{1}{c} L_{12}\mathcal{J}_2, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{c} L_{21}\mathcal{J}_1 + \frac{1}{c} L_{22}\mathcal{J}_2. \end{aligned} \tag{68.13}$$

Les coefficients L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22} sont indépendants des courants mais sont déterminés par la forme, les dimensions et la position relative des spires. On les appelle *coefficients d'inductance*. Si $\mathcal{J}_2 = 0$, on a $\Phi_1 = L_{11}\mathcal{J}_1/c$, et si $\mathcal{J}_1 = 0$, $\Phi_2 = L_{22}\mathcal{J}_2/c$. Cela signifie que L_{11} est l'inductance de la première spire et L_{22} est celle de la deuxième spire. Les deux autres coefficients L_{12} et L_{21} sont les *coefficients d'inductance mutuelle*. On les mesure avec les mêmes unités que les coefficients de self-induction. Dans les systèmes pratique et C.G.S.M. on omet le facteur c dans les formules (68.13). Il est facile d'étendre ces notions à un nombre quelconque de spires. Dans le paragraphe suivant nous démontrerons la relation $L_{ik} = L_{ki}$ que l'on appelle *théorème de réciprocité*.

PROBLÈMES

1. On enroule une bobine de fil sur un tore en matériau paramagnétique, comportant un interstice à air d'écartement variable d (fig. 181). Lorsque

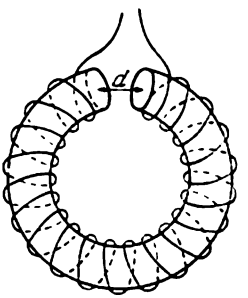


Fig. 181

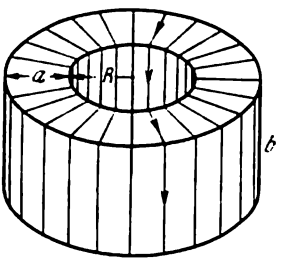


Fig. 182

$d = 0$, l'inductance de la bobine est $L = L_0$, lorsque $d = d_1 = 1$ mm, l'inductance est deux fois plus petite ($L = L_1 = L_0/2$). Pour quelle valeur de d l'inductance L sera-t-elle égale à $L_0/4$?

Réponse. $d = \dfrac{L_1 (L_0 - L)}{L (L_0 - L_1)} d_1 = 3$ mm.

2. Calculer l'inductance L d'un bobinage toroïdal enroulé sur un tube cylindrique de hauteur b, de rayon intérieur R et de rayon extérieur $R + a$ (fig. 182). Le nombre de spires de la bobine est N, la perméabilité magnétique $\mu = 1$.

Réponse. $L = 2bN \ln (1 + a/R)$.

3. On dispose suivant l'axe de la bobine du problème précédent un fil conducteur rectiligne infiniment long (non indiqué sur la figure 182). Calculer l'inductance mutuelle L_{12} entre la bobine et le fil.

Réponse. $L_{12} = L = 2bN \ln (1 + a/R)$.

4. A l'intérieur d'un solénoïde à air de petit diamètre on introduit une petite bobine plate comportant $n = 40$ spires, l'aire d'une spire est $S = 10$ cm² et la bobine est parcourue par le courant $\mathcal{J} = 1$ A. La longueur du solénoïde

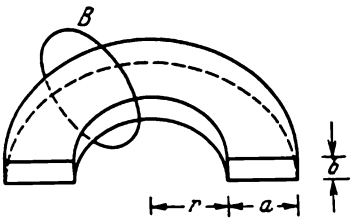


Fig. 183

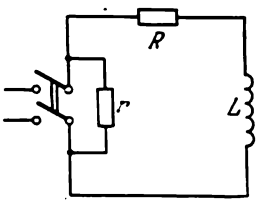


Fig. 184

$l = 50$ cm, le nombre de spires $N = 10\,000$. L'axe de la petite bobine est parallèle à l'axe du solénoïde. Calculer le flux magnétique émanant de la petite bobine qu'embrasse l'enroulement du solénoïde.

Réponse. $\Phi_{12} = 4\pi NnS\mathcal{J}/cl = 10^5$ M $= 10^{-3}$ Wb.

Indication. Utiliser le théorème de réciprocité $L_{12} = L_{21}$.

5. Sur une carcasse torique de section rectangulaire de dimensions $a = 17{,}2$ cm et $b = 5$ cm on enroule un bobinage de fil fin comportant $N = 1000$ spires. (La figure 183 représente une moitié de la carcasse torique sans bobinage.) On enfile sur cette bobine torique une bobine circulaire comportant $n = 100$ spires parcourues par un courant $\mathcal{J} = 1$ A. Le rayon interne de la bobine torique est $r = 10$ cm. Calculer le flux magnétique produit par la bobine circulaire et capté par le bobinage torique.

Réponse. $\Phi_{12} = 2Nnb\mathcal{J} \ln (1 + a/r) = 10^5$ M $= 10^{-3}$ Wb.

6. Lorsqu'on débranche les circuits de courant continu présentant de grandes inductances (par exemple les enroulements inducteurs des générateurs de courant continu) on les connecte préalablement à une résistance r montée en parallèle afin de limiter les surtensions (fig. 184). Calculer de combien de fois la tension maximale V_{max} aux bornes du circuit sera alors plus grande que la tension continue appliquée V_0.

Réponse. $V_{max}/V_0 = r/R$. Plus r est petit, plus V_{max} est petit. On ne doit cependant pas rendre r trop petit afin d'éviter une trop grande surcharge sur la source de courant. Il suffit que V_{max} ne dépasse pas V_0, ce qui implique que r doit être plus petit ou comparable à R.

§ 69. Energie magnétique des courants

1. Tout courant électrique contient une réserve d'énergie que l'on appelle *énergie magnétique*. Pour calculer cette énergie, on peut négliger complètement la résistance des conducteurs parcourus par

les courants et poser que cette résistance est nulle. Cette simplification ne peut restreindre la généralité du résultat obtenu puisque *l'énergie magnétique ne peut dépendre que de l'intensité et de la répartition des courants ainsi que des propriétés magnétiques du milieu remplissant l'espace.* En admettant que les fils sont parfaitement conducteurs, nous simplifions les calculs, car on n'aura pas à tenir compte des pertes d'énergie dues à l'effet Joule.

Considérons d'abord une spire isolée et fixe. Posons qu'à l'instant initial l'intensité de courant y est nulle. Par un procédé quelconque faisons apparaître et croître le courant $\mathcal{J}$ circulant dans la spire. A mesure que croît le courant $\mathcal{J}$ le flux magnétique Φ embrassé par la spire croît et donne naissance à une force électromotrice d'induction. Le travail élémentaire que doit fournir une source extérieure à l'encontre de la f.é.m. d'induction est

$$\delta A^{\text{ext}} = -\mathcal{E}^{\text{ind}}\mathcal{J}\,dt$$

et compte tenu de (64.1)

$$\delta A^{\text{ext}} = \frac{1}{c}\mathcal{J}\,d\Phi. \tag{69.1}$$

Cette relation présente un caractère très général. Elle est vérifiée pour les matériaux ferromagnétiques puisque nous l'avons établie sans faire d'hypothèse sur les propriétés magnétiques du milieu. Mais si le milieu ne présente pas d'hystérésis, notamment s'il est para- ou diamagnétique, le travail δA^{ext} ne sera utilisé qu'à accroître l'énergie magnétique W_m, de sorte que

$$dW_m = \frac{\mathcal{J}}{c}\,d\Phi. \tag{69.2}$$

Dans ce paragraphe nous supposerons qu'il n'y a pas de ferromagnétiques. Dans ce cas $\Phi = L\mathcal{J}/c$ et la self-inductance L est constante pour un conducteur fixe. Partant de ce résultat, nous obtenons par intégration

$$W_m = \frac{L}{2}\left(\frac{\mathcal{J}}{c}\right)^2 = \frac{1}{2c}\mathcal{J}\Phi = \frac{\Phi^2}{2L}. \tag{69.3}$$

(Si on utilise le système pratique d'unités de mesure ou le système C.G.S.M., on écrira $\mathcal{J}$ à la place de $\mathcal{J}/c$.) La formule (69.3) reste valable, que la spire soit fixe ou mobile pendant l'accroissement du courant, puisque l'énergie ne dépend que de l'*état du système* et non du procédé mis en œuvre pour arriver à cet état. On peut, par exemple, réaliser la transition à l'état final de la manière suivante. Tant que le fil n'est pas parcouru par un courant, nous le déformerons jusqu'à ce qu'il prenne sa configuration définitive. Cela n'exige pas de dépense d'énergie. Ensuite, maintenant le fil fixe, nous ferons croître le courant jusqu'à sa valeur finale $\mathcal{J}$. Nous dépensons alors le travail $L\mathcal{J}^2/(2c^2)$, et ce travail sera égal à l'accrois-

sement d'énergie magnétique que nous voulions déterminer. Ce raisonnement montre que L figurant dans (69.3) est la self-inductance de la spire dans son état final.

La formule (69.3) lève l'indétermination dont était entachée jusqu'ici la notion de self-inductance et que nous avons relevée au § 68. En effet, comme le courant $\mathcal{J}$ et l'énergie magnétique W_m sont des grandeurs parfaitement définies, la formule (69.3) permet de calculer le coefficient de self-induction L de façon univoque. En outre cette formule peut servir à définir L dans les cas de fils épais.

2. Généralisons maintenant la formule (69.3) à un nombre quelconque de spires. En supposant encore que les spires sont fixes faisons croître le courant qui les parcourt. On écrira comme plus haut (formule (69.1)) l'expression suivante du travail élémentaire qui doit être produit à l'encontre de la force électromotrice d'induction

$$\delta A^{\text{ext}} = \frac{1}{c} \sum_i \mathcal{J}_i \, d\Phi_i, \tag{69.4}$$

où on somme sur toutes les spires. L'énergie magnétique à l'état final est donnée par l'intégrale

$$W_m = \frac{1}{c} \int \sum \mathcal{J}'_i \, d\Phi'_i,$$

où les symboles affectés de primes $\mathcal{J}'_i$ et Φ'_i dénotent les valeurs courantes des grandeurs concernées. Les symboles $\mathcal{J}_i$ et Φ_i sont réservés à la notation des courants et des flux magnétiques dans l'état final.

Pour pouvoir calculer l'intégrale on remarquera que sa valeur ne dépend pas du « chemin d'intégration », i.e. de l'allure de la variation des intensités de courant dans les fils conducteurs. On peut par exemple exciter les courants successivement dans les différentes spires : faire passer le courant d'abord dans la première spire seulement et l'augmenter jusqu'à la valeur $\mathcal{J}_1$, puis sans faire varier le courant $\mathcal{J}_1$ exciter un courant dans la deuxième spire et le faire croître jusqu'à une valeur donnée et ainsi de suite. Mais on peut aussi exciter les courants dans toutes les spires simultanément mais indépendamment les uns des autres. Dans tous les cas le résultat du calcul de l'énergie magnétique sera le même. Pour simplifier le calcul nous ferons croître tous les courants simultanément et de façon qu'ils restent proportionnels les uns aux autres. Ainsi à tout instant sera vérifiée la relation $\mathcal{J}'_i = \lambda \mathcal{J}_i$, où λ est une variable indépendante de i. Dans l'état initial $\lambda = 0$ et dans l'état final $\lambda = 1$. Puisque, en l'absence de matériaux ferromagnétiques, les relations entre les flux magnétiques et les courants sont linéaires ils vérifient les mêmes relations, i.e. $\Phi'_i = \lambda \Phi_i$ et par suite $d\Phi'_i =$

$= \Phi_i \, d\lambda$. Ainsi

$$W_m = \frac{1}{c} \sum \mathcal{J}_i \Phi_i \int_0^1 \lambda \, d\lambda,$$

ce qui donne après intégration

$$W_m = \frac{1}{2c} \sum \mathcal{J}_i \Phi_i = \frac{1}{2c^2} \sum \sum L_{ik} \mathcal{J}_i \mathcal{J}_k. \tag{69.5}$$

3. Nous avons admis dans nos calculs que la perméabilité magnétique μ restait constante pendant l'aimantation. Ce n'est qu'à cette condition que la relation entre les courants et les flux magnétiques peut être linéaire. On démontrera au § 73 que si μ dépend de la température, l'aimantation de la substance magnétique s'accompagne d'une variation de sa température et donc de sa perméabilité μ. Le procédé de calcul donné ci-dessus cesse alors d'être utilisable. Mais si la température de la substance magnétique est maintenue constante ce procédé de calcul peut être appliqué. Le travail W_m représente alors le travail que l'on fournit au système lors d'une augmentation isotherme et quasi statique des courants dans les fils. En thermodynamique on appelle ce travail *énergie libre*. Ainsi dans le cas général les formules (69.3) et (69.5) définissent non pas l'énergie interne mais l'*énergie magnétique libre du système*. La situation est exactement la même qu'en électrostatique (cf. § 28, pt. 4).

4. L'utilisation des formules (69.4) et (69.5) permet de démontrer le théorème de réciprocité pour les coefficients d'inductance mutuelle dont il a été question au paragraphe précédent. Ce théorème affirme que la matrice des coefficients L_{ik} est symétrique, i.e.

$$L_{ik} = L_{ki}. \tag{69.6}$$

Il suffit de démontrer cette relation pour une seule paire d'indices, par exemple $i = 1$, $k = 2$. Comme les coefficients L_{ik} sont indépendants des courants on peut poser pour simplifier que les courants ne circulent que dans les spires 1 et 2 et sont nuls dans toutes les autres spires. Pour faire varier d'infiniment peu les courants $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ on devra fournir le travail

$$\delta A^{\text{ext}} = \frac{1}{c} (\mathcal{J}_1 \, d\Phi_1 + \mathcal{J}_2 \, d\Phi_2)$$

qui sera utilisé pour accroître l'énergie magnétique des courants $dW_m = \delta A^{\text{ext}}$. Or dans le cas considéré cette énergie s'exprime par l'équation

$$W_m = \frac{1}{2c} (\mathcal{J}_1 \Phi_1 + \mathcal{J}_2 \Phi_2),$$

et son accroissement par l'expression

$$dW_m = \frac{1}{2c}(\mathcal{J}_1 d\Phi_1 + \mathcal{J}_2 d\Phi_2) + \frac{1}{2c}(\Phi_1 d\mathcal{J}_1 + \Phi_2 d\mathcal{J}_2).$$

En identifiant les deux expressions de dW_m on obtient

$$\mathcal{J}_1 d\Phi_1 + \mathcal{J}_2 d\Phi_2 = \Phi_1 d\mathcal{J}_1 + \Phi_2 d\mathcal{J}_2. \qquad (69.7)$$

Cette relation est vérifiée quelles que soient les valeurs de $d\mathcal{J}_1$ et $d\mathcal{J}_2$. Pour abréger les calculs ultérieurs on posera $d\mathcal{J}_2 = 0$, i.e. $\mathcal{J}_2 = \text{const}$. Les flux magnétiques sont donnés par les expressions suivantes:

$$\Phi_1 = \frac{1}{c}(L_{11}\mathcal{J}_1 + L_{12}\mathcal{J}_2),$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{c}(L_{21}\mathcal{J}_1 + L_{22}\mathcal{J}_2).$$

En les différentiant avec $\mathcal{J}_2 = \text{const}$ on obtient

$$d\Phi_1 = \frac{1}{c} L_{11} d\mathcal{J}_1, \quad d\Phi_2 = \frac{1}{c} L_{21} d\mathcal{J}_1.$$

En portant ces expressions dans (69.7) on trouve

$$L_{11}\mathcal{J}_1 d\mathcal{J}_1 + L_{21}\mathcal{J}_2 d\mathcal{J}_1 = (L_{11}\mathcal{J}_1 + L_{12}\mathcal{J}_2) d\mathcal{J}_1.$$

Il s'ensuit que $L_{12} = L_{21}$, ce qui démontre le théorème de réciprocité. Nous n'avons pas tenu compte des résistances des conducteurs, car les coefficients L_{ik} ne dépendent que de leurs formes et de leurs positions relatives ainsi que de la distribution de la densité de courant électrique dans leurs sections droites.

5. Pour conclure ce paragraphe considérons le paradoxe suivant. La force $\boldsymbol{f} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{vB}]$ qui s'exerce dans un champ magnétique sur une charge mobile étant normale à sa vitesse $\boldsymbol{v}$ ne produit aucun travail. On peut se demander alors comment se fait-il que le déplacement d'une spire parcourue par un courant (par exemple l'induit d'un moteur électrique) dans un champ magnétique s'accompagne de production de travail. La réponse en est que ce travail n'est pas le travail total que fournit le champ magnétique aux charges mobiles qui sont les porteurs de courant dans un conducteur. Examinons l'identité

$$\frac{1}{c}[\boldsymbol{jB}]\boldsymbol{v} = -\frac{1}{c}[\boldsymbol{vB}]\boldsymbol{j},$$

où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse du conducteur et $\boldsymbol{j}$ la densité du courant électrique qui le parcourt. A gauche on trouve le travail que fournit dans l'unité de temps la force d'Ampère $\boldsymbol{f}_{\text{amp}} = \frac{1}{c}[\boldsymbol{jB}]$ appliquée à l'unité de volume du conducteur. A droite on trouve le travail changé de

signe fourni par le champ électrique d'induction E_{ind} qui apparaît lors du mouvement du conducteur. Le travail total $A_{\text{tot}} = A_{\text{amp}} + A_{\text{ind}}$ est nul. Supposons maintenant que l'on branche dans le circuit une batterie ou toute autre source de courant. On doit ajouter alors le travail fourni par la batterie: $A_{\text{tot}} = A_{\text{amp}} + A_{\text{ind}} + A_{\text{bat}}$. Si la force électromotrice de la batterie est telle qu'elle compense à tout instant la force électromotrice d'induction et maintient un courant constant dans le circuit, on aura $A_{\text{ind}} + A_{\text{bat}} = 0$; si les pertes par effet Joule sont négligeables $A_{\text{tot}} = A_{\text{amp}}$, ce qui signifie que le travail A_{amp} est fourni aux dépens de la batterie.

§ 70. Localisation spatiale de l'énergie magnétique

1. Les formules (69.2) expriment l'énergie magnétique *en fonction des courants et des flux magnétiques.* L'énergie magnétique (69.3) peut être considérée comme l'*énergie potentielle des courants* dont l'interaction est conforme à la loi d'Ampère. Ce résultat correspond à la conception de l'action directe à distance. On peut cependant exprimer l'énergie magnétique sous une forme différente qui correspond à une autre conception de la localisation de l'énergie magnétique. Considérons un solénoïde de grande longueur dont la surface est parcourue par un courant de densité linéique $i = \mathcal{J}/l$ (l — longueur du solénoïde). Nous n'utiliserons pas ici les formules (69.3) qui ne sont valables que si les vecteurs B et H sont liés par la relation $B = \mu H$, en donnant la préférence à la formule (69 2) qui n'implique que l'existence d'une relation univoque entre B et H qui n'a pas besoin d'être linéaire (absence d'hystérésis). En négligeant les effets de bord, le champ H à l'intérieur du solénoïde s'exprimera par $H = 4\pi i/c = 4\pi\mathcal{J}/(cl)$, d'où $\mathcal{J} = clH/(4\pi)$. En notant S l'aire de la section droite du solénoïde $\Phi = BS$ et par suite

$$dW_m = \frac{\mathcal{J}}{c}\, d\Phi = \frac{1}{4\pi}\, lSH\, dB = \frac{V}{4\pi}\,(H\, dB)$$

($V = Sl$ est le volume du solénoïde). En notant w_m l'énergie magnétique par unité de volume du solénoïde on peut écrire sa différentielle sous la forme

$$dw_m = \frac{1}{4\pi}\,(H\, dB). \tag{70.1}$$

Dans le cas général de courants continus circulant de façon arbitraire dans l'espace on peut démontrer que l'énergie magnétique peut s'écrire

$$W_m = \int w_m\, dV, \tag{70.2}$$

où w_m est donné par la formule (70.1). C'est là une question purement mathématique analogue à la question correspondante en électrosta-

tique. En omettant les transformations mathématiques nous n'examinerons que la signification physique de la formule (70.2). On peut l'interpréter en disant que *l'énergie magnétique est localisée dans l'espace avec une densité spatiale* w_m. Cette interprétation cadre bien avec les conceptions de la théorie des champs. En restant dans le cadre de la théorie des courants continus et des champs magnétiques permanents on ne peut concevoir aucune expérience qui permettrait de se prononcer en faveur de l'une des deux conceptions sur la localisation spatiale de l'énergie magnétique : celle de l'action directe à distance et celle de la théorie des champs. La situation est exactement la même qu'en électrostatique. Seule l'étude des phénomènes dans des champs rapidement variables, par exemple l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques, permet de fixer le choix de la conception adéquate. Ces phénomènes ne cadrent qu'avec la conception de la théorie des champs sur la localisation spatiale de l'énergie magnétique. Dans le cas de champs rapidement variables la formule (69.3) est dénuée de sens.

Pour les milieux para- et diamagnétiques $B = \mu H$ et l'expression (70.1) devient intégrable. On obtient alors

$$w_m = \frac{1}{8\pi}\mu H^2 = \frac{1}{8\pi} HB = \frac{B^2}{8\pi\mu}. \tag{70.3}$$

2. Nous allons donner maintenant la démonstration mathématique de la formule (70.2). Nous verrons qu'il suffit de considérer le champ magnétique d'une seule spire, la généralisation du résultat au cas d'un grand nombre de spires étant triviale et ne présentant aucune difficulté. En supposant que la spire est fixe et en posant dans la formule (69.2) $d\Phi = \int\limits_S dB\, dS$, on obtient

$$dW_m = \frac{\mathcal{J}}{c}\int\limits_S dB\, dS,$$

l'intégration étant étendue à n'importe quelle surface limitée par le contour de courant l. Les transformations ultérieures sont fondées sur la notion de potentiel-vecteur. On démontre (voir problèmes 1 et 2 ci-après) que tout vecteur dont la divergence est nulle peut être représenté par le rotor d'un autre vecteur. Comme div $B = 0$ on peut écrire

$$B = \operatorname{rot} A. \tag{70.4}$$

Le vecteur A est le *potentiel-vecteur* du champ magnétique. Il résulte de la formule (70.4) que $dB = \operatorname{rot} dA$. En utilisant cette relation et le théorème de Stokes on obtient

$$dW_m = \frac{\mathcal{J}}{c}\int\limits_S dS \operatorname{rot} dA = \frac{\mathcal{J}}{c}\oint\limits_l (dl\, dA).$$

Remplaçons l'élément linéique du courant par l'élément spatial $j\, dV = \mathcal{J} dl$ et appliquons le théorème de la circulation $\operatorname{rot} H = 4\pi j/c$; on trouve ainsi

$$dW_m = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V (dA \operatorname{rot} H)\, dV,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace où circule le courant. En utilisant une identité connue de l'analyse vectorielle (cf. problème n° 3 ci-après) on transforme la quantité sous le signe d'intégration comme suit:

$$dA \text{ rot } H = \text{div } [H\, dA] + H \text{ rot } dA = \text{div } [H\, dA] + H\, dB.$$

L'intégrale de la divergence peut être transformée en intégrale de surface en prenant pour surface d'intégration une surface se trouvant à l'infini. Si tous les courants circulent dans une région finie de l'espace le champ magnétique décroît à l'infini à un taux suffisant et l'intégrale concernée s'annule.

On arrive ainsi au résultat suivant:

$$dW_m = \frac{1}{4\pi} \int_V (H\, dB)\, dV.$$

Après intégration sur dB on trouve

$$W_m = \int w_m\, dV \text{ avec } w_m = \frac{1}{4\pi} \int H\, dB.$$

PROBLÈMES

1. Démontrer que pour tout vecteur A est vérifiée la relation div rot $A = 0$.

2. Démontrer que si div $B = 0$ on peut représenter le vecteur B sous la forme $B = \text{rot } A$.

Solution. Le théorème affirme que l'équation rot $A = B$, où B est un vecteur donné et A le vecteur inconnu, possède une solution. Démontrons, par exemple, qu'il existe une solution telle que $A_z = 0$. Dans ce cas l'équation ci-dessus se ramène à un système de trois équations scalaires:

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = -B_x, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = B_y, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_z.$$

Les deux premières équations sont vérifiées en posant

$$A_y = -\int_{z_0}^{z} B_x\, dz + f(x, y), \quad A_x = \int_{z_0}^{z} B_y\, dz,$$

où $f(x, y)$ est une fonction quelconque. En portant cette solution dans la troisième équation et en remarquant que $\partial B_x/\partial x + \partial B_y/\partial y = -(\partial B_z/\partial z)$ on trouve

$$\int_{z_0}^{z} \frac{\partial B_z}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial x} = B_z,$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x} = B_z(x, y, z_0)$$

et

$$f(x, y) = \int B_z(x, y, z_0)\, dx.$$

On a trouvé ainsi une des solutions de l'équation rot $A = B$, ce qui démontre le théorème. Notons que si div $B = 0$ cette équation a une infinité de solutions, ce qui signifie que le potentiel-vecteur est défini d'une façon non univoque.

3. Démontrer l'identité

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{AB}] = \boldsymbol{B}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}. \tag{70.5}$$

S o l u t i o n. On peut vérifier directement cette identité en l'écrivant en coordonnées rectangulaires. Mais les calculs sont plus simples et plus concrets lorsqu'on utilise la méthode symbolique. En vertu des définitions du produit vectoriel et de la divergence

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{AB}] = \operatorname{div}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

En permutant la première ligne d'abord avec la deuxième puis avec la troisième tout en respectant la règle des signes on obtient deux nouveaux déterminants:

$$-\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \text{ et } +\begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Ces deux déterminants ne sont cependant pas égaux au déterminant primitif étant donné qu'à ce dernier la règle usuelle de permutation des lignes ne s'applique pas puisque la première ligne est composée d'opérateurs et non de nombres. En appliquant la règle de dérivation des produits on constate que la somme des déterminants obtenus par permutation est égale au déterminant initial, i.e.

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{AB}] = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Il est évident que cette relation peut être récrite comme suit:

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{AB}] = \boldsymbol{B}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} - \boldsymbol{A}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

ou

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{AB}] = \boldsymbol{B}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}.$$

§ 71. Théorème de la conservation du flux magnétique

Considérons une spire parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique permanent ou variable. Cette spire peut s'y déplacer et s'y déformer de façon quelconque, ce qui fait apparaître le courant induit

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}^{\text{ind}}}{R} = -\frac{1}{cR}\frac{d\Phi}{dt}.$$

Si la résistance ohmique R est égale à zéro on doit avoir $\mathcal{E}^{\text{ind}} = 0$ car autrement le conducteur serait parcouru par un courant d'inten-

sité infinie, chose qui est physiquement impossible. Il s'ensuit que l'on doit avoir $d\Phi/dt = 0$ et $\Phi = \text{const}$. Ainsi *lorsqu'un fil fermé parfaitement conducteur se meut dans un champ magnétique le flux magnétique embrassé par ce contour reste constant.* Cette proposition exprime le *théorème de la conservation du flux magnétique.* Cette conservation résulte de l'existence de courants induits qui, selon la loi de Lenz, s'opposent à toute variation du flux magnétique embrassé par le contour. Le flux magnétique créé par un champ magnétique extérieur ne reste pas constant dans le temps tout comme le flux magnétique créé par les courants induits. Mais la somme de ces deux flux reste toujours constante.

Considérons un fluide parfaitement conducteur en mouvement dans un champ magnétique. Délimitons dans ce fluide un contour fermé arbitraire, i.e. un contour qui se déplace avec les particules du fluide. Un tel contour peut se comporter comme un fil parfaitement conducteur et on peut lui appliquer le théorème de la conservation du flux magnétique. Il résulte de ce théorème que *quels que soient les mouvements d'un fluide parfaitement conducteur le flux magnétique embrassé par tout contour fermé du fluide reste constant dans le temps.* Un fluide parfaitement conducteur peut s'écouler librement le long des tubes de force magnétiques. Mais tout mouvement transversal par rapport au champ magnétique doit entraîner les tubes de force magnétiques. Tout se passe comme si les tubes de force magnétiques étaient emprisonnés dans la substance et ne pouvaient se déplacer qu'avec celle-ci. Cette conception de l'emprisonnement (ou de blocage) des tubes de force magnétiques trouve de nombreuses applications en magnétohydrodynamique lorsqu'on étudie les mouvements des liquides de grande conductibilité électrique. On l'utilise aussi en astrophysique et en physique du plasma chaud puisque ce dernier présente aussi une grande conductibilité électrique (cf. § 121).

PROBLÈMES

1. On peut créer un champ magnétique de très grande intensité en comprimant par explosion un segment d'un tube conducteur cylindrique où on avait préalablement créé un champ magnétique B_0. Calculer le champ magnétique B dans le tube à l'instant de la compression maximale sachant que $B_0 = 5 \cdot 10^4$ G, que le rayon interne initial du tube $R = 5$ cm et que le rayon du tube à l'instant de la plus forte compression $r = 0{,}5$ cm. Poser que l'enceinte contenant le champ magnétique est parfaitement conductrice. Calculer aussi la pression $\mathcal{P}$ requise pour réaliser cette compression.

Réponse. $B = B_0 (R/r)^2 = 5 \cdot 10^6$ G, $\mathcal{P} = B^2/(8\pi) \approx 10^{12}$ dynes/cm^2 = $= 10^6$ atm.

2. Un solénoïde parfaitement conducteur de longueur l_0 est parcouru, après avoir été débranché de la source de tension, par un courant continu $\mathcal{J}_0$. Quelle sera la variation du courant $\mathcal{J}$ dans le solénoïde lorsqu'on soumettra celui-ci à des tractions et à des compressions?

Réponse. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 l/l_0$, l étant la longueur instantanée du solénoïde.

§ 72. L'énergie et les forces

1. La méthode la plus générale de calcul des forces d'intéraction de fils conducteurs parcourus par des courants, ainsi que des tensions et des pressions qui se manifestent dans un milieu soumis à l'action d'un champ magnétique, est la *méthode énergétique*. Cette méthode utilise la formule de l'énergie libre du champ magnétique. Tout comme l'énergie libre les forces dont il est question dépendent de l'*intensité* et de la *configuration des courants* mais elles sont indépendantes, toutes choses égales d'ailleurs, de la résistivité des conducteurs. On peut donc simplifier les calculs en négligeant la résistance des conducteurs et les pertes d'énergie par effet Joule. En général le système considéré soumis à des forces internes ne sera pas en équilibre et se mettra en mouvement. Pour empêcher tout déplacement du système on y appliquera des forces extérieures équilibrant les forces internes. Si on perturbe d'infiniment peu l'état d'équilibre du système on détermine l'évolution d'une transformation infiniment lente (quasi statique) s'accompagnant de déplacements et de déformations des conducteurs et du milieu ambiant. Comme dans toute autre transformation quasi statique il n'y aura pas d'énergie cinétique en jeu. Nous maintiendrons constante la température du système pendant la transformation afin que le travail des forces extérieures δA^{ext} serve à accroître l'énergie libre du système. Nous supposerons aussi que le milieu entourant les conducteurs est isotrope, i.e. liquide ou gazeux. Nous avons démontré en électrostatique (§ 33, pt. 5) que dans le cas de champs magnétiques statiques ou lentement variables la composante élastique de l'énergie libre devait être compensée par des termes contenant les dérivées de la perméabilité magnétique par rapport à la densité du milieu. Il s'ensuit que dans le calcul des forces on peut rejeter la composante élastique de l'énergie libre à condition qu'on ne tienne pas compte de la variation de la perméabilité magnétique μ avec la densité du milieu. C'est ce que nous ferons dans nos calculs. Rejetant la composante élastique de l'énergie libre nous écrirons $\delta A^{ext} = \delta W_m$ et comme pour les transformations quasi statiques $\delta A^{ext} = -\delta A$, δA étant le travail élémentaire des forces internes, on obtient

$$\delta A = -[\delta W_m]_{\Phi=\text{const}}. \tag{72.1}$$

Nous avons supposé que les conducteurs étaient parfaits, ce qui implique que les flux magnétiques qu'ils embrassent *restent constants*. Nous avons explicitement noté ce fait dans la formule (72.1). Cette formule reste cependant valable dans le cas de conducteurs présentant une *résistance ohmique finie* puisque les forces d'interaction et le champ magnétique dans le milieu ambiant ne dépendent explicitement que de l'intensité et de la répartition des courants dans les

conducteurs, mais *sont indépendants de leur résistance électrique.* Par conséquent, si au cours d'une transformation quasi statique d'un système de conducteurs réels on maintenait, d'une façon quelconque, les flux magnétiques Φ constants, le travail δA serait le même que dans le cas de conducteurs parfaits. La seule différence réside en ce que dans le cas de conducteurs parfaits le flux magnétique se conserve de façon spontanée tandis que dans le cas de conducteurs de résistance ohmique finie on assure cette conservation du flux par des procédés adéquats. Cette circonstance n'affecte en rien le calcul des forces d'interaction.

2. La formule (72.1) est la formule *fondamentale* de la méthode énergétique de calcul des forces dans un champ magnétique. Mais dans certains cas il est plus commode d'utiliser une autre formule qui suppose que la variation de l'énergie magnétique W_m est assurée en maintenant constantes les *intensités des courants* dans les conducteurs. Nous allons établir cette formule.

Pour maintenir constantes les intensités des courants dans toutes les spires nous introduisons des forces électromotrices extérieures $\mathscr{E}_i^{\text{ext}}$, susceptibles d'équilibrer, à tout instant, les forces électromotrices d'induction qui apparaissent au cours de la transformation quasi statique. On doit donc avoir $\mathscr{E}_i^{\text{ext}} = -\mathscr{E}_i^{\text{ind}} = \frac{1}{c}\frac{d\Phi_i}{dt}$. Le travail de ces forces électromotrices extérieures

$$\delta A^{\text{ext}} = \frac{1}{c}\sum \frac{d\Phi_i}{dt}\,\mathcal{J}_i\,dt = \frac{1}{c}\sum \mathcal{J}_i\,d\Phi_i$$

sera utilisé pour produire le travail δA du système et pour accroître l'énergie magnétique :

$$\delta A + \delta W_m = \frac{1}{c}\sum \mathcal{J}_i\,d\Phi_i.$$

(Nous raisonnons ici comme si les conducteurs étaient parfaits.) Mais si les courants sont artificiellement maintenus constants la variation de l'énergie magnétique s'exprimera de la façon suivante :

$$\delta W_m = \delta\left(\frac{1}{2c}\sum \mathcal{J}_i\Phi_i\right) = \frac{1}{2c}\sum \mathcal{J}_i\,\delta\Phi_i.$$

En portant cette dernière expression dans la formule précédente nous obtenons

$$\delta A = [\delta W_m]_{\mathcal{J}=\text{const}}, \tag{72.2}$$

où la variation de l'énergie magnétique est réalisée à intensité de courant constante. C'est la *deuxième formule fondamentale* de la méthode énergétique de calcul des forces d'interaction.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples d'application des formules (72.1) et (72.2).

3. *Interaction magnétique de deux courants continus fermés placés dans un milieu homogène.* L'énergie magnétique de deux spires parcourues par des courants est donnée par

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} \mathcal{J}_1^2 + L_{12} \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 + \frac{1}{2} L_{22} \mathcal{J}_2^2.$$

Utilisons la formule (72.2). Si on déplace les spires 1 et 2 de façon arbitraire mais sans les déformer, du fait de l'homogénéité du milieu, les coefficients de self-inductance L_{11} et L_{22} resteront constants. Si de plus on maintient constants les courants dans les spires le seul terme variable dans l'expression de W_m sera le terme $L_{12} \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2$, de sorte que

$$[\delta W_m]_{\mathcal{J}=\text{const}} = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 \, \delta L_{12}. \tag{72.3}$$

En maintenant fixe la spire 2 déplaçons la spire 1 toute entière d'une distance $\delta \boldsymbol{r}_1$. Le travail élémentaire que produira alors le système sera $\delta A = \boldsymbol{F}_1 \delta \boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{F}_1$ étant la résultante des forces d'Ampère appliquées à la spire 1. D'après la formule (72.2) $\boldsymbol{F}_1 \delta \boldsymbol{r}_1 = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 \delta L_{12}$. Déplaçons maintenant la spire 2 d'une distance $\delta \boldsymbol{r}_2 = -\delta \boldsymbol{r}_1$, la spire 1 étant fixe. La variation du coefficient d'inductance mutuelle sera la même que dans le cas précédent puisque ce coefficient ne dépend que de la position relative des spires. Ainsi $\boldsymbol{F}_2 \delta \boldsymbol{r}_2 = \mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 \delta L_{12}$, et $\boldsymbol{F}_1 \delta \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{F}_2 \delta \boldsymbol{r}_2$, soit $\boldsymbol{F}_1 \delta \boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{F}_2 \delta \boldsymbol{r}_1$. Les déplacements $\delta \boldsymbol{r}_1$ étant arbitraires $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$. En faisant tourner l'une des spires par rapport à l'autre on démontre de même que $\boldsymbol{M}_1 = -\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_1$ et $\boldsymbol{M}_2$ étant les moments des forces d'Ampère s'exerçant sur les spires. Nous voyons ainsi que l'interaction magnétique des courants continus fermés vérifie le principe d'égalité de l'action et de la réaction.

4. Puisque le coefficient d'inductance mutuelle L_{12} est proportionnel à la perméabilité magnétique μ du milieu intermédiaire les raisonnements ci-dessus permettent de conclure que *les forces d'interaction des conducteurs immergés dans un milieu homogène sont proportionnelles à sa perméabilité magnétique.* A intensités de courant constantes la force d'interaction des conducteurs dans le vide augmentera de μ fois si on remplit tout l'espace d'un milieu homogène de perméabilité magnétique μ.

5. *Forces s'exerçant sur la surface de séparation de deux substances magnétiques.* Considérons d'abord le cas où le champ magnétique est normal à la surface de séparation. Pour réaliser ce cas on utilisera un solénoïde de grande longueur dont une moitié est occupée par une substance de perméabilité magnétique μ_1 et l'autre est occupée par une substance de perméabilité magnétique μ_2. La surface de séparation de ces deux substances magnétiques est contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe du solénoïde (fig. 185). On peut ajuster les courants circulant sur la surface latérale du solénoïde de

façon que le champ B à l'intérieur du solénoïde, loin de ses bords, soit uniforme. L'espace à l'extérieur du solénoïde doit être rempli de substances magnétiques adéquates afin que celles-ci puissent librement entrer dans le solénoïde et en sortir. Dans le calcul de l'énergie magnétique on peut négliger les effets de bord puisque dans le calcul des forces ce n'est pas l'énergie elle-même qui compte mais ses variations résultant des déplacements de la surface de séparation des milieux magnétiques. Si le solénoïde est long, ces variations ne sont pas affectées par l'inhomogénéité du champ près des bords. Pour calculer la force F s'exerçant sur la surface de séparation de deux substances magnétiques, déplaçons cette surface vers la droite de δx. Le système fournit alors le travail $F\delta x$. Réalisons ce

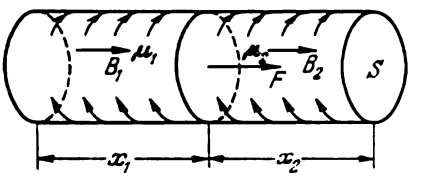


Fig. 185

déplacement en maintenant constant le flux magnétique embrassé par le solénoïde, ce qui revient à maintenir constante l'induction B. D'après la formule (72.1) $F\delta x = -[\delta W_m]_{B=\text{const}}$. Lors du déplacement δx la substance de perméabilité μ_1 pénètre dans le solénoïde et son volume à l'intérieur du solénoïde augmente de $S\,\delta x$, S étant l'aire de la section droite du solénoïde. De ce fait l'énergie magnétique du système augmente de $Sw_1\delta x$. Le même volume de la substance de perméabilité μ_2 sort du solénoïde et emporte une énergie $Sw_2\delta x$. L'énergie du champ magnétique à l'extérieur du solénoïde et près de ses bords restera constante. Ainsi l'augmentation de l'énergie magnétique du système est égale à $\delta W_m = S\,(w_1 - w_2)\,\delta x$, où w_1 et w_2 sont les densités d'énergie magnétique des deux côtés de la surface de séparation. En égalant cette quantité à $-F\delta x$ on trouve

$$F = S\,(w_2 - w_1). \tag{72.4}$$

Nous avons adopté pour sens positif le sens allant de gauche à droite, i.e. le sens allant de la première substance à la seconde. Aussi peut-on interpréter l'expression (72.4) comme une *différence des tensions* appliquées par les deux substances à leur surface de séparation. La tension par unité de surface est égale à la densité d'énergie magnétique. Comme B = const

$$F = S\frac{B^2}{8\pi}\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right) = \frac{S}{8\pi}(\mu_2 H_2^2 - \mu_1 H_1^2). \tag{72.5}$$

La force F est positive si $\mu_1 > \mu_2$ et négative si $\mu_1 < \mu_2$. Dans les deux cas la force est orientée de la substance de plus grande perméabilité magnétique vers la substance de perméabilité magnétique plus petite.

Considérons maintenant le cas où le champ magnétique est parallèle à la surface de séparation des deux substances magnétiques. Il est commode d'utiliser ici un solénoïde de section droite rectangulaire sur la surface latérale duquel circule un courant normal à son axe (fig. 186). L'espace à l'intérieur du solénoïde est rempli

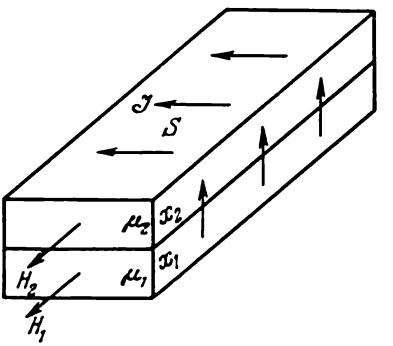


Fig. 186

de deux substances magnétiques dont la surface de séparation est contenue dans un plan parallèle à l'une des faces latérales du solénoïde. On raisonnera comme dans le cas précédent mais il est commode d'utiliser ici la formule (72.2) et d'y faire varier l'énergie W_m à champ H constant. Comme les formules (72.1) et (72.2) diffèrent par le signe on aboutit à l'expression

$$F = S\,(w_1 - w_2) \tag{72.6}$$

qui est de signe contraire à (72.4). Cette force peut être interprétée comme la *différence des pressions* appliquées à la surface de séparation par les deux substances. La valeur de chaque pression est égale à la densité d'énergie magnétique dans le milieu concerné. Comme le champ H est tangent à la surface de séparation il a même valeur dans les deux substances magnétiques. On peut donc écrire

$$F = S\,\frac{H^2}{8\pi}\,(\mu_1 - \mu_2) = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{B_1^2}{\mu_1} - \frac{B_2^2}{\mu_2}\right). \tag{72.7}$$

La force F est positive pour $\mu_1 > \mu_2$ et négative pour $\mu_1 < \mu_2$. Comme dans le cas précédent cette force est dirigée de la substance de plus grande perméabilité magnétique vers la substance de plus petite perméabilité magnétique.

6. Dans le cas où le champ magnétique et la densité du milieu ne sont pas uniformes et sont des fonctions continues des coordonnées, le calcul des forces s'exerçant sur le milieu placé dans un champ magnétique s'effectue de façon analogue au procédé mis en œuvre en électrostatique (cf. § 34). Nous omettrons de faire ce calcul mais nous en donnerons le résultat. Les forces mécaniques s'exerçant dans un champ magnétique se ramènent à une tension T dirigée suivant le champ et à une pression $\mathcal{P}$ appliquée suivant une direction rectangulaire à celle du champ. La tension et la pression rapportées à l'unité de surface sur laquelle elles s'exercent sont numériquement égales entre elles et égales à la densité d'énergie magnétique dans le milieu :

$$T = \mathcal{P} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{HB}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu}. \qquad (72.8)$$

7. Plaçons une des branches d'un tube en U contenant une solution de chlorure de fer dans l'entrefer d'un électroaimant (fig. 187). Lorsqu'on excite l'électroaimant le liquide contenu dans cette branche monte : la solution de chlorure de fer étant un paramagnétique est attirée vers la région où le champ magnétique est le plus fort. Un diamagnétique est au contraire repoussé par le champ magnétique. Par exemple le bismuth est une substance fortement diamagnétique. Un morceau de bismuth placé dans l'entrefer d'un électroaimant en est éjecté dès qu'on fait passer un courant dans le bobinage de l'électroaimant. La flamme d'une bougie se comporte de même (le gaz carbonique est diamagnétique). Il est évident que ces effets ne se manifestent que dans des champs non uniformes puisque dans un champ uniforme la force résultante appliquée au corps est nulle.

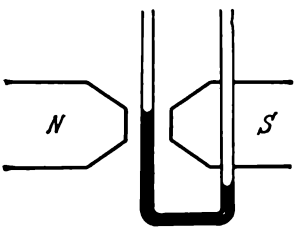


Fig. 187

Les corps de forme allongée, des tiges par exemple, suspendus à des fils s'orientent parallèlement au champ magnétique s'ils sont paramagnétiques et perpendiculairement au champ s'ils sont diamagnétiques. Une tige de bismuth se place transversalement au champ magnétique même si ce champ est uniforme. Cet effet s'explique par les tensions et les pressions magnétiques s'exerçant sur les extrémités des corps magnétiques. Le caractère de l'effet ne dépend que de la différence des perméabilités magnétiques de la substance magnétique et du milieu environnant. Dans l'air une ampoule remplie de solution de chlorure de fer cherche à s'aligner suivant le champ magnétique mais si on l'immerge dans une solution de chlorure de fer plus concentrée elle se placera perpendiculairement au champ.

§ 73. Thermodynamique des substances magnétiques

1. Les propriétés thermodynamiques des substances magnétiques sont semblables à celles des substances diélectriques que nous avons déctrites au paragraphe 31. Les résultats que nous y avons obtenus peuvent être transposés au cas des substances magnétiques à condition de remplacer l'expression du travail élémentaire $-\frac{1}{4\pi}EdD$ par $-\frac{1}{4\pi}HdB$. En faisant les mêmes hypothèses que celles que nous avons utilisées au paragraphe 31 nous obtenons les équations fondamentales de la thermodynamiques des substances magnétiques:

$$\delta Q = dU - \frac{1}{4\pi} H\, dB, \tag{73.1}$$

$$dU = T\, dS + \frac{1}{4\pi} H\, dB, \tag{73.2}$$

$$d\Psi = -S\, dT + \frac{1}{4\pi} H\, dB, \tag{73.3}$$

$$d\Phi = -S\, dT - \frac{1}{4\pi} B\, dH, \tag{73.4}$$

$$dI = T\, dS - \frac{1}{4\pi} B\, dH. \tag{73.5}$$

Le rôle de l'équation d'état est assumé ici par la relation $B = f(H, T, \tau)$. En l'utilisant on obtient l'expression suivante de l'énergie libre

$$\Psi = \frac{1}{4\pi} \int H\, dB + \Psi_0(T, \tau), \tag{73.6}$$

où Ψ_0 est la valeur de l'énergie libre en l'absence de champ magnétique. (Pour intégrer (73.6) on maintient constantes la température T et la densité τ de la substance magnétique.) Dans le cas particulier où $B = \mu H$

$$\Psi = \frac{\mu H^2}{8\pi} + \Psi_0 = \frac{B^2}{8\pi\mu} + \Psi_0. \tag{73.7}$$

L'énergie interne de la substance magnétique est définie par

$$U = \left(\mu + T\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)\frac{H^2}{8\pi} + U_0(T, \tau) \tag{73.8}$$

ou

$$U = \left(1 + \frac{T}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)\frac{B^2}{8\pi\mu} + U_0(T, \tau), \tag{73.9}$$

où la dérivée $\partial\mu/\partial T$ est prise avec $\tau = \text{const}$.

2. Si on fait varier l'aimantation I de façon quasi statique et adiabatique, la température de la substance magnétique doit, en

général, varier (*effet magnétocalorique*). On calcule la variation de température en posant que l'entropie S est constante. En considérant que l'entropie est fonction de B et de T (τ est maintenu constant) on a

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B dT + \left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T dB = 0.$$

Introduisons la capacité calorifique de l'unité de volume de la substance magnétique à induction constante: $c_B = T\,(\partial S/\partial T)_B$ et utilisons la relation $(\partial S/\partial B)_T = \frac{1}{4\pi}(\partial H/\partial T)_B$ qui se déduit de (73.3). On obtient ainsi

$$dT = \frac{TB}{4\pi c_B}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mu}\right) dB = -\frac{TB}{4\pi\mu^2 c_B}\frac{d\mu}{dT}\,dB$$

ou

$$dT = -\frac{TB}{\mu^2 c_B}\frac{d\varkappa}{dT}\,dB. \tag{73.10}$$

Si on considère S comme une fonction de H et de T on obtient par le même procédé le résultat suivant:

$$dT = -\frac{TH}{c_H}\frac{d\varkappa}{dT}\,dH, \tag{73.11}$$

où c_H est la capacité calorifique de l'unité de volume de la substance magnétique à intensité de champ magnétique H constante (cf. § 31).

3. Appliquons la formule (73.11) à une substance paramagnétique et utilisons la loi de Curie selon laquelle la susceptibilité magnétique des paramagnétiques est inversement proportionnelle à la température absolue (cf. § 77): $\varkappa = \text{const}/T$. On en tire $d\varkappa/dT = -\varkappa/T$ et par suite

$$dT = \frac{\varkappa}{c_H} H\,dH.$$

Cette formule montre que les paramagnétiques se refroidissent lorsqu'on les désaimantent dans des conditions adiabatiques réversibles. Négligeons la dépendance de c_H avec l'intensité du champ magnétique. Si la valeur initiale du champ magnétique est H et sa valeur finale est égale à 0, la variation de la température de la substance sera d'après la dernière formule

$$\Delta T = -\frac{\varkappa H^2}{2c_H}. \tag{73.12}$$

A titre d'exemple évaluons l'effet pour un gaz paramagnétique vérifiant la théorie classique des capacités calorifiques. Puisque nous négligeons la variation de c_H avec H, on doit considérer c_H

comme la capacité calorifique à volume constant. Soit f le nombre de degrés de liberté d'une molécule de gaz parfait. D'après la théorie classique la capacité calorifique molaire à volume constant est $C_V = fR/2$, où R est la constante des gaz. En divisant par le volume molaire $V = RT/\mathcal{P}$ on trouve $c_H = f\mathcal{P}/(2T)$ et par suite

$$\Delta T = -\frac{\varkappa H^2}{f\mathcal{P}} T. \tag{73.13}$$

Pour l'oxygène ($f = 5$) dans les conditions normales ($T = 293$ K, $\mathcal{P} = 10^6$ dynes/cm^2) $\varkappa = 0{,}16 \cdot 10^{-6}$. En posant dans (73.13) $H = 3 \cdot 10^4$ G on obtient dans ces conditions $\Delta T = -0{,}007$ K, autrement dit un abaissement de température est négligeable.

Cependant à mesure que l'on s'approche du zéro absolu de température la capacité calorifique tend rapidement vers 0 de sorte que l'abaissement de température ΔT peut devenir important. (A proximité immédiate du zéro absolu la loi de Curie cesse d'être vérifiée.) C'est pour cette raison que Debye et indépendamment de lui Giauque ont suggéré de mettre en œuvre la désaimantation des substances magnétiques à proximité du zéro absolu en la réalisant de façon réversible et adiabatique. Ce principe est à la base du principal procédé d'obtention de températures extra-basses. Le plus souvent on utilise pour cela des sels paramagnétiques tels les aluns renfermant des ions des métaux de transition du groupe du fer. Le sel paramagnétique placé dans un puissant champ magnétique est préalablement refroidi jusqu'à la température de l'hélium liquide après quoi on supprime le champ magnétique. C'est par ce procédé que de Haas et Wiersma ont atteint la température de $3 \cdot 10^{-3}$ K. On peut obtenir un refroidissement encore plus intense en remplaçant les paramagnétiques électroniques par des paramagnétiques « nucléaires », i.e. des substances dont le paramagnétique est déterminé par un alignement des moments magnétiques des noyaux atomiques. Par ce procédé Simon et ses collaborateurs ont atteint en 1956 une température de 10^{-5} K.

§ 74. Le ferromagnétisme

1. D'après leurs propriétés magnétiques toutes les substances peuvent être classées en substances *faiblement magnétiques* et en substances *fortement magnétiques*. Sont faiblement magnétiques les substances *para-* et *diamagnétiques*; sont fortement magnétiques les substances *ferromagnétiques*, *antiferromagnétiques* et *ferrimagnétiques*. Les substances para- et diamagnétiques ne sont jamais aimantées en l'absence d'un champ magnétique extérieur et sont caractérisées par l'existence d'une relation univoque entre le vecteur aimantation I et l'intensité H du champ magnétique statique. Dans les champs magnétiques faibles cette relation est linéaire: $I = \varkappa H$, où $\varkappa > 0$

pour les paramagnétiques et $\varkappa < 0$ pour les diamagnétiques. Dans les paragraphes précédents nous avons donné une interprétation phénoménologique des propriétés magnétiques des substances para- et diamagnétiques. On n'observe des propriétés magnétiques fortes que pour certaines substances à l'état solide, satisfaisant à la condition nécessaire (mais non suffisante) suivante: le réseau cristallin doit contenir des atomes avec des couches électroniques internes incomplètes. Nous donnerons au paragraphe 79 la définition des substances antiferromagnétiques et ferrimagnétiques tandis que dans ce qui suit nous exposerons une théorie phénoménologique des propriétés des substances ferromagnétiques.

2. On appelle substances *ferromagnétiques* les corps solides pouvant présenter une *aimantation spontanée*, i.e. des corps pouvant

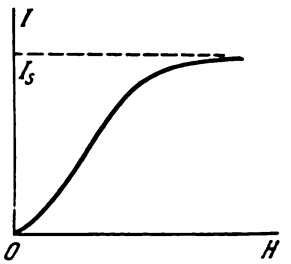


Fig. 188

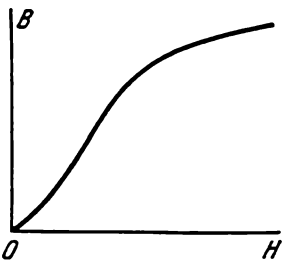


Fig. 189

être aimantés même en l'absence de tout champ magnétique extérieur. De ce point de vue ils ressemblent aux substances ferroélectriques. Sont typiquement ferromagnétiques les métaux de transition: fer, cobalt et nickel ainsi que nombre de leurs alliages. Certains éléments du groupe des terres rares sont ferromagnétiques aux basses températures (gadolinium, terbium, dysprosium, holmium, erbium et thulium).

3. La propriété caractéristique des corps ferromagnétiques est l'existence d'une relation non linéaire compliquée entre I et H ou entre B et H; la première étude systématique de cette relation pour le fer a été effectuée par A. G. Stolétov (1839-1896). L'allure de cette dépendance est illustrée par les figures 188 et 189 (ces courbes ont été relevées pour un corps qui initialement n'était pas aimanté). A mesure que H augmente l'aimantation I croît d'abord rapidement, puis atteint progressivement une valeur pratiquement constante: $I = I_s$ (aimantation à saturation) et la courbe $I = I(H)$ se réduit alors à une droite horizontale. L'induction magnétique $B = H + 4\pi I$ croît également avec H et à la saturation $B = H + 4\pi I_s = H + \text{const}$, ce qui signifie que la courbe $B = B(H)$ se réduit à une droite inclinée à 45° par rapport à H et B (à condition que les

échelles de H et de B sur les axes de coordonnées soient les mêmes). Etant donné le caractère non linéaire de la relation entre I et H ainsi qu'entre B et H, ni la susceptibilité magnétique $\varkappa$, ni la perméabilité magnétique μ ne sont des grandeurs constantes. On peut toujours écrire $I = \varkappa H$, $B = \mu H$ mais on doit se rappeler que $\varkappa$ et μ sont alors des fonctions de l'intensité du champ H. Ces fonctions croissent d'abord avec H, passent par un maximum et, enfin, dans les champs forts où l'aimantation atteint à la saturation, la perméabilité μ tend vers l'unité (fig. 190) et la susceptibilité $\varkappa$ tend vers zéro. La

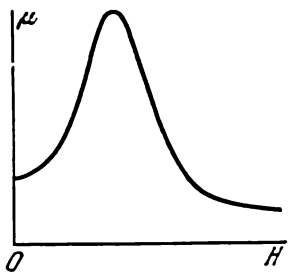


Fig. 190

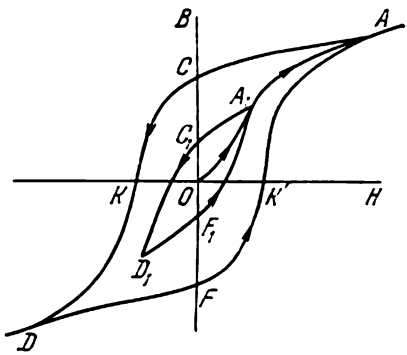


Fig. 191

valeur maximale de μ à la température ordinaire atteint pour la majorité des ferromagnétiques des valeurs allant de plusieurs centaines à plusieurs milliers d'unités ; pour des alliages spéciaux μ atteint un million d'unités. Les grandes valeurs de la perméabilité déterminent un grand nombre d'applications techniques des substances ferromagnétiques (par exemple dans les électroaimants). On doit remarquer cependant que par suite de l'effet de saturation de l'aimantation l'utilisation des noyaux ferromagnétiques ne sert à rien lorsqu'il s'agit de produire des champs magnétiques très intenses (supérieurs à $\sim 10^4$ G). Dans ce dernier cas les noyaux sont non seulement inutiles mais nuisibles car ils sont cause de pertes d'énergie supplémentaires. On produit des champs magnétiques très intenses à l'aide de bobinages sans noyaux ferromagnétiques en y envoyant des courants de très grande intensité.

Les propriétés magnétiques des monocristaux de corps ferromagnétiques sont anisotropes. Il existe dans tout monocristal une ou plusieurs directions le long desquelles la susceptibilité magnétique est plus grande (direction dite de facile aimantation). On y trouve également des directions d'aimantation difficile le long desquelles la susceptibilité magnétique est la plus petite. Mais dans le cas de corps polycristallins où les cristallites sont orientés de façon désordonnée

les propriétés magnétiques sont macroscopiquement isotropes. Les figures 188 et 189 se rapportent à des ferromagnétiques polycristallins isotropes.

4. La seconde particularité des corps ferromagnétiques est que les relations entre B et H ou entre I et H ne sont pas univoques et dépendent des aimantations précédentes de l'échantillon (c'est l'effet d'*hystérésis magnétique*). Prenons un échantillon d'un corps ferromagnétique à l'état désaimanté et commençons à l'aimanter en augmentant le champ magnétique de la valeur zéro à une certaine valeur H_1. La relation $B = B(H)$ se traduira alors par une courbe OA_1 (fig. 191). Diminuons maintenant H de la valeur $+H_1$ jusqu'à la valeur $-H_1$. L'expérience montre que la nouvelle courbe d'aimantation ne se superpose pas à la courbe A_1O mais passe plus haut suivant la courbe $A_1C_1D_1$. Si on fait varier encore une fois le champ de $-H_1$ à $+H_1$ la nouvelle courbe d'aimantation passera au-dessous des courbes précédentes mais aboutira au même point A_1. On obtient ainsi une boucle fermée $A_1C_1D_1F_1A_1$ que l'on appelle *cycle* (ou *boucle*) *d'hystérésis*. Si on trace la courbe de première aimantation OA_1 jusqu'au point A où l'aimantation arrive à saturation et que l'on répète l'expérience qui vient d'être décrite on obtient le *cycle d'hystérésis extérieur* $ACDFA$. On voit que pour $H = 0$, l'induction B ne devient pas nulle et correspond à la longueur du segment OC. A cette valeur de l'induction correspond l'aimantation rémanente $I = B/(4\pi) = OC/(4\pi)$. L'existence d'une aimantation rémanente détermine la possibilité de fabriquer des *aimants permanents*. Pour désaimanter l'échantillon on doit lui faire parcourir la courbe d'aimantation jusqu'au point K ou K'. A ces points correspond le champ magnétique $H_c = |OK|$ que l'on appelle *force coercitive*. Les valeurs de l'aimantation rémanente et de la force coercitive varient dans de larges limites pour différents matériaux ferromagnétiques. Le cycle d'hystérésis du fer doux est étroit (faible force coercitive), celui de l'acier et de tous les matériaux utilisés pour la fabrication d'aimants permanents est large (grande force coercitive). L'allure du cycle d'hystérésis reste la même si on porte en ordonnées l'aimantation I à la place de l'induction B.

Ces particularités du cycle d'hystérésis sont à la base d'un procédé pratique de désaimantation des corps ferromagnétiques (par exemple des montres accidentellement aimantées). On place le corps aimanté dans une bobine où l'on fait passer un courant alternatif. En diminuant progressivement l'amplitude du courant on fait parcourir au corps des cycles d'hystérésis décroissants (les cycles deviennent de plus en plus étroits) jusqu'à ce que soit atteint le point O où l'aimantation est nulle.

Dans les expériences de démonstration il est facile de faire apparaître les cycles d'hystérésis sur l'écran d'un oscillographe. On utilise pour cela le montage représenté sur la figure 192; on alimente le

circuit en courant alternatif. La bobine A contenant l'échantillon étudié qui a la forme d'un fil long ou d'un faisceau de fils est placée dans un champ magnétique variable qui aimante l'échantillon. L'intensité H du champ magnétique est proportionnelle à l'intensité J du courant traversant le bobinage de l'électroaimant. La tension prélevée sur la résistance R et appliquée aux plaques de déviation horizontale de l'oscillographe est proportionnelle à H. D'autre part

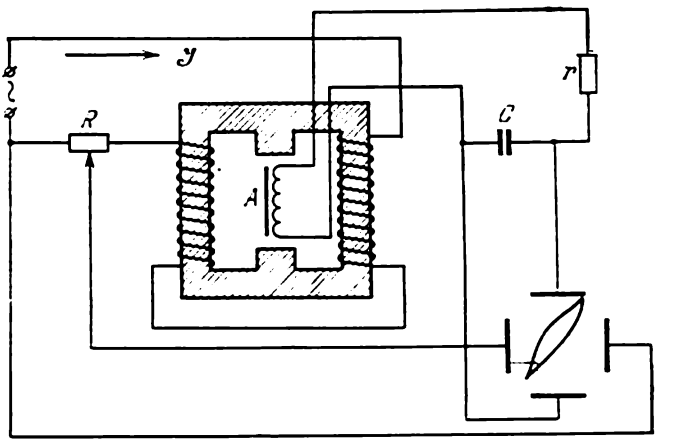


Fig. 192

la tension que l'on recueille aux bornes de la bobine A est proportionnelle à la dérivée dB/dt. Cette dernière tension est appliquée à l'entrée du circuit intégrateur CR (le fonctionnement de ce circuit est expliqué au paragraphe 122). Aux bornes du condensateur de ce circuit on recueille une tension proportionnelle à $\int \frac{dB}{dt}\,dt$, c'est-à-dire à B. On applique cette tension aux plaques de déviation verticale de l'oscillographe. Lorsqu'on branche un courant alternatif on voit apparaître sur l'écran de l'oscillographe un cycle d'hystérésis. Pour diminuer les effets de bord des échantillons il est recommandé d'utiliser des échantillons en forme de tore et de les placer dans une bobine toroïdale.

5. Du fait de l'hystérésis l'aimantation et la désaimantation des corps ferromagnétiques s'accompagnent d'un dégagement de chaleur appelé *chaleur d'hystérésis*. Pour une transformation quasi statique infiniment petite cette chaleur δQ est donnée par la formule (73.1). Intégrons cette expression sur un cycle d'hystérésis. L'intégrale de dU est alors égale à zéro puisque le corps ferromagnétique

après avoir parcouru un cycle revient à son état initial et son énergie interne U reprend sa valeur initiale. On obtient donc

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int H\,dB. \tag{74.1}$$

On voit que la chaleur d'hystérésis produite au cours d'un cycle d'aimantation est numériquement égale, au facteur $1/(4\pi)$ près, à l'aire de la boucle d'hystérésis.

Suspendons un petit cylindre d'acier à l'intérieur d'une bobine alimentée par le réseau urbain. Le cylindre subissant 50 réaimantations par seconde s'échauffera fortement au bout de quelques minutes. Pour démontrer que cet échauffement est dû à l'hystérésis et non aux courants de Foucault on remplacera le cylindre en fer par un cylindre en cuivre de mêmes dimensions. Comme la conductivité du cuivre est plus grande que celle du fer, les courants de Foucault y sont plus intenses. Néanmoins le cylindre en cuivre ne s'échauffe presque pas tandis que le cylindre en fer s'échauffe fortement.

6. Une troisième propriété caractéristique des substances ferromagnétiques est qu'il existe pour chacune d'elles une température $T = T_c$ que l'on appelle *température* ou *point de Curie*, au passage de laquelle la substance subit une transformation de phase de second ordre. La substance n'est ferromagnétique qu'au-dessous du point de Curie. Au-dessus de cette température la substance devient paramagnétique. A proximité du point de Curie la susceptibilité magnétique est donnée par la loi de Curie-Weiss:

$$\varkappa = \frac{C}{T - T_c}, \tag{74.2}$$

où C est une constante dont la valeur dépend de la substance.

La température de Curie du nickel est égale à 360 °C (633 K). Prenons une feuille de nickel et roulons-la. Suspendons le rouleau à proximité d'un aimant permanent. Il sera aussitôt attiré par l'aimant. Approchons du rouleau la flamme d'un brûleur Bunsen. Lorsque le nickel s'échauffe au-dessus du point de Curie le rouleau ne sera plus attiré par l'aimant, s'en écartera et ne se trouvera plus soumis à l'action de la flamme. Lorsqu'il se sera refroidi au-dessous du point de Curie il sera de nouveau attiré par l'aimant et se retrouvera soumis à l'action de la flamme, etc. Le rouleau de nickel pourra exécuter ces mouvements pendulaires tant que le brûleur Bunsen sera allumé.

Différentes autres propriétés des corps ferromagnétiques seront étudiées au paragraphe 79 consacré à la théorie du ferromagnétisme.

§ 75. Propriétés magnétiques des atomes

1. Avant d'exposer l'approche atomistique de l'étude des propriétés magnétiques des milieux matériels il importe de noter tout d'abord qu'une théorie classique conséquente ne saurait incorporer les phénomènes magnétiques. En s'appuyant sur les méthodes de la statistique classique, Bohr, en 1911, puis Van Leeuwen, en 1920, ont démontré de façon rigoureuse le théorème suivant. *Un système de particules portant des charges électriques (électrons, noyaux atomiques, etc.) placé dans un champ magnétique permanent et se trouvant dans un état d'équilibre thermodynamique ne saurait posséder un moment magnétique si ce système vérifiait rigoureusement les lois de la physique classique.* Un tel système ne pourrait être aimanté que lorsqu'il se trouverait dans un état hors d'équilibre et s'il passe à un état d'équilibre son aimantation devrait disparaître. En gros, la raison en est que le champ magnétique permanent exerce sur les particules chargées une force orthogonale à leur vitesse et ne peut donc modifier leurs énergies cinétiques. Une explication des propriétés magnétiques des substances doit s'appuyer sur les conceptions quantiques.

Néanmoins, Langevin (1872-1946) réussit dès 1905 à expliquer d'une façon satisfaisante la nature du paramagnétisme et du diamagnétisme sans faire appel aux conceptions quantiques. Cette réussite tient à ce que les théories classiques de l'aimantation utilisaient d'une façon implicite des conceptions quantiques et admettaient notamment que les particules chargées pouvaient former des édifices stables tels les atomes et les molécules. Or une théorie classique conséquente devrait pouvoir justifier non seulement l'aimantation mais encore l'existence des atomes eux-mêmes, chose que ne parvint à faire que la mécanique quantique. Comme la mécanique quantique ne sera abordée dans ce cours que plus tard nous utiliserons ici des *conceptions semi-classiques* pour expliquer le phénomène d'aimantation. Quoique insuffisante et non conséquente la théorie semi-classique permet de se faire une idée de la nature de ce phénomène.

2. Examinons d'abord, très brièvement, les propriétés magnétiques des atomes. Une étude détaillée de cette question sera donnée dans le tome V de notre cours consacré à la physique atomique. Dans le modèle simple de Bohr de l'atome d'hydrogène l'électron tourne autour du noyau sur une orbite circulaire. Notons e la charge de l'électron. L'électron qui tourne sur une orbite circulaire crée en moyenne un champ magnétique comme un courant électrique $\mathcal{J} = -e/T$, où $T = 2\pi r/v$ est la période de rotation de l'électron. De ce fait l'électron en rotation possède non seulement un moment cinétique $L = mrv$ mais aussi un moment magnétique $\mathfrak{M} = \mathcal{J}S/c = -erv/(2c)$. Le rapport de ces grandeurs est appelé *rapport gyromagnétique* qui dans le cas du modèle considéré vaut

$$\Gamma = \frac{\mathfrak{M}}{L} = -\frac{e}{2mc}. \tag{75.1}$$

On arrive au même résultat dans le cas où l'électron se meut sur une orbite elliptique et il reste valable pour les atomes à plusieurs électrons puisque le rapport e/m est le même pour tous les électrons.

Selon la théorie de Bohr le moment cinétique de l'atome est *quantifié*, i.e. ne peut prendre que des valeurs *discrètes* (ne peut varier de façon continue). Ne sont permises que les valeurs $L = n\hbar$, où n est un nombre entier pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, . . ., et $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ erg·s la constante de Planck divisée par 2π. (On l'appelle aussi constante de Planck et elle est plus commode en théorie.) Le moment magnétique est également quantifié selon la formule

$$\mathfrak{M} = -\frac{e\hbar}{2mc} n. \tag{75.2}$$

Il s'ensuit que la plus petite valeur du moment magnétique de l'atome est

$$\mathfrak{M}_B = \frac{e\hbar}{2mc} = 9{,}28 \cdot 10^{-21} \text{ erg/G}.$$

Cette grandeur joue le rôle d'atome du moment magnétique et s'appelle *magnéton de Bohr*.

3. La mécanique quantique a abandonné la conception du mouvement des électrons sur les orbites classiques et précisa les règles de quantification de la théorie de Bohr. Elle remplaça la notion de mouvement des électrons eux-mêmes par celle du mouvement d'une certaine grandeur ayant la signification de la *densité de probabilité* de localisation spatiale de l'électron. Une image classique et non adéquate de cette nouvelle notion est un nuage dans lequel la masse et la charge électrique correspondante sont reparties de façon continue dans l'espace avec une certaine densité. Il existe une série discrète d'*états* dits *stationnaires* pour lesquels ces grandeurs restent constantes dans le temps. Les valeurs quantifiées des grandeurs physiques se rapportent à ces états stationnaires. La formule classique du rapport gyromagnétique (75.1) est valable en mécanique quantique comme il est facile de s'en rendre compte en faisant appel à l'image classique du nuage électronique.

Dans la théorie de Bohr l'électron tournant sur une orbite ne devient équivalent à un courant électrique qu'après moyennage de ses positions successives sur l'orbite. En mécanique quantique où il n'y a plus d'orbites, l'électron de l'atome pris dans le sens classique serait analogue à un courant uniformément réparti autour du noyau.

Le modèle de Bohr exclut les états pour lesquels les moments cinétiques et magnétique des atomes seraient nuls, puisque alors l'électron devrait effectuer un mouvement radial qui le ferait entrer en collision avec le noyau. La mécanique quantique admet par contre des états pour lesquels la distribution de la probabilité de présence

de l'électron possède une *symétrie sphérique* autour du noyau. Dans ces états le moment cinétique orbital et le moment magnétique de l'électron sont rigoureusement nuls.

Enfin en mécanique quantique la formule $L = n\hbar$ caractérise non pas le moment cinétique total de l'électron dans l'atome mais la *projection* de ce vecteur sur une direction déterminée, celle du champ magnétique dans lequel se trouve placé l'atome. Ses deux autres projections n'ont pas de valeurs définies, chose qu'on ne peut concevoir dans le cadre du modèle classique.

4. En plus du moment orbital l'électron possède encore un *moment* cinétique *propre* ou *spin*. Dans les états stationnaires la projection du spin sur une direction donnée ne peut prendre que deux valeurs: $+\hbar/2$ et $-\hbar/2$. Au spin correspond un moment magnétique dont la projection sur une direction donnée est égale au magnéton de Bohr. De ce fait au spin est lié un rapport gyromagnétique $\Gamma = -e/(mc)$ deux fois plus grand que le rapport gyromagnétique orbital. Les moments mécanique et magnétique de tout atome, y compris les atomes à grand nombre d'électrons, se composent vectoriellement par addition des moments orbitaux et de spin. Il peut exister des états pour lesquels les moments mécaniques et magnétiques se compensent exactement, donc tels que le moment total de l'atome est nul.

§ 76. Le diamagnétisme

1. On observe des propriétés diamagnétiques dans le cas de substances composées d'atomes ne possédant pas de moment magnétique en l'absence de champ magnétique extérieur. En l'absence de champ magnétique extérieur l'électron de l'atome est soumis seulement à des forces émanant du noyau et des autres électrons. En présence d'un champ magnétique permanent $\boldsymbol{B}$ à ces forces vient s'ajouter la force $-\frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]$, où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse de l'électron. Voyons comment cette force modifie le mouvement d'un atome se trouvant dans un état stationnaire. Rapportons le mouvement à un référentiel animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de la direction du champ magnétique avec la vitesse angulaire Ω. Nous déterminerons la valeur de Ω plus loin et pour le moment nous admettrons qu'elle est petite devant la vitesse angulaire ω de la rotation de l'électron autour du noyau atomique. A cette condition on pourra négliger tous les termes de l'ordre de $(\Omega/\omega)^2$, i.e. tous les termes quadratiques en Ω. Dans un référentiel en rotation on doit ajouter aux forces déjà énumérées deux forces d'inertie: la force de Coriolis $2m\,[\boldsymbol{v}_{\text{rel}}\boldsymbol{\Omega}]$ et la force centrifuge. Nous négligerons cette dernière puisqu'elle est proportionnelle à Ω^2; d'autre part nous remplacerons dans l'expression de la force de Coriolis la vitesse relative de l'élec-

tron v_{rel} par sa vitesse absolue $v = v_{rel} + [\Omega r]$. Cette substitution est justifiée par le fait qu'elle ne fera varier la force de Coriolis que d'une quantité proportionnelle à Ω^2. Dans cette approximation la force de Coriolis est donnée par $2m\,[v\Omega]$. Donnons maintenant à Ω une valeur qui vérifie la condition $2m\,[v\Omega] - \frac{e}{c}\,[vB] = 0$, ce qui revient à poser

$$\Omega = \frac{e}{2mc}\,B. \tag{76.1}$$

Ainsi dans un référentiel en rotation aucune autre force ne s'exerçera sur l'électron. Il s'ensuit que dans ce référentiel l'atome se trouvera dans le même état stationnaire que celui qu'il avait dans un référentiel fixe en l'absence de champ magnétique. Si on rapporte à nouveau le mouvement à un référentiel fixe on arrive au résultat suivant. *La présence d'un champ magnétique permanent extérieur n'affecte pas le mouvement des électrons à l'intérieur de l'atome mais celui-ci acquiert un mouvement de rotation supplémentaire avec la vitesse angulaire* (76.1). Ce résultat exprime le *théorème de Larmor* (1857-1942) ; la grandeur Ω est la *fréquence de Larmor*.

Il nous reste à nous assurer que la condition $|\Omega| \ll |\omega|$ utilisée dans la démonstration est vérifiée. Cette condition peut s'écrire sous la forme suivante:

$$B \ll \left|\frac{2mc\omega}{e}\right|. \tag{76.2}$$

En y substituant les valeurs numériques $|e| = 4{,}8\cdot 10^{-10}$ un. C.G.S.E., $m = 9{,}11\cdot 10^{-28}$ g, $\omega \sim 10^{15}$ s^{-1} on trouve $B \ll 10^8$ G. Comme le champ magnétique le plus intense réalisé à ce jour ne dépasse pas 10^7 G la condition (76.2) est toujours vérifiée.

2. La formule (76.1) montre que la vitesse angulaire de la rotation de Larmor est de même sens que le vecteur $\boldsymbol{B}$ et comme la charge de l'électron est négative le moment magnétique lié à cette rotation est de sens opposé au champ $\boldsymbol{B}$. C'est ainsi qu'apparaît une aimantation $\boldsymbol{I}$ dirigée à l'encontre du champ $\boldsymbol{B}$, résultat caractéristique du diamagnétisme.

Calculons la susceptibilité magnétique d'un corps diamagnétique. Un électron exécutant un mouvement de rotation sur une orbite circulaire de rayon r avec la fréquence de Larmor Ω possède un moment cinétique $mr^2\Omega$ et un moment magnétique $-er^2\Omega/(2c) = -e^2r^2H/(4mc^2)$. Nous avons remplacé ici le vecteur $\boldsymbol{B}$ par le vecteur $\boldsymbol{H}$ car dans les diamagnétiques la différence entre ces vecteurs est négligeable. Si l'axe Z est orthogonal au plan de l'orbite circulaire de l'électron $r^2 = x^2 + y^2$. Pour calculer le moment magnétique d'un atome il suffit de sommer les moments magnétiques de tous ses électrons. Dans les atomes d'un corps diamagnétique la répartition

des électrons présente une symétrie sphérique, ce qui implique $\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = {}^1/_3\ \overline{R^2}$, où R est la distance entre l'électron et le noyau. Si l'atome renferme Z électrons son moment magnétique moyen en présence d'un champ magnétique extérieur est

$$\mathfrak{M} = -\frac{Ze^2}{4mc^2}(\overline{x^2}+\overline{y^2}) = -\frac{Ze^2}{6mc^2}\overline{R^2}H$$

et le vecteur aimantation du milieu est

$$I = -\frac{NZe^2}{6mc^2}\overline{R^2}H, \tag{76.3}$$

où N est le nombre d'atomes par unité de volume. On trouve ensuite

$$\varkappa = -\frac{NZe^2}{6mc^2}\overline{R^2}, \tag{76.4}$$

$$\mu = 1 - \frac{4\pi NZe^2}{6mc^2}\overline{R^2}. \tag{76.5}$$

L'énergie du mouvement d'agitation thermique est trop faible pour modifier l'état interne (quantifié) de l'atome. Par conséquent les grandeurs $\varkappa$ et μ des corps diamagnétiques ne doivent pas dépendre de la température. Ce résultat théorique est confirmé par l'expérience.

Pour apporter une autre preuve de la validité des considérations théoriques évaluons à partir des valeurs de la susceptibilité $\varkappa$ les dimensions de l'atome. La quantité $\overline{R^2}$ doit être calculée par la mécanique quantique. Nul besoin est de faire des calculs puisque la racine carrée de $\overline{R^2}$ caractérise l'ordre de grandeur des dimensions atomiques. Comme les atomes des gaz rares ont des enveloppes électroniques sphériques, ce sont des corps diamagnétiques. Il est commode de caractériser les propriétés diamagnétiques des corps par leurs *susceptibilités magnétiques molaires* $\varkappa_A$ qui sont liées à la susceptibilité $\varkappa$ par la relation $\varkappa_A = V\varkappa$, où V est le volume d'une mole. On peut calculer $\varkappa_A$ par la formule (76.4) à condition d'entendre par N le nombre d'Avogadro. Pour l'hélium l'expérience fournit la valeur $\varkappa_A = -2{,}2\cdot 10^{-6}$, et pour l'argon $\varkappa_A = -2{,}5\cdot 10^{-4}$. Pour l'hélium $Z = 2$ et pour l'argon $Z = 18$. En portant ces valeurs dans (76.4) on trouve: He, $\sqrt{\overline{R^2}} = 0{,}63\cdot 10^{-8}$ cm; Ar, $\sqrt{\overline{R^2}} = 0{,}67\cdot 10^{-8}$ cm. Ces résultats concordent de façon satisfaisante avec les valeurs déterminées par d'autres procédés.

3. Il nous reste à préciser la nature des forces déterminant la rotation de Larmor des atomes. Ce ne peuvent être des forces magnétiques puisqu'elles sont orthogonales à la vitesse des électrons et ne produisent aucun travail. Or une énergie cinétique supplémentaire est liée à cette rotation. *Les forces magnétiques ne peuvent donc êtn la cause de la rotation de Larmor qui apparaît dès qu'on applique ure*

champ magnétique mais ces forces peuvent maintenir cette rotation. Un champ magnétique variable donne naissance à un champ électrique rotationnel et c'est ce champ qui détermine la rotation de Larmor des atomes. Pour le démontrer supposons que l'électron tourne sur une orbite circulaire de rayon r dont le plan est orthogonal au champ magnétique uniforme $\boldsymbol{B}$. Posons que l'application de ce champ s'effectue dans des conditions *adiabatiques*, c'est-à-dire de façon suffisamment lente pour qu'il reste presque constant au cours d'une rotation de l'électron sur son orbite circulaire. Par raison de symétrie le champ électrique rotationnel $\boldsymbol{E}$ sera dirigé suivant la tangente à la circonférence. En vertu de la loi de l'induction électromagnétique $2\pi rE = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$, où Φ est le flux magnétique embrassé par l'aire délimitée par l'orbite circulaire de l'électron. On en déduit le champ E. Le moment des forces appliquées à l'électron est $M = -reE = \frac{e}{2\pi c}\frac{d\Phi}{dt}$. D'après l'équation des moments

$$mr^2\frac{d\Omega}{dt} = M = \frac{e}{2\pi c}\frac{d\Phi}{dt}.$$

A l'instant initial $B = \Omega = 0$. Par suite l'intégration de l'équation donne

$$mr^2\Omega = \frac{e}{2\pi c}\Phi,$$

d'où $\Omega = eB/(2mc)$. Dès que cesse la variation du champ magnétique cesse la variation de la vitesse angulaire de rotation de l'atome. L'atome continue alors à tourner avec la vitesse angulaire constante définie par la formule de Larmor (76.1).

Ces considérations permettent de conclure que *la rotation de Larmor est une des manifestations du phénomène de l'induction électromagnétique.* Le fait que l'induction électromagnétique doive conduire au diamagnétisme et non pas au paramagnétisme s'interprète facilement en faisant appel à la règle de Lenz. En effet d'après cette règle le champ magnétique $\boldsymbol{B}_{\text{ind}}$ dû à la rotation larmorienne des électrons doit avoir un sens tel qu'il s'oppose à toute variation du champ extérieur $\boldsymbol{B}$. Il s'ensuit que le champ $\boldsymbol{B}_{\text{ind}}$ ainsi que l'aimantation $\boldsymbol{I}$ doivent être orientés à l'encontre du champ extérieur $\boldsymbol{B}$. Comme le phénomène d'induction électromagnétique se manifeste dans tous les milieux, le diamagnétisme qui en résulte est un *phénomène universel* ayant lieu dans tous les milieux. Mais lorsque les atomes possèdent des moments magnétiques propres l'effet diamagnétique est occulté par l'effet paramagnétique qui est plus fort.

§ 77. Le paramagnétisme

1. On observe des propriétés paramagnétiques chez les corps composés d'atomes possédant des moments magnétiques en l'absence de tout champ magnétique extérieur. Tant que le champ magnétique est nul les atomes sont animés de mouvements d'agitation thermique et leurs moments magnétiques sont orientés de façon désordonnée dans l'espace. Dans ce cas le corps n'est pas aimanté. Dans un champ magnétique les moments magnétiques des atomes cherchent à s'orienter suivant ce champ. Ainsi apparaissent une aimantation et l'effet paramagnétique correspondant.

La théorie du paramagnétisme que nous exposons ci-après se rapporte à un gaz paramagnétique dans lequel l'interaction entre les atomes est faible. Les résultats de cette théorie sont qualitativement applicables aux corps paramagnétiques liquides et solides dans les atomes ou les ions desquels les couches électroniques peuvent tourner plus ou moins librement autour des noyaux atomiques. Cela se produit notamment dans le cas où les couches électroniques présentent une symétrie sphérique comme c'est le cas pour les atomes des gaz rares ou pour les ions ayant même nombre d'électrons qu'un gaz rare.

2. Plaçons un atome isolé dans un champ magnétique permanent $\boldsymbol{B}$. En supposant que tous les spins de l'enveloppe électronique sont compensés nous n'en tiendrons pas compte. Soit $\boldsymbol{v}$ la vitesse d'un électron de l'atome avant application du champ magnétique. Selon le théorème de Larmor en présence d'un champ magnétique extérieur la vitesse de l'électron sera égale à $\boldsymbol{v} + [\boldsymbol{\Omega}\, \boldsymbol{r}]$ et son énergie cinétique à $\frac{1}{2}\, m\, (\boldsymbol{v} + [\boldsymbol{\Omega r}])^2$, où $\boldsymbol{\Omega}$ est la fréquence de Larmor. En négligeant les carrés de $\boldsymbol{\Omega}$ l'accroissement de l'énergie cinétique de l'électron s'exprimera par $m\, (\boldsymbol{v}\, [\boldsymbol{\Omega r}])$ ou $m\, ([\boldsymbol{r v}]\boldsymbol{\Omega})$. En sommant sur tous les électrons de l'enveloppe on obtient l'accroissement $\mathscr{E}$ de l'énergie cinétique de l'atome dû au champ magnétique appliqué : $\mathscr{E} = (\boldsymbol{L\Omega})$, où $\boldsymbol{L}$ est le moment cinétique de l'enveloppe électronique. En utilisant les formules (75.1) et (76.1) on trouve

$$\mathscr{E} = -\,(\vec{\mathfrak{M}}\boldsymbol{B}). \tag{77.1}$$

La même variation d'énergie (mais cette fois d'énergie potentielle) pourrait être obtenue en introduisant dans un champ magnétique un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathfrak{M}}$. On pouvait s'y attendre puisque selon le théorème d'Ampère une spire élémentaire parcourue par un courant (un électron tournant sur une orbite fermée, par exemple) placée dans un champ magnétique extérieur est soumise aux mêmes forces qu'un dipôle magnétique. Il s'ensuit que la formule (77.1) donnant l'accroissement de l'énergie de l'atome reste valable dans le cas où le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ serait déterminé par les spins et non

par les mouvements orbitaux des électrons. D'une manière générale la formule (77.1) est vérifiée quelle que soit l'origine du moment magnétique de l'atome $\vec{\mathfrak{M}}$, on le démontre par un calcul indépendant exposé plus loin (cf. pt. 8).

3. Il résulte de l'exposé ci-dessus que la théorie classique du paramagnétisme des gaz ne doit pas être d'essence différente de la théorie de Debye de la polarisation des diélectriques gazeux à molécules polaires (cf. § 36). La théorie du paramagnétisme a été élaborée par Langevin avant la théorie de Debye et cette dernière ne fait que reproduire la théorie de Langevin. La formule (77.1) montre que l'énergie de l'atome est plus grande lorsque son moment magnétique est dirigé à l'encontre du champ magnétique que lorsqu'il est dirigé dans le même sens. Il s'ensuit qu'à l'état d'équilibre statistique on doit trouver plus de moments magnétiques orientés dans le sens du champ que de moments orientés en sens inverse, ce qui correspond justement au paramagnétisme. Si la condition

$$\frac{\mathfrak{M}B}{kT} \ll 1 \tag{77.2}$$

est vérifiée, par analogie avec la formule (36.5) on peut écrire en théorie classique

$$I = \frac{n\mathfrak{M}^2}{3kT} B. \tag{77.3}$$

En utilisant les relations $I = \varkappa H$ et $B = (1 + 4\pi\varkappa) H$ on en tire

$$\frac{\varkappa}{1+4\pi\varkappa} = \frac{n\mathfrak{M}^2}{3kT}. \tag{77.4}$$

C'est la formule de la susceptibilité magnétique des paramagnétiques. Etant donné que la susceptibilité magnétique des corps non ferromagnétiques est très petite on peut négliger dans (77.4) la quantité $4\pi\varkappa$ devant l'unité *) et écrire

$$\varkappa = \frac{n\mathfrak{M}^2}{3kT}. \tag{77.5}$$

4. Généralisons les formules (77.3) et (77.5) au cas des champs magnétiques forts ou à celui des basses températures où la condition (77.2) n'est plus vérifiée. L'étude de ce cas est également due à Langevin mais sa théorie classique ne tient pas compte de la quantification des moments magnétiques des atomes qui importent

*) Nous ne tenons pas compte ici de la différence existant entre B et H puisque nous n'avons pas tenu compte partout ailleurs dans ce paragraphe de la différence entre le champ macroscopique moyen B et le champ B' qui s'exerce sur un atome d'un paramagnétique ou entre le carré du champ moyen B et le carré moyen du champ microscopique, etc. Toutes ces différences sont d'ailleurs du même ordre de grandeur.

beaucoup aux basses températures. On tient compte de la quantification en posant que le moment magnétique de l'atome $\vec{\mathfrak{M}}$ est un multiple du magnéton de Bohr $\vec{\mathfrak{M}}_B$ et qu'il peut prendre toutes les orientations permises par les règles de quantification. Posons que le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ de l'atome est dû au spin et qu'il est égal à un magnéton de Bohr. Cette hypothèse n'affecte aucun aspect essentiel de la quantification tout en simplifiant grandement les calculs puisque dans ce cas l'atome ne peut prendre dans le champ magnétique que deux orientations, l'une parallèle et l'autre antiparallèle au champ appliqué. Dans le cas de l'orientation parallèle la projection du moment magnétique sur la direction du champ magnétique est égale à $+\mathfrak{M}_B$ et dans le cas de l'orientation antiparallèle la projection est égale à $-\mathfrak{M}_B$. (Dans ce qui suit nous omettrons l'indice B.) A ces orientations correspondent les énergies $-\mathfrak{M}B$ et $+\mathfrak{M}B$. Conformément à la distribution de Boltzmann les nombres d'atomes (dans l'unité de volume) d'orientations parallèle et antiparallèle sont respectivement égaux à

$$n_1 = Ce^x, \quad n_2 = Ce^{-x},$$

où on a introduit la notation

$$x = \frac{\mathfrak{M}B}{kT}. \tag{77.6}$$

La constante de normalisation C est déterminée par la condition $n_1 + n_2 = n$, n étant le nombre total d'atomes par unité de volume. On a $C(e^x + e^{-x}) = n$. L'aimantation $I = (n_1 - n_2)\mathfrak{M}$, d'où

$$I = n\mathfrak{M}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = n\mathfrak{M}\,\mathrm{th}\,x. \tag{77.7}$$

5. Avant de soumettre à discussion la formule (77.7) notons que dans le cas où le moment magnétique de l'atome est supérieur à un magnéton de Bohr le calcul se fait de la même façon, à cela près que le nombre des orientations permises et la valeur de la projection maximale du moment magnétique des atomes sur la direction du champ magnétique sont plus grands que dans le cas simple. Dans tous les cas l'aimantation est donnée par une expression de la forme

$$I = n\mathfrak{M}L(x), \tag{77.8}$$

où $L(x)$ est la *fonction de Langevin*. Dans le cas considéré la fonction de Langevin est égale à th x et on la dénote par $L_{1/2}(x)$ pour la raison que le moment mécanique de l'atome évalué en unités $\hbar$ vaut 1/2. Dans les autres cas la fonction $L(x)$ a une forme différente mais son caractère général reste le même. A la limite classique où la quantification est absente, c'est-à-dire que toutes les orientations

du moment magnétique sont permises, la fonction de Langevin est dénotée par $L_\infty(x)$:

$$L_\infty(x) = \coth x - \frac{1}{x} \tag{77.9}$$

(voir problème à la fin du paragraphe). Ce résultat fut obtenu par Langevin lui-même.

6. Les graphiques des fonctions de Langevin $L_{1/2}(x)$ et $L_\infty(x)$ sont représentés sur la figure 193. Pour x petit

$$L_{1/2}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \ldots, \quad L_\infty(x) = \frac{1}{3}x + \ldots$$

Ainsi dans les champs faibles ($x \ll 1$) la dépendance de I avec B est linéaire. La formule (77.7) donne alors

$$I = \frac{n\mathfrak{M}^2}{kT} B, \tag{77.10}$$

tandis que la formule (77.9) conduit au résultat classique (77.3), donc à une valeur trois fois plus petite. Les moments magnétiques $\mathfrak{M}$ dépendent de la *structure interne de l'atome* et l'agitation thermique n'est pas en mesure de les modifier. Ainsi selon les formules (77.10) et (77.3) *la susceptibilité magnétique des gaz paramagnétiques doit varier en raison inverse de la température absolue T*. P. Curie établit expérimentalement cette loi de variation avant que fut élaborée la théorie de l'effet; c'est pour cela que cette loi porte le nom de *loi de Curie*. Cette loi est vérifiée par l'expérience pour les paramagnétiques gazeux et pour différents paramagnétiques solides (par exemple, les sels des terres rares). Pour de nombreux paramagnétiques liquides et solides la théorie élémentaire que nous venons d'exposer s'avère insuffisante puisqu'elle admet la libre rotation des couches électroniques des atomes autour de la direction du champ magnétique appliqué. D'ailleurs même dans les cas où cette hypothèse est valable dans les champs forts ($x \gg 1$) et à basses températures (de l'ordre de quelques kelvins) on doit observer des écarts à la loi de Curie et même à la relation linéaire entre I et B.

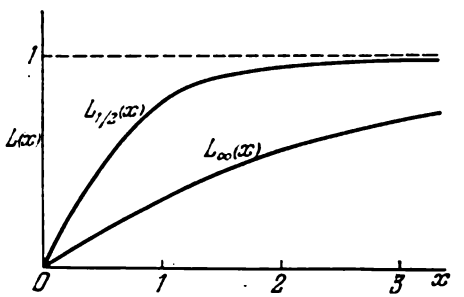


Fig. 193

7. Dans les champs forts ($x \gg 1$) les deux fonctions $L_{1/2}(x)$ et $L_\infty(x)$ tendent asymptotiquement vers l'unité. Cela correspond à *l'aimantation à saturation* $I = n\mathfrak{M}$ qui se réalise lorsque tous les

moments magnétiques des atomes s'alignent parallèlement au champ magnétique. Mais comme on pouvait s'y attendre la fonction classique $L_\infty(x)$ ne vérifie pas le théorème thermique de Nernst (cf. t. II, § 84) tandis que la fonction $L_{1/2}(x)$ le vérifie. En l'absence de quantification s'applique le théorème classique sur l'équipartition de l'énergie cinétique entre tous les degrés de liberté. Selon ce théorème les degrés de liberté rotatoires de l'atome doivent être excités et à chacun d'eux revient l'énergie cinétique $^1/_2\, kT$ et la capacité calorifique $^1/_2\, k$ indépendante de la température. Au zéro absolu la capacité calorifique serait donc finie en contradiction avec le théorème de Nernst. Il existe encore une autre contradiction avec ce théorème. Il résulte des formules (73.3) et (73.4) que

$$\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_B, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_H.$$

Selon le théorème de Nernst au zéro absolu les transformations ne s'accompagnent d'aucune variation d'entropie. Par conséquent les premiers membres et donc les seconds membres des relations ci-dessus doivent s'annuler pour $T = 0$:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_B = \left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_H = 0.$$

Compte tenu de la relation $B = H + 4\pi I$ ces résultats s'écrivent

$$\left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_B = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right)_H = 0. \tag{77.11}$$

La formule classique (77.9) ne s'accorde pas avec ces relations. En effet pour $x \gg 1$ on aboutit au comportement asymptotique $L_\infty(x) = 1 - 1/x$ et par suite

$$I = n\mathfrak{M}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = n\mathfrak{M} - \frac{nkT}{B}.$$

Il en résulte que $(\partial I/\partial T)_B = nk/B$, ce qui signifie qu'au zéro absolu la dérivée $(\partial I/\partial T)_B$ ne s'annule pas. Dans le cas de la formule (77.7) l'approche asymptotique est donnée par $L_{1/2}(x) = 1 - 2e^{-2x}$ et par suite $I = n\mathfrak{M}(1 - 2e^{-2x})$. Par conséquent pour $x \to \infty$, I tend vers la valeur constante $n\mathfrak{M}$ (saturation), et la dérivée $\partial I/\partial x$ tend vers zéro. On en conclut que la formule quantique (77.7) vérifie le théorème de Nernst.

8. Il nous reste à expliquer *comment apparaît l'aimantation dans les substances paramagnétiques.* Nous avons montré au paragraphe précédent qu'en présence d'un champ magnétique l'atome tout entier tourne à la fréquence de Larmor, i.e. exécute une précession régulière à la même fréquence autour de la direction du champ magnétique. Lors d'une telle précession l'angle entre le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ et le champ $\boldsymbol{B}$ reste constant. La projection du vecteur $\vec{\mathfrak{M}}$

sur la direction du champ magnétique sera elle aussi constante. Il est évident que la seule précession ne peut conduire à une aimantation de la substance paramagnétique. *L'aimantation résulte de l'interaction mutuelle des atomes.* Posons pour simplifier que ces interactions puissent être ramenées à des collisions et assimilons les atomes à des toupies de moment mécanique $\boldsymbol{L}$ et de moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}} = \Gamma \boldsymbol{L}$, où Γ est le rapport gyromagnétique. Pour concrétiser la situation sur la figure 194 les vecteurs $\boldsymbol{L}$ et $\vec{\mathfrak{M}}$ sont orientés dans le même sens, quoique les résultats resteraient valables s'ils étaient orientés en sens inverses. Dans un champ magnétique l'atome est soumis au moment des forces $\boldsymbol{M} = [\vec{\mathfrak{M}}\boldsymbol{B}]$ déterminant sa précession. La vitesse angulaire de précession Ω se déduit de l'équation des moments $\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{M}$. En y portant $\dot{\boldsymbol{L}} = [\Omega \boldsymbol{L}]$ on obtient $[\Omega \boldsymbol{L}] = \Gamma [\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}]$, d'où

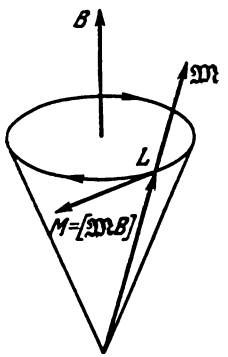


Fig. 194

$$\Omega = -\Gamma \boldsymbol{B}. \qquad (77.12)$$

Dans le cas où le moment $\boldsymbol{L}$ est dû aux mouvements orbitaux des électrons $\Gamma = -e/(2mc)$, par suite $\Omega = eB/(2mc)$, autrement dit la précession évolue à la fréquence de Larmor. Ce résultat montre que le modèle classique conduit à un résultat correct. Si le moment $\boldsymbol{L}$ est de spin, $\Gamma = -e/(mc)$ et la vitesse angulaire de précession sera deux fois plus grande que dans le cas précédent. Dans tous les autres cas l'effet est beaucoup plus compliqué et ne sera étudié qu'au tome V en physique atomique.

Tenons compte maintenant des collisions. Lorsqu'un atome subit une poussée dans le sens de sa rotation de précession le moment des forces correspondant donne lieu à une précession autour d'un axe normal à la direction du champ magnétique. Il est facile de s'en rendre compte en faisant appel à l'équation des moments qui montre qu'à la suite de la poussée l'angle entre les vecteurs $\vec{\mathfrak{M}}$ et $\boldsymbol{B}$ doit augmenter. Si la poussée s'exerce dans un sens contraire au sens de la rotation de précession cet angle doit diminuer. Les poussées du premier type désaimantent et celles du second type aimantent le corps paramagnétique. Mais l'effet d'aimantation prédomine sur l'effet de désaimantation car en moyenne les poussées a l'encontre de la rotation de précession sont plus fortes que les poussées de sens opposé (la situation est la même que celle d'un homme courant contre le vent puisque dans ce cas il éprouve une force de résistance plus forte que lorsqu'il a le vent dans le dos). Toutes ces considérations montrent que *le champ magnétique ne provoque pas l'aimantation et ne*

fait que la maintenir. L'aimantation résulte des collisions mutuelles des atomes.

9. Certains métaux, les métaux alcalins par exemple, présentent des propriétés paramagnétiques mais ne vérifient pas la loi de Curie. Leurs susceptibilités magnétiques sont largement indépendantes de la température. Ce fait fut expliqué par Pauli (1900-1958) en 1927. Il suggéra que dans ces cas le paramagnétisme est déterminé non par les moments magnétiques des ions du réseau cristallin mais par les *moments magnétiques de spin des électrons de conduction.* En assimilant ces électrons à un gaz vérifiant la statistique de Fermi-Dirac (cf. t. II, § 82) Pauli calcula la susceptibilité magnétique. Nous exposerons ce calcul au § 99 et ici nous noterons seulement que l'indépendance de la susceptibilité magnétique du gaz électronique dans les métaux avec la température est une *conséquence du théorème de Nernst.* En effet aux températures ordinaires le gaz électronique se trouve dans les métaux dans un état de *dégénérescence*, ce qui signifie que dans ce cas les températures ordinaires doivent être considérées comme *proches du zéro absolu* et c'est ce qui permet d'utiliser le théorème de Nernst. Il résulte de la formule (73.4) que

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_H = \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T.$$

Le second membre de cette relation s'annule en vertu du théorème de Nernst, tandis que le premier membre est égal à $\frac{H}{4\pi}\frac{d\mu}{dT}$. On a omis l'indice H auprès de la dérivée $\partial\mu/\partial T$ et on l'a écrite sous la forme $d\mu/dT$ pour indiquer que μ ne dépend pas de H. Ainsi $\frac{d\mu}{dT} = 4\pi\frac{d\varkappa}{dT} = 0$.

PROBLÈME

Retrouver la formule (77.9) pour la fonction classique de Langevin.

Solution. Le nombre d'atomes par unité de volume dont les moments magnétiques sont orientés dans les limites de l'angle solide $d\Omega = 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta$ est défini par la formule de Boltzmann

$$dn = Ce^{\frac{\mathfrak{M}B}{kT}\cos\vartheta}\sin\vartheta\, d\vartheta = Ce^{x\cos\vartheta}\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

où ϑ est l'angle que fait le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ avec le champ magnétique B; la constante de normalisation C est définie par la condition $\int dn = n$. La contribution de ces atomes à l'aimantation du milieu est $dI = \mathfrak{M}\, dn \cos\vartheta$. En y portant l'expression de dn on obtient

$$I = n\mathfrak{M}\frac{\int_0^\pi e^{x\cos\vartheta}\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta}{\int_0^\pi e^{x\cos\vartheta}\sin\vartheta\, d\vartheta} = n\mathfrak{M}\left(\coth x - \frac{1}{x}\right).$$

A partir de ce résultat on retrouve la formule (77.9).

§ 78. Les effets gyromagnétiques

1. Suspendons un corps paramagnétique ou ferromagnétique à un fil autour duquel ce corps peut tourner librement. Lorsqu'on l'aimante dans un champ magnétique les atomes du corps et leurs moments magnétiques tournent et s'orientent de préférence le long du champ. Au moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ d'un atome est lié le moment cinétique $\vec{\mathfrak{M}}/\Gamma$ de l'enveloppe électronique, Γ étant le rapport gyromagnétique. Le moment magnétique du corps est égal à $V\boldsymbol{I}$, où V est son volume et $\boldsymbol{I}$ le vecteur d'aimantation. Ainsi du fait de l'aimantation du corps le moment cinétique des enveloppes électroniques de ses atomes augmente de $\boldsymbol{L}_{\text{él}} = V\boldsymbol{I}/\Gamma$. Or les rotations des atomes et des moments magnétiques s'effectuent sous l'action de collisions, donc de *forces internes* qui ne peuvent faire varier le moment cinétique total du corps. On en conclut que le réseau cristallin du corps doit acquérir un moment cinétique égal mais de sens opposé, i.e. $\boldsymbol{L}_{\text{rés}} = -V\boldsymbol{I}/\Gamma$. Si avant l'aimantation le corps était au repos, une fois aimanté il doit se mettre en rotation. En désignant par Θ le moment d'inertie du corps, la vitesse angulaire de rotation ω est donnée par l'équation

$$\Theta\omega = -\frac{V}{\Gamma}\boldsymbol{I}. \tag{78.1}$$

Cette rotation du corps est appelée *effet magnétomécanique*. Cet effet est parfaitement analogue à la rotation du banc de Joukovski lorsque l'homme qui y est assis fait tourner l'axe d'une roue de vélo en rotation qu'il tient dans ses mains (cf. t. I, § 34, pt. 7). Ici le rôle de la roue de vélo est assumé par les enveloppes électroniques des atomes et celui du banc de Joukovski et de l'homme qui y est assis est assumé par le réseau cristallin du corps.

2. Afin d'évaluer l'effet. posons que le corps de masse M a la forme d'un petit cylindre de rayon r que l'on aimante à saturation. Si le moment magnétique d'un atome est égal à un magnéton de Bohr $\mathfrak{M}_B = e\hbar/(2mc)$, le moment magnétique du corps sera égal à $VI = MN\mathfrak{M}_B/A$, où N est le nombre d'Avogadro et A le poids atomique. Supposons que le moment magnétique d'un atome est dû aux mouvements orbitaux des électrons et par suite $\Gamma = -e/(2mc)$. En portant ces données dans (78.1) et en remarquant que $\Theta = \frac{1}{2}Mr^2$ on trouve

$$\omega = \frac{2N\hbar}{Ar^2}.$$

Pour un cylindre de fer de rayon $r = 1$ mm ($A = 56$) cette formule donne $\omega = 2{,}25\cdot10^{-3}$ rad/s.

L'effet est donc très faible. Pour le renforcer Einstein et De Haas (1878-1960), qui furent les premiers à observer cet effet en 1915, ont mis en œuvre le phénomène de résonance. Ils utilisèrent pour cela un petit cylindre de fer qui, suspendu à un fil de quartz très fin, était placé à l'intérieur d'un solénoïde dont le bobinage était alimenté par un courant alternatif, ce qui provoquait périodiquement l'aimantation et la désaimantation du cylindre (fig. 195).

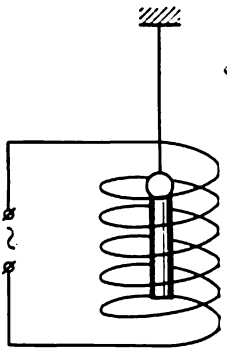


Fig. 195

On notait les rotations du cylindre à l'aide d'un petit miroir qui y était fixé. L'équation des oscillations de torsion du cylindre est

$$\frac{d}{dt}(L_{\text{rés}} + L_{\text{él}}) = -f\varphi - \alpha\dot{\varphi}$$

ou

$$\Theta\ddot{\varphi} + \alpha\dot{\varphi} + f\varphi = -\frac{dL_{\text{él}}}{dt} = -\frac{V}{\Gamma}\dot{I},$$

où φ est l'angle de déviation du cylindre par rapport à sa position d'équilibre, f le module de torsion du fil, α une constante introduite pour tenir compte de la résistance de l'air et des autres forces de résistance que l'on admet être proportionnelles à la vitesse du mouvement. En introduisant la fréquence propre ω_0 des oscillations du cylindre et le coefficient d'amortissement γ donnés par les formules $\omega_0^2 = f/\Theta$, $\gamma = \alpha/(2\Theta)$ on obtient

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = -\frac{V}{\Theta\Gamma}\dot{I}. \tag{78.2}$$

C'est l'équation des oscillations de torsion forcées (cf. § 122). La quantité qui figure dans le second membre de l'équation (78.2) joue le rôle de force extérieure. Cette force, qui apparaît du fait des aimantations et des réaimantations du cylindre, est supposée connue. Cette quantité tout comme l'aimantation I varie en fonction du temps avec une période égale à la période T du courant alternatif alimentant le solénoïde. Dans les expériences on faisait varier la fréquence du courant alternatif $\omega = 2\pi/T$ jusqu'à ce que les oscillations du cylindre soient maximales, ce qui se produit à la résonance, i.e. lorsque $\omega = \omega_0$. La relation entre I et H (ou entre B et H) n'étant pas linéaire on développe le second membre de (78.2) en série de Fourier. Pour trouver la solution à proximité de la résonance il suffit de conserver dans ce développement le terme renfermant la fréquence fondamentale ω (cf. § 128). Par étude des oscillations de torsion forcées du cylindre on arrivait à déterminer le rapport gyromagnétique Γ.

3. Il existe un effet inverse de l'effet magnétomécanique que l'on appelle *effet gyromagnétique*. Cet effet consiste en ce que les corps para- et ferromagnétiques s'aimantent lorsqu'on les met en rotation. L'explication de cet effet a été en fait déjà donnée à la fin du paragraphe précédent. Dans un champ magnétique l'enveloppe électronique de l'atome se met en rotation par rapport au réseau cristallin avec la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega} = -\Gamma \boldsymbol{B}$. En présence de cette rotation relative les collisions des atomes provoquent l'aimantation du milieu. La même aimantation aurait apparue si la rotation relative avait été créée non par application d'un champ magnétique mais par tout autre procédé. On en conclut que si on met le réseau cristallin en rotation avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ égale et opposée à $\mathbf{\Omega}$, l'aimantation sera la même. Autrement dit la mise en rotation d'un corps avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ provoque la même aimantation que celle que produit un champ magnétique d'intensité

$$B_{\text{eff}} = \frac{\omega}{\Gamma}. \tag{78.3}$$

Cet effet fut observé en 1914 par Barnett. Pour se faire une idée de l'intensité de l'effet supposons que le rapport gyromagnétique soit dû au mouvement orbital des électrons $[\Gamma = -e/(2mc)]$ et que la vitesse de rotation soit égale à 100 tours/s ($\omega = 2\pi \cdot 100$ rad/s). On obtient alors

$$B_{\text{eff}} = \frac{2mc}{e}\,\omega \approx 7 \cdot 10^{-5}\ \text{G}.$$

A titre de comparaison rappelons qu'à la surface de la Terre l'intensité du champ magnétique terrestre est comprise entre 0,28 et 0,70 G.

4. Les études des effets magnétomécanique et gyromagnétique ont montré que le rapport gyromagnétique Γ est toujours négatif. Ce résultat confirme l'idée que le magnétisme est dû au mouvement des charges électriques négatives (i.e. des électrons). Comme on pouvait s'y attendre les valeurs numériques de Γ sont comprises dans les limites $e/(2mc)$ et $e/(mc)$. Un résultat essentiel est que pour tous les ferromagnétiques étudiés (fer, nickel, cobalt et leurs alliages) le rapport gyromagnétique a été prouvé égal à $-e/(mc)$ et non pas à $-e/(2mc)$. Ce résultat montre que *le magnétisme des corps ferromagnétiques est déterminé par le spin des électrons et non par leurs mouvements orbitaux.*

Actuellement on dispose de méthodes beaucoup plus précises pour la mesure des moments magnétiques des électrons et des noyaux atomiques ainsi que des rapports gyromagnétiques. On utilise surtout les méthodes fondées sur la *résonance magnétique* (électronique et nucléaire). Nous examinerons cet effet dans le tome V de notre cours.

§ 79. Théorie du ferromagnétisme

1. La première théorie quantitative du ferromagnétisme fut élaborée en 1907 par le physicien français Weiss (1865-1940) quoique des idées analogues furent énoncées dès 1892 par le physicien russe B. L. Rosing dont les travaux ne furent pas remarqués. La théorie de Weiss est semi-phénoménologique. Weiss supposa que les atomes des corps ferromagnétiques comme ceux des paramagnétiques possédaient des moments magnétiques et qu'ils entraient en interactions mutuelles avec des forces dépendant de l'angle que faisaient entre eux les moments magnétiques. Ces forces tendraient à aligner les moments magnétiques des atomes voisins et c'est leur alignement le long d'une certaine direction qui déterminerait l'aimantation des ferromagnétiques. Dans la théorie de Weiss on remplace les forces d'interaction des atomes par un champ magnétique « effectif » qui aligne les atomes du ferromagnétique. Le champ effectif se compose du champ macroscopique ordinaire $\boldsymbol{H}$ régnant dans le corps et d'un « champ moléculaire » hypothétique. Selon l'hypothèse de Weiss ce dernier champ est proportionnel à l'aimantation $\boldsymbol{I}$ du ferromagnétique, ce qui permet de représenter le champ effectif par la formule

$$\boldsymbol{B}_{\text{eff}} = \boldsymbol{H} + b\boldsymbol{I}, \tag{79.1}$$

où b est une constante positive caractéristique du ferromagnétique et que l'on appelle *constante de Weiss*.

Partant de ces hypothèses il est facile de calculer l'aimantation I d'un ferromagnétique. Il suffit de remplacer dans la théorie de Langevin le champ $\boldsymbol{H}$ par le champ effectif $\boldsymbol{B}_{\text{eff}}$. On obtient ainsi $I = n\mathfrak{M}L(x)$, où $x = \mathfrak{M}(H + bI)/(kT)$. En résolvant cette relation par rapport à I et en remarquant que $n\mathfrak{M}$ représente l'aimantation à saturation I_s, on obtient un système de deux équations

$$I = I_s L(x), \quad I = \frac{kTn}{I_s b}\, x - \frac{H}{b} \tag{79.2}$$

qui permet de calculer I. Il est commode d'étudier ce système d'équations par un procédé graphique en portant en abscisses la quantité x et en ordonnées l'aimantation I (fig. 196). La première équation (79.2) sera représentée par la courbe de Langevin OA_0A et la seconde par une droite CA coupant l'axe vertical au point C d'ordonnée $OC = -H/b$.

2. Supposons d'abord que la pente de la droite CA est plus petite que la pente de la courbe de Langevin à l'origine des coordonnées, i.e. $kTn/(I_s b) < I_s\,(dL/dx)_{x=0}$ ou $T < T_c$, où on a introduit la notation

$$T_c = \frac{I_s^2 b}{kn}\left(\frac{dL}{dx}\right)_{x=0}. \tag{79.3}$$

La droite CA coupe alors la courbe de Langevin en un point A dont l'ordonnée représente l'aimantation I. Réduisons le champ magnétique H à zéro. Le point C remontera jusqu'au point O et le point A viendra se confondre avec le point A_0. Lorsque le champ magnétique H devient nul le ferromagnétique reste aimanté ; son aimantation est alors représentée par l'ordonnée du point A_0.

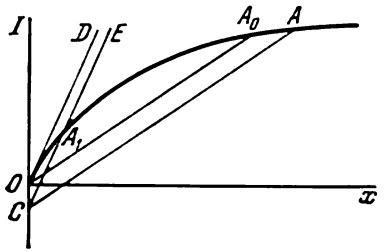


Fig. 196

La substance ferromagnétique sera spontanément aimantée même si elle n'avait pas été soumise à l'action d'un champ magnétique car, du fait des interactions hypothétiques entre les atomes postulées par Weiss, l'état d'aimantation spontanée est « énergétiquement avantageux ». Supposons en effet qu'au début les moments magnétiques avaient des orientations quelconques. Si par suite d'une fluctuation les moments magnétiques de deux ou de plusieurs atomes s'alignaient le long d'une certaine direction apparaîtrait aussitôt le champ interne de Weiss qui forcerait les moments magnétiques des autres atomes à se tourner dans cette même direction. En général, l'aimantation ainsi réalisée n'atteint pas à la saturation par suite de l'agitation thermique. En outre on doit tenir compte de l'anisotropie du réseau cristallin qui se traduit par l'existence d'*axes de facile aimantation* le long desquels tendent à s'aligner les moments magnétiques des atomes. Les atomes déjà alignés ne modifient que difficilement leurs orientations, car, pour le faire, ils doivent passer par des directions moins favorables à leur alignement. C'est pour cette raison que l'aimantation spontanée qui s'est réalisée tend à se conserver dans la suite des temps. Ainsi à $T < T_c$ tout ferromagnétique est *spontanément aimanté* et l'énergie de l'agitation thermique ne suffit pas à détruire cette aimantation. La température T_c est la *température* ou le *point de Curie*.

Au-dessous du point de Curie du fait de l'existence de l'aimantation spontanée les définitions usuelles de la susceptibilité et de la perméabilité magnétiques fondées sur les relations $I = \varkappa H$ et $B = \mu H$ sont dénuées de sens. Aussi définit-on $\varkappa$ et μ par les relations

$$\varkappa = \frac{dI}{dH}, \quad \mu = \frac{dB}{dH}$$

qui sont donc des fonctions de l'intensité du champ H.

3. Supposons maintenant que la pente de la droite CA soit plus grande que celle de la courbe de Langevin au point O. Cette situation se réalise lorsque la température T du corps est supérieure à la température de Curie ($T > T_c$). En l'absence de champ magnétique

extérieur la droite CA occupe la position OD, i.e. ne coupe la courbe de Langevin qu'à l'origine des coordonnées où l'aimantation est nulle. Cela signifie qu'il n'y a pas d'aimantation spontanée, celle-ci étant détruite par l'agitation thermique. Pour aimanter le corps il faut appliquer un champ magnétique. Calculons l'aimantation qui en résulterait. La droite CA occupera alors la position CE et coupera la courbe de Langevin au point A_1 dont l'ordonnée est numériquement égale à l'aimantation du corps. Selon les données expérimentales l'ordonnée $OC = -H/b$ est petite de sorte que le segment OA_1 de la courbe de Langevin est court. En remplaçant le segment de courbe par un segment de droite on peut écrire $L(x) = (dL/dx)_{x=0}\, x$, de sorte que

$$I = I_s \left(\frac{dL}{dx}\right)_{x=0} x.$$

En résolvant cette équation de concert avec la seconde équation (79.2) et en utilisant (79.3) on obtient

$$I = \varkappa H, \tag{79.4}$$

où

$$\varkappa = \frac{T_c}{b(T-T_c)} = \frac{\text{const}}{T-T_c}. \tag{79.5}$$

L'aimantation est donc proportionnelle au champ, ce qui signifie qu'au-dessus du point de Curie le ferromagnétique se transforme en paramagnétique; la variation de la susceptibilité magnétique avec la température est décrite alors par la *loi de Curie-Weiss* (79.5).

On peut dire qu'*au-dessous du point de Curie la substance se trouve dans un « état ordonné » caractérisé par l'existence d'une aimantation spontanée. Au point de Curie se produit une transformation de phase qui fait passer la substance dans un « état désordonné » non aimanté.*

4. La théorie de Weiss fournit donc une explication des principaux faits du ferromagnétisme: aimantation spontanée, existence d'une température de Curie, loi de Curie-Weiss. On aurait pu supposer que le champ $b\boldsymbol{I}$ se ramène à une interaction ordinaire de dipôles magnétiques, analogue à celle des dipôles électriques d'un diélectrique. S'il en était ainsi, par analogie avec la formule (35.13) le champ moléculaire de Weiss serait défini, ne serait-ce que d'après son ordre de grandeur, par la formule $\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{I}$; cela impliquerait que la constante de Weiss serait de l'ordre de l'unité. On arrive à la même conclusion à l'aide d'un raisonnement simple. Comme le champ magnétique d'un dipôle décroît rapidement avec la distance, le champ que créent au centre d'un atome donné les atomes environnants serait de l'ordre du champ créé par l'atome voisin le plus proche, i.e. de l'ordre de $\vec{\mathfrak{M}}/a^3$, a étant la distance moyenne entre les atomes. Comme $\vec{\mathfrak{M}}/a^3$ est de l'ordre de $\boldsymbol{I}$ nous arrivons au même résultat que ci-

dessus. Or un champ de cette intensité est nettement insuffisant pour aimanter à saturation un corps ferromagnétique puisque dans les paramagnétiques où la situation est exactement la même la saturation ne s'observe jamais.

Nous arrivons à la même conclusion en évaluant la valeur de la constante de Weiss b à l'aide des données expérimentales. On utilise pour ce faire la formule (79.3) où on pose que la fonction de Langevin est $L_{1/2}(x) = \text{th}x \approx x$ puisque l'expérience montre que le ferromagnétisme est dû aux spins des électrons (voir paragraphe précédent). On obtient ainsi

$$T_c = \frac{I_s^2 b}{kn}. \tag{79.6}$$

Ayant mesuré la température de Curie et l'aimantation à saturation I_s on peut calculer à l'aide de cette formule la valeur de la constante b. On trouve ainsi des valeurs de l'ordre de 10^3 à 10^4. Ainsi les champs internes qu'il faut invoquer pour expliquer le ferromagnétisme sont des milliers ou des dizaines de milliers de fois plus grands que les champs magnétiques que peuvent créer les alignements des moments magnétiques des atomes du ferromagnétique. On en conclut que le ferromagnétisme ne peut résulter d'interactions magnétiques des atomes.

En 1927 Y. G. Dorfman (1899-1974) a réalisé une expérience directe qui démontra que le champ moléculaire assurant l'alignement des atomes du ferromagnétique ne peut être d'origine magnétique. Entre les pôles d'un électroaimant puissant on dispose parallèlement au champ magnétique une mince feuille de nickel de $\sim$ 20 μm d'épaisseur. On fait passer à travers la feuille normalement à sa surface un faisceau d'électrons rapides (rayons β) issus d'une source radioactive. On enregistre la trace des électrons ayant traversé la feuille sur une plaque photographique. Une première expérience fut réalisée sans champ magnétique. Lorsqu'on applique ensuite le champ magnétique on constate que la trace du faisceau est dévié de côté. Si le champ moléculaire de Weiss était de nature magnétique, la déviation du faisceau aurait été déterminée par le champ efficace $\boldsymbol{B}_{\text{eff}} = \boldsymbol{H} + b\boldsymbol{I}$ et son déplacement aurait été de 10 mm environ. Or on observe un déplacement $\sim$0,3 mm, ce qui correspond à l'action d'un champ de l'ordre de 10^4 G, donc à la valeur de l'induction magnétique dans la feuille.

5. La nature physique du champ moléculaire de Weiss a été établie en 1927 par Y. I. Frenkel (1894-1952) et presque simultanément par Heisenberg (1901-1976) sur la base de la mécanique quantique. L'exposé de cette question sort du cadre de notre cours. En bref, l'idée en est la suivante. Si on applique aux électrons et aux noyaux atomiques d'un ferromagnétique la loi de Coulomb, tout en décrivant les mouvements des électrons conformément aux lois de

la mécanique quantique, on arrive au même résultat que celui que fournirait la mécanique classique à condition d'adjoindre aux forces coulombiennes d'autres forces d'interaction mutuelle des électrons. Ces forces supplémentaires que l'on doit introduire dans la théorie classique sont appelées *forces d'échange*. La proposition qui vient d'être annoncée indique clairement que les forces d'échange ne peuvent être interprétées par des considérations classiques puisque les équations de la mécanique classique que l'on utilise ne font intervenir aucune force d'échange. On doit les invoquer en théorie classique pour concilier ses résultats avec ceux des études quantiques. Les forces d'échange sont des *forces à courte distance*, i.e. agissent sur des distances atomiques. Dans certaines conditions relatives à la structure électronique des atomes, à la structure du réseau cristallin, etc., les forces d'échange tendent à aligner les spins électroniques des atomes voisins et c'est ce qui explique l'aimantation des ferromagnétiques. Les calculs montrent que les interactions d'échange peuvent être prises en compte par introduction d'un champ moléculaire équivalent bI. Ainsi la théorie de Weiss trouve sa justification physique sans avoir à introduire d'hypothèses spéciales.

6. L'existence de l'aimantation spontanée que prédit la théorie de Weiss semble être en contradiction avec le fait que même au-dessous du point de Curie le fer et les autres substances ferromagnétiques ne sont généralement pas aimantés ; et cependant on connaît les aimants permanents, l'aimantation rémanente, etc. Weiss leva cette contradiction en supposant qu'au-dessous du point de Curie les ferromagnétiques se divisent magnétiquement en une multitude de domaines macroscopiques mais très petits. Chacun de ces domaines est spontanément aimanté jusqu'à la valeur correspondant au point A_0 de la courbe théorique de la figure 196. Il ne faut pas confondre les *domaines* magnétiques avec les cristallites composant les corps ferromagnétiques polycristallins. Dans les conditions ordinaires les directions des moments magnétiques des domaines sont réparties dans l'espace au hasard, de sorte que le corps tout entier apparaît comme non aimanté. Lorsqu'on applique un champ magnétique extérieur les domaines dont les moments magnétiques sont orientés dans le sens du champ croissent aux dépens des domaines orientés à l'encontre du champ par déplacement des frontières entre ces domaines. Dans les champs faibles ces déplacements des frontières entre les domaines sont *réversibles*. Dans des champs plus intenses tous les moments magnétiques d'un domaine subissent une réorientation suivant le champ. La réaimantation acquiert un *caractère irréversible* et donne lieu à l'apparition de l'hystérésis et de l'aimantation rémanente.

Les corps ferromagnétiques se subdivisent en domaines pour des raisons énergétiques. Si le ferromagnétique tout entier était aimanté suivant une certaine direction, l'énergie des interactions d'échange

des électrons aurait été minimale mais l'énergie du champ magnétique aurait été considérable. Lorsque le corps ferromagnétique se subdivise en domaines élémentaires différemment orientés le champ magnétique créé par le corps devient plus faible de même que l'énergie de ce champ. Comme les forces d'échange s'exerçant entre les électrons sont des forces à courte distance l'énergie d'échange reste invariable pour tous les électrons à l'exclusion de ceux qui sont contenus dans les frontières entre les domaines; l'énergie d'échange de ces derniers électrons augmente car leurs spins ont des directions différentes. L'énergie d'échange des atomes contenus dans les frontières entre domaines voisins peut être assimilée à l'*énergie superficielle* puisqu'elle est proportionnelle à la superficie totale des frontières. A mesure que la subdivision en domaines élémentaires se poursuit l'énergie superficielle et donc l'énergie d'échange totale augmentent tandis que l'énergie du champ magnétique diminue. La subdivision en domaines de plus en plus fins cesse lorsque la somme des énergies d'échange et magnétique prend la valeur minimale. C'est la condition du minimum d'énergie qui détermine la taille des domaines élémentaires.

7. La décomposition des corps ferromagnétiques en domaines élémentaires est confirmée par l'expérience. La preuve la plus directe de l'existence des domaines est fournie par les *figures de poudre*. Sur une surface soigneusement polie d'un corps ferromagnétique on dépose une mince couche d'un liquide contenant, à l'état de suspension, de fines particules d'un ferromagnétique réduit en poudre (par exemple Fe_2O_3). Les particules se déposent de préférence là où l'inhomogénéité du champ magnétique est la plus forte, c'est-à-dire sur les frontières des domaines. L'examen au microscope révèle le tracé des frontières entre les domaines magnétiques.

Une autre méthode, qui est indirecte, est fondée sur l'*effet Barkhausen*. Lorsqu'on approche ou qu'on éloigne un aimant puissant d'un corps ferromagnétique celui-ci s'aimante ou se réaimante. La réaimantation se réalise par une rotation ou par une inversion rapide du sens du vecteur d'aimantation du domaine tout entier. Ces brusques rotations ou inversions du vecteur d'aimantation des domaines sont appelées *sauts de Barkhausen*. Pour les détecter on dispose une longue tige d'un corps ferromagnétique dans une bobine dont les bornes sont connectées à travers un amplificateur à un haut-parleur ou à un oscillographe. A chaque inversion ou rotation du moment magnétique d'un domaine le flux magnétique embrassé par la bobine varie brusquement et induit un courant dans l'enroulement de la bobine. Le haut-parleur produit alors un bruissement caractéristique et sur l'écran de l'oscillographe le spot lumineux décrit des pics désordonnés. C'est l'effet Barkhausen. L'étude des oscillogrammes ainsi que celle des figures de poudre ont permis d'évaluer le volume et les dimensions linéaires des domaines magnétiques. Leur volume

est de 10^{-6} cm³ environ tandis que leur longueur peut atteindre 2 à 3 mm.

8. Notons encore que suivant la structure du cristal les forces d'échange peuvent assurer aussi bien une orientation parallèle qu'une *orientation antiparallèle* des spins électroniques des atomes voisins. Dans le cas le plus simple (pas de champ d'aimantation) les spins électroniques forment deux sous-réseaux spatiaux imbriqués l'un dans l'autre à spins antiparallèles. Si l'aimantation de ces deux sous-réseaux est la même, leurs moments magnétiques se compensent mutuellement et le cristal n'a pas de moment magnétique résultant. Les corps qui se comportent ainsi sont dits *antiferromagnétiques* et l'ordonnancement correspondant des spins électroniques caractérisent l'*effet antiferromagnétique* (ou *antiferromagnétisme*). Cet effet fut théoriquement prévu par L. Néel en 1932 et par L. D. Landau en 1933. Sont antiferromagnétiques certains composés du manganèse (MnO, MnS, MnF_2), du fer (FeF_2, $FeCl_2$, FeO), du chrome (CrSb, Cr_2O_3) et de nombreux autres éléments. A basse température la susceptibilité magnétique des antiferromagnétiques est négligeable mais augmente avec la température. A une certaine température appelée *point de Curie antiferromagnétique* ou *point de Néel* la disposition ordonnée des spins est détruite et la substance devient paramagnétique. Si on augmente encore la température du corps sa perméabilité magnétique diminue comme pour tout paramagnétique. Ainsi elle atteint le maximum au point de Néel.

Dans le cas où les aimantations des deux sous-réseaux ne sont pas égales on a affaire à un *antiferromagnétisme non compensé* et le corps possède un moment magnétique qui peut être considérable. Ces substances sont dites *ferrimagnétiques*. Leurs propriétés magnétiques sont analogues à celles des substances ferromagnétiques. Dans le cas où les substances ferrimagnétiques présentent en outre des propriétés semiconductrices on les appelle *ferrites*.

§ 80. Les supraconducteurs et leurs propriétés magnétiques

1. Le phénomène de supraconductibilité fut découvert en 1911 par Kamerlingh Onnes (1853-1926) après qu'il eût liquéfié en 1908 l'hélium et rendit ainsi accessible aux recherches la gamme des températures proches du zéro absolu. Lors d'une étude de la résistance en courant continu du mercure à l'approche du zéro absolu Kamerlingh Onnes constata qu'à 4,12 K (selon les mesures modernes à 4,15 K) la résistance du mercure tombait brusquement à zéro, ou tout au moins à une valeur si petite qu'elle ne pouvait être mesurée. Les recherches ultérieures montrèrent que de mombreux autres métaux se comportaient de la même façon. Ce phénomène reçut le nom de *supraconductibilité* et les substances qui le manifestent furent

appelées *supraconducteurs*. La température T_c à laquelle la résistance diminue par saut est appelée *température de transition à l'état supraconducteur* ou *température critique*. Au-dessus de la température critique le supraconducteur se trouve dans l'état dit *normal* et au-dessous de cette température il se trouve dans l'état dit *supraconducteur*. Actuellement on sait que près de la moitié des métaux peuvent passer à l'état supraconducteur. Plus de mille alliages et composés métalliques sont supraconducteurs. Parmi les métaux purs c'est le niobium qui possède la plus haute température critique (9,3 K) et parmi les alliages et composés intermétalliques c'est le composé Nb_3Ge qui détient aujourd'hui le record de température critique ($T_c = 23{,}2$ K).

La méthode la plus précise dont on dispose aujourd'hui pour les estimations quantitatives de la résistance des supraconducteurs dans l'état supraconducteur consiste à exciter un courant induit dans un *anneau supraconducteur*. L'anneau en matériau supraconducteur se trouvant à une température supérieure à la température critique est d'abord introduit dans un champ magnétique, puis on le refroidit jusqu'à une température inférieure à T_c afin de le faire passer à l'état supraconducteur. On supprime alors le champ magnétique et on excite ainsi un courant induit dans l'anneau. Dans un métal normal le courant ainsi induit s'amortit rapidement. La mesure du taux d'amortissement permet de juger de la résistance de l'anneau. Dans le cas d'un anneau supraconducteur le courant induit y circule pendant un temps pratiquement indéfini. En mesurant ce courant au cours du temps (en déterminant l'intensité du champ magnétique qu'il crée) on arrive à estimer la limite supérieure de la résistance de l'anneau. En utilisant cette méthode on a trouvé que la résistivité du plomb à l'état supraconducteur était inférieure à $4 \cdot 10^{-25}$ ohm·cm, soit plus de 10^{17} fois plus petite que la résistivité du cuivre à la température ordinaire. Lors du passage par la température critique le saut de la résistance est d'au moins 10^{14}. Ce résultat permet de conclure qu'à l'état supraconducteur la résistance en courant continu disparaît effectivement.

2. Au-dessous de la température critique les supraconducteurs ne présentent aucune résistance électrique que si le courant est *continu*. Dans le cas de courants alternatifs la résistance des supraconducteurs est différente de zéro et d'autant plus grande que la fréquence du courant alternatif est grande. On interprète ce fait expérimental le plus simplement à l'aide du *modèle à deux liquides du supraconducteur*. Selon ce modèle les électrons qui assurent le transport du courant électrique se divisent en deux groupes: le groupe des électrons *supraconducteurs* et le groupe des électrons *normaux*. Le supraconducteur est pour ainsi dire imbibé de deux liquides électriques d'où le nom de ce modèle. Le déplacement des électrons supraconducteurs ne rencontre aucune force de résistance;

ils se meuvent par inertie de sorte que pour maintenir le courant supraconducteur aucun champ électrique n'est nécessaire. Les électrons normaux subissent par contre des collisions avec les atomes du réseau tout comme dans les métaux normaux et satisfont donc à la loi d'Ohm. Lorsqu'on applique un champ électrique les deux sortes d'électrons sont accélérées. Lorsque le courant devient continu le champ électrique dans le supraconducteur doit disparaître car s'il ne disparaissait pas les électrons supraconducteurs seraient continûment accélérés et le courant qu'ils créent s'accroîtrait indéfiniment. Mais lorsqu'il n'y a pas de champ électrique les électrons normaux ne transportent aucun courant. Ainsi le courant n'est transporté que par les électrons supraconducteurs et c'est pour cela qu'il n'y a pas de résistance électrique. Mais si l'intensité du courant varie un champ électrique apparaît dans le supraconducteur et accélère les deux sortes d'électrons: normaux et supraconducteurs. Le courant transporté par les électrons normaux s'accompagne d'une résistance électrique et d'un dégagement de la chaleur par effet Joule. Dans le cas des courants alternatifs de fréquence industrielle ($\nu \sim 50$ Hz) seule une partie infime du courant est transportée par les électrons normaux. Cette part augmente à mesure que la fréquence du courant augmente et lorsque cette fréquence ν devient suffisamment élevée apparaissent des effets quantiques qui augmentent encore les pertes d'énergie par effet Joule. Cela se produit lorsque l'énergie des quanta $h\nu$ devient suffisante pour faire passer un électron supraconducteur sur un niveau d'énergie plus élevé, i.e. le transformer en un électron normal. On calcule aisément la fréquence ν en remarquant que lorsque la température du supraconducteur devient égale à sa température critique l'énergie d'agitation thermique kT devient suffisante pour assurer cette transition. On doit donc avoir $h\nu \gtrsim kT_c$. En posant $T_c \sim 1$ K on obtient $\nu \gtrsim 10^{11}$ Hz, ce qui signifie que le processus en question commence à se manifester aux fréquences de l'infrarouge. On comprend pourquoi les supraconducteurs qui se trouvent à une température inférieure à T_c se comportent du point de vue des propriétés optiques comme des métaux normaux.

3. Etudions maintenant les propriétés magnétiques des supraconducteurs. Jusqu'en 1933 on admettait que du point de vue de leurs propriétés magnétiques les supraconducteurs se comportaient comme des conducteurs parfaits, i.e. des corps de conductibilités électriques infiniment grandes. Nous savons (cf. § 71) que dans un conducteur parfait le flux magnétique à travers tout contour « fluide » se déplaçant avec le conducteur se conserve. Si le conducteur est solide (tous les supraconducteurs sont des corps solides) et immobile, tout contour « fluide » qu'il peut renfermer doit être fixe et indéformable. Comme on peut prendre un contour arbitraire infiniment petit la conservation du flux $\int \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S}$ implique la conservation du vecteur $\boldsymbol{B}$. Par con-

séquent l'induction B ne peut varier dans un conducteur solide parfait.

Appliquons ce théorème aux supraconducteurs. Nous caractériserons les conditions extérieures par la température T et par le champ magnétique extérieur B_e (créé par un électroaimant par exemple) et nous porterons ces deux paramètres sur les axes de coordonnées (fig. 197). Faisons passer le supraconducteur (ayant la forme d'une sphère par exemple) de l'état normal *1* à l'état supraconducteur *2* suivant le chemin *132*. Le champ appliqué B_e étant maintenu

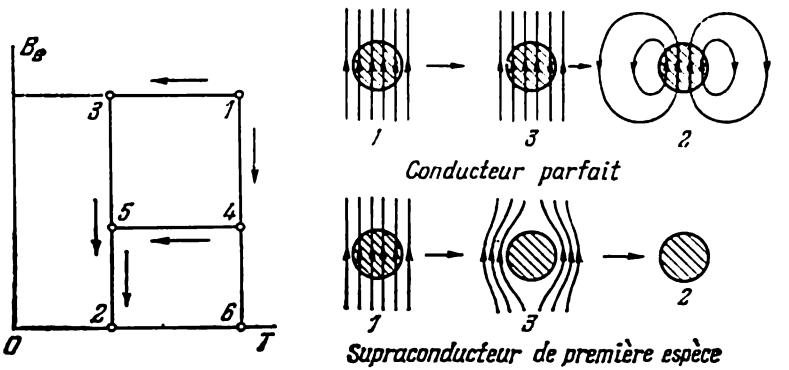


Fig. 197

constant nous refroidirons le supraconducteur jusqu'au point *3* pour le faire passer à l'état supraconducteur. Comme aucun supraconducteur ne possède de propriétés ferromagnétiques sa perméabilité magnétique est toujours très proche de l'unité. Il s'ensuit que du fait du refroidissement le champ magnétique ne doit varier ni à l'intérieur ni à l'extérieur du supraconducteur. Arrivant au point *3* supprimons le champ extérieur B_e tout en maintenant constante la température, i.e. passons au point *2*. En vertu du théorème ci-dessus le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur doit rester constant. En dehors du supraconducteur doit subsister un champ magnétique non uniforme car la condition aux limites: continuité des composantes normales du vecteur induction sur la surface du corps, doit être vérifiée. Réalisons maintenant un passage au même point *2* suivant le trajet *1452*. Rien ne doit changer dans nos raisonnements puisqu'il suffit de prendre pour point initial le point *4* où le champ appliqué B_e est plus faible qu'au point *1*. Dans les conditions du point *2* la carte du champ à l'intérieur et à l'extérieur du supraconducteur sera la même que dans le cas précédent sauf que l'intensité du champ sera partout plus petite. En particulier si on réalise le trajet *1462*, dans l'état final le champ magnétique devra

être partout nul. Nous voyons ainsi que la fixation des paramètres extérieurs T et B_e ne suffit pas à définir l'état du supraconducteur d'une façon univoque. Un corps supraconducteur peut se trouver dans un nombre infini d'états suivant le procédé utilisé pour réaliser les paramètres T et B_e, i.e. suivant le « chemin » qu'on lui fait parcourir.

3. Les supraconducteurs réels se comportent d'une façon bien différente. Walter Meissner (1882-1974) et Ochsenfeld ont montré en 1933 qu'*à l'état supraconducteur le champ magnétique à l'intérieur des corps supraconducteurs était toujours nul* ($B = H = 0$). Cela signifie que *lorsqu'on refroidit un supraconducteur au-dessous de sa température critique le champ magnétique en est expulsé* (*effet Meissner-Ochsenfeld*). La modification que subit la répartition du champ magnétique lorsqu'on fait varier les paramètres extérieurs T et B_e n'est pas celle qui est représentée dans la partie supérieure de la figure 197. Le comportement réel d'un supraconducteur est représenté dans la partie inférieure de cette même figure. L'état du supraconducteur est défini de façon *univoque* par les paramètres T et B_e et *ne dépend nullement du chemin suivi* pour arriver à cet état. On démontra plus tard que tous les supraconducteurs ne se comportent pas conformément aux prévisions de Meissner et Ochsenfeld. Les supraconducteurs qui manifestent l'effet Meissner-Ochsenfeld décrit sont appelés *supraconducteurs de première espèce* et ceux où cet effet se déroule d'une façon différente sont appelés *supraconducteurs de seconde espèce*. Une définition plus précise sera donnée plus loin (cf. pt. 9). Nous noterons ici que tous les métaux purs sont des supraconducteurs de première espèce, le niobium, le vanadium et le technétium exceptés qui sont des supraconducteurs de seconde espèce. Nous considérerons d'abord les supraconducteurs de première espèce.

Puisqu'il n'y a pas de champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur, des courants spatiaux ne peuvent y circuler, ce qui implique qu'à l'intérieur du supraconducteur $j = 0$. Ce résultat découle directement du théorème de la circulation rot $H = \frac{4\pi}{c} j$. Tous les courants doivent circuler à la surface du supraconducteur. Ces courants superficiels excitent un champ magnétique qui compense le champ extérieur à l'intérieur du supraconducteur. C'est ce mécanisme d'exclusion du champ magnétique qui détermine l'effet Meissner-Ochsenfeld.

Une démonstration spectaculaire de l'effet Meissner-Ochsenfeld consiste à assurer la *lévitation d'un aimant* au-dessus de la surface d'un supraconducteur. On place un petit aimant sur un plat en métal supraconducteur (en plomb par exemple) refroidi au-dessous de sa température critique. Le plat est le siège de courants induits non amortis. Ce sont ces courants qui repoussent l'aimant et le mettent en lévitation à une certaine hauteur au-dessus du plat. Cet

effet de lévitation s'observe aussi si on place l'aimant sur un plat se trouvant au-dessus de sa température critique et qu'on le refroidisse ensuite au-dessous de T_c pour le faire passer à l'état supraconducteur. Dans ce cas l'effet se manifeste parce que l'expulsion du champ magnétique du supraconducteur donne lieu à une variation de flux magnétiques et donc à l'apparition de courants induits. Ces courants ne dépendent que de la position relative de l'aimant et du plat supraconducteur mais ne dépendent nullement du procédé mis en œuvre pour arriver à cette position relative. L'effet sera donc identique à celui observé dans la première expérience.

5. En réalité le courant superficiel circule non pas sur la surface du supraconducteur mais dans une *couche d'épaisseur finie*. Le champ magnétique doit pouvoir pénétrer dans cette couche conformément à l'équation rot $\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}$. Le procédé le plus simple d'évaluation de la *profondeur de pénétration du champ magnétique* dans le supraconducteur a été suggéré par les frères Fritz et Hans London, qui ont élaboré la première théorie phénoménologique de la supraconductibilité. Supposons que nous ayons affaire à des champs lentement variables en fonction du temps. Comme les supraconducteurs ne sont pas ferromagnétiques on peut négliger la différence entre $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$ et écrire les équations fondamentales de l'électrodynamique sous la forme

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}. \tag{80.1}$$

Nous négligeons aussi toute différence entre les dérivées totale et partielle par rapport au temps. En admettant que les courants ne sont dus qu'aux électrons supraconducteurs nous écrivons $\boldsymbol{j} = -n_s e \boldsymbol{v}_s$, où n_s est la concentration de ces électrons. En dérivant par rapport au temps on obtient $d\boldsymbol{j}/dt = -n_s e \dot{\boldsymbol{v}}_s$. On trouve l'accélération $\dot{\boldsymbol{v}}_s$ de l'électron à partir de l'équation $m\dot{\boldsymbol{v}}_s = -e\boldsymbol{E}$, à condition de négliger le champ magnétique. On obtient ainsi

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = -\frac{c^2}{4\pi\Lambda^2}\boldsymbol{E}, \tag{80.2}$$

où on a utilisé la notation

$$\Lambda = \left(\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}\right)^{1/2}. \tag{80.3}$$

Après dérivation de la première équation (80.1) par rapport à t on peut éliminer entre les équations (80.1) et (80.2) les quantités $\boldsymbol{E}$ et $d\boldsymbol{j}/dt$, ce qui donne

$$\dot{\boldsymbol{B}} = -\Lambda^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{B}}.$$

Cette équation est vérifiée pour $\boldsymbol{B}$ = const. Or une telle solution ne cadre pas avec l'effet Meissner-Ochsenfeld qui exige que $\boldsymbol{B} = 0$ à l'intérieur du supraconducteur. Nous n'avons obtenu ce résultat que parce que nous avons effectué deux fois de suite des dérivations par rapport au temps. Pour éliminer de façon automatique cette solution les frères London ont émis l'hypothèse que dans la dernière équation on pouvait remplacer la dérivée de $\boldsymbol{B}$ par le vecteur $\boldsymbol{B}$, ce qui conduit à l'équation

$$\boldsymbol{B} = -\Lambda^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{B}. \tag{80.4}$$

Pour déterminer la profondeur de pénétration du champ magnétique dans le supraconducteur nous supposerons qu'il est limité par un plan et occupe la totalité du demi-espace limité par ce plan. Orientons l'axe Z vers l'intérieur du supraconducteur et normalement à sa surface. Posons que le champ magnétique soit parallèle à l'axe X de sorte que $B_y = B_z = 0$. On aura alors

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = \frac{\partial B_x}{\partial z} \boldsymbol{e}_y, \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = -\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \boldsymbol{e}_x$$

et l'équation (80.4) donne

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial z^2} - \frac{\boldsymbol{B}}{\Lambda^2} = 0.$$

La solution de cette équation qui s'annule pour $z \to \infty$ est de la forme

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{-z/\Lambda}. \tag{80.5}$$

La constante d'intégration $\boldsymbol{B}_0$ représente le champ à la surface du supraconducteur. Sur la distance Λ le champ magnétique diminue de e fois. C'est cette longueur Λ que l'on adopte comme mesure de la profondeur de pénétration du champ magnétique dans le métal.

Pour arriver à une estimation numérique, posons que chaque atome du métal fournit un électron supraconducteur, ce qui revient à poser $n_s \approx 5 \cdot 10^{22}$ cm^{-3}. A l'aide de la formule (80.3) on trouve alors $\Lambda \approx 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm, valeur du même ordre de grandeur que celles que l'on trouve par des mesures directes. La concentration des électrons supraconducteurs décroît à mesure que l'on s'approche de la température critique T_c, de sorte que lorsqu'on passe de 0 à T_c la profondeur de pénétration Λ croît de façon monotone et devient infinie pour $T = T_c$ (voir fig. 198 qui représente $\Lambda = \Lambda(T)$ pour l'étain).

6. *Lorsque l'intensité du champ magnétique appliqué $\boldsymbol{B}_e$ dépasse une certaine valeur, la supraconductibilité est détruite, ce qui signifie que le supraconducteur revient à l'état normal et le champ magnétique pénètre à son intérieur.* Cette valeur limite du champ magnétique extérieur est appelée *champ critique* $\boldsymbol{B}_c$. La valeur du champ critique

est fonction de la température. On peut le définir à l'aide de la thermodynamique. Pour éliminer tous les facteurs secondaires ne concernant pas la question étudiée on supposera que le corps supraconducteur se présente sous forme d'un cylindre de grande longueur et que le champ magnétique extérieur est uniforme et parallèle à l'axe du cylindre. Dans ces conditions le champ magnétique à l'intérieur du cylindre (lorsqu'il est à l'état normal) et l'aimantation de ce dernier seront également uniformes. Pour fixer les idées supposons que le champ $\boldsymbol{B}_e$ est créé par un solénoïde de grande longueur sur la surface latérale duquel circule un courant continu $\mathcal{J}$ et l'axe du cylindre

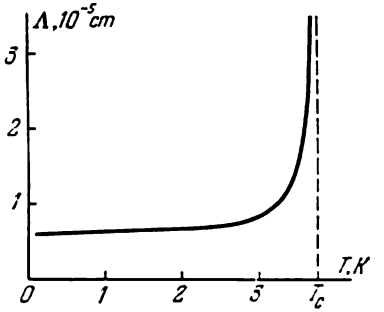


Fig. 198

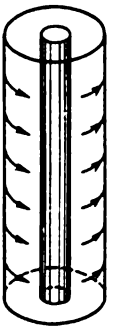


Fig. 199

est confondu avec l'axe du solénoïde (fig. 199). Pour simplifier nous supposerons que les longueurs l du cylindre et du solénoïde sont égales. Lorsque l est grand on peut ne pas tenir compte de l'influence des bords du cylindre et du solénoïde. Nous poserons que la perméabilité magnétique du supraconducteur est égale à l'unité aussi bien à l'état normal qu'à l'état supraconducteur. Désignons par ψ_s et ψ_n les densités spatiales de l'énergie libre du supraconducteur en l'absence de champ magnétique respectivement à l'état supraconducteur et à l'état normal. La température étant inférieure à la température critique le cylindre se trouve dans l'état supraconducteur. Comme c'est l'état plus stable on doit avoir $\psi_s < \psi_n$.

On peut définir le champ magnétique critique $\boldsymbol{B}_c$ comme la valeur du champ appliqué $\boldsymbol{B}_e$ pour laquelle à une température donnée les phases supraconductrice et normale sont en équilibre. L'énergie libre totale du système sera alors la même que le cylindre se trouve à l'état supraconducteur ou à l'état normal. Faisons passer le cylindre de l'état supraconducteur à l'état normal de façon quasi statique en maintenant constants pendant la transition la température T, le champ extérieur $\boldsymbol{B}_e$ et le courant $\mathcal{J}$ circulant dans le solénoïde ($\boldsymbol{B}_e = \boldsymbol{B}_c$). Comme le champ magnétique ne pénètre pas dans le

supraconducteur (en négligeant la profondeur de pénétration) l'énergie libre du cylindre supraconducteur est $V_1\psi_s$, où V_1 est le volume du cylindre. On doit y ajouter l'énergie du champ magnétique localisée dans le solénoïde à l'extérieur du cylindre, soit $(V - V_1)B_c^2/(8\pi)$, où V est le volume du solénoïde. L'énergie libre totale du système à l'état initial est égale à

$$\Psi_1 = V_1\psi_s + \frac{1}{8\pi}(V - V_1)B_c^2.$$

Pendant la transition le flux magnétique Φ embrassé par la section droite du cylindre doit varier, ce qui fait apparaître la force électromotrice d'induction $\mathscr{E}^{\text{ind}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$. Pour maintenir constante l'intensité de courant $\mathcal{J}$ dans le solénoïde on doit dépenser le travail élémentaire $-\mathscr{E}^{\text{ind}}\mathcal{J}dt = \frac{1}{c}\mathcal{J}d\Phi$. Puisque $\mathcal{J} = \text{const}$ le travail total que l'on doit fournir pendant la transition est $A = \frac{1}{c}\mathcal{J}\Phi = \frac{1}{c}\mathcal{J}SB_e$, S étant l'aire de la section droite du solénoïde. Comme d'autre part $B_e = B_c = 4\pi\mathcal{J}/l$, on a $A = l\,SB_c^2/(4\pi) = V_1B_c^2/(4\pi)$. En définitive l'énergie libre du système à l'état final est

$$\Psi_2 = \Psi_1 + A = V_1\left(\psi_s + \frac{1}{8\pi}B_c^2\right) + \frac{V}{8\pi}B_c^2.$$

Ce résultat ne dépend naturellement pas du procédé mis en œuvre pour faire passer le système à l'état final puisque l'énergie libre est une fonction d'état. Or à la fin de la transition le cylindre supraconducteur se trouve à l'état normal et le champ magnétique occupe la totalité du volume du solénoïde. Par conséquent Ψ_2 est aussi égal à

$$\Psi_2 = V_1\psi_n + \frac{V}{8\pi}B_c^2.$$

En identifiant les deux expressions de Ψ_2 on trouve

$$\psi_s + \frac{1}{8\pi}B_c^2 = \psi_n. \tag{80.6}$$

C'est cette formule qui sert à définir le champ critique qui caractérise le début de la destruction de la supraconductibilité.

La supraconductibilité est également détruite par le courant électrique lorsque son intensité devient supérieure à une certaine valeur (*courant critique*). Mais cet effet n'est qu'une conséquence de l'effet du champ critique puisque le courant traversant le supraconducteur crée un champ magnétique et si l'intensité de ce champ atteint la valeur critique, la supraconductibilité commence à être détruite.

7. L'état d'un supraconducteur est défini d'une façon univoque par la fixation du champ extérieur qui lui est appliqué (B_e) et de la température T (à condition que la pression, le volume et tous les autres paramètres sont maintenus constants). Cet état est donc repéré par un point sur le plan (T, B_e). Sur le diagramme d'état correspondant (fig. 200) la courbe d'équilibre divise le plan en deux régions dont l'une correspond à la phase supraconductrice et l'autre à la phase normale. La courbe d'équilibre est de forme parabolique. Elle est le lieu des points (T_c, B_c). Cette courbe montre que l'application d'un champ magnétique abaisse la température de transition à

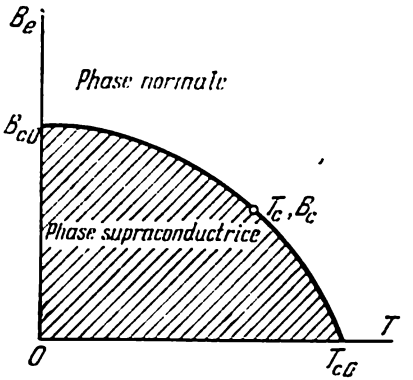


Fig. 200

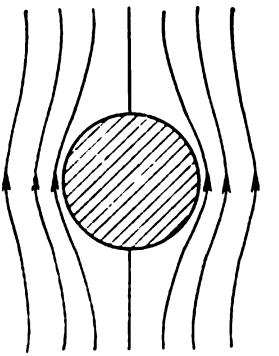


Fig. 201

l'état supraconducteur. La température sera dorénavant notée T_{c0} pour indiquer s'il s'agit de la température de transition à l'état supraconducteur en l'absence de champ magnétique ($B_e = 0$). La notation B_{c0} a une signification analogue.

8. Nous avons supposé ci-dessus que le corps supraconducteur avait la forme d'un cylindre de grande longueur et que le champ extérieur B_e était uniforme et parallèle à l'axe du cylindre. Dans ces conditions en tout point de la surface du supraconducteur le champ magnétique a même valeur. Lorsqu'on fait croître le champ magnétique il atteint la valeur critique B_c simultanément en tous les points de la surface du supraconducteur. A ce moment l'état supraconducteur sera partout détruit et le supraconducteur passera tout entier à l'état normal.

Le comportement des supraconducteurs de formes différentes est plus compliqué car en différents points de leurs surfaces on atteint le champ critique B_c pour différentes valeurs du champ extérieur B_e. Considérons le cas le plus simple où un échantillon de forme sphérique est placé dans un champ magnétique uniforme B_e (fig. 201).

C'est sur l'équateur que l'intensité du champ magnétique à la surface de la sphère est maximale et vaut ici $^3/_2\ B_c$ (voir problème 8). Il s'ensuit que la transition à l'état normal commencera sur l'équateur lorsque $^3/_2\ B_e = B_c$. Or pour cette valeur du champ B_e toute la sphère ne peut passer à l'état normal car autrement (puisque $\mu = 1$) le champ magnétique dans tout l'espace serait uniforme et égal à $B_e = {}^2/_3\ B_c$, valeur inférieure au champ critique ; la sphère devrait revenir alors à l'état supraconducteur. La destruction de l'état supraconducteur sous l'action du champ magnétique se produit par décomposition de la sphère en couches minces alternativement supraconductrices et normales. Dans le cas de corps de formes plus compliquées cette décomposition se traduit par la formation de petites régions (*domaines*) semblables aux domaines ferromagnétiques, les uns se trouvant à l'état normal, les autres à l'état supraconducteur. Cet état du supraconducteur lorsqu'il comporte des domaines supraconducteurs et normaux résultant de sa forme géométrique et apparaissant dans un champ magnétique extérieur est appelé *état intermédiaire*. L'existence de cet état a été confirmée par des expériences directes.

9. Un des facteurs essentiels déterminant le comportement des supraconducteurs est l'*énergie superficielle* liée à l'existence d'une surface de séparation entre les phases normale et supraconductrice. Cette énergie est analogue à l'énergie de la tension superficielle existant à la surface de séparation de deux liquides. Mais dans le cas de supraconducteurs l'énergie superficielle peut être positive ou négative. Les supraconducteurs dont l'énergie superficielle est positive sont dits *supraconducteurs de première espèce* et ceux dont l'énergie superficielle est négative sont des *supraconducteurs de seconde espèce*. Pendant longtemps on pensait que tous les supraconducteurs étaient de première espèce. Ce n'est qu'en 1957 que A. A. Abrikossov (né en 1928) démontra par des calculs théoriques la possibilité d'existence des supraconducteurs de seconde espèce.

Soit un supraconducteur ayant la forme d'un cylindre de grande longueur auquel on applique un champ magnétique extérieur parallèlement à son axe. Dans ce cas aucun état intermédiaire, dû à la forme du corps, ne peut apparaître. Néanmoins à mesure que l'intensité du champ magnétique B_e augmente les supraconducteurs de première et de seconde espèce se comportent différemment. Lorsque le champ extérieur B_e atteint la valeur critique B_c, dans le cas de supraconducteurs de première espèce la phase supraconductrice devient thermodynamiquement instable et se transforme entièrement en la phase normale qui est stable dans ces conditions. Le supraconducteur ne se divise pas en petits domaines supraconducteurs et normaux car pour créer des surfaces de séparation on devrait

fournir dans ce cas une énergie supplémentaire. Le diagramme d'état des supraconducteurs de première espèce ne comporte que deux régions: une région pour la phase *supraconductrice* et une autre pour la phase *normale* (fig. 200). La situation est tout autre dans le cas des supraconducteurs de seconde espèce. Comme leur énergie superficielle est négative, il est possible d'abaisser l'énergie libre totale du système par division du corps en domaines supraconducteurs et normaux. Cette division résulte non pas de la forme du corps mais constitue une *propriété inhérente* aux supraconducteurs de seconde espèce. En outre à la différence de l'état intermédiaire dont les domaines sont assez gros pour être discernables à l'œil nu, les domaines des supraconducteurs de seconde espèce sont notablement plus fins (10^{-5} cm et au-dessous). Cet état des supraconducteurs de seconde espèce, caractérisé par leur subdivision en domaines supraconducteurs et normaux, est appelé *état mixte*. Le diagramme d'état du supraconducteur de seconde espèce (fig. 202) comporte trois régions: l'une correspond à l'état purement *supraconducteur*, une autre à l'état *mixte* et la troisième correspond à l'état *normal*. Les frontières entre ces trois états définissent le *champ critique « inférieur »* B_{c1} et le *champ critique « supérieur »* B_{c2}.

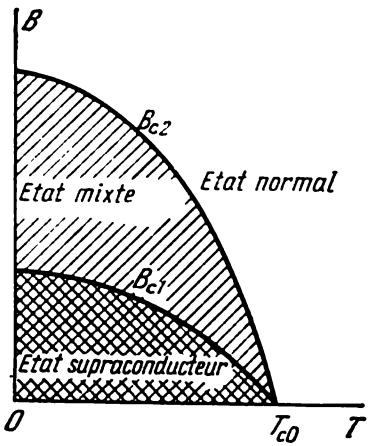


Fig. 202

Les supraconducteurs de seconde espèce (alliages supraconducteurs) sont utilisés pour la fabrication de solénoïdes produisant des champs magnétiques de très grande intensité (~100 kG). Les supraconducteurs de première espèce ne conviennent pas à ces applications vu la faible valeur de leurs champs critiques détruisant la supraconductibilité.

10. La nature physique de la supraconductibilité n'a été élucidée qu'en 1957. Bien avant cette date Landau avait conçu la *théorie de la superfluidité* de l'hélium II, et on s'aperçut que ce phénomène était un *effet quantique macroscopique*. On ne pouvait cependant transposer la théorie de Landau à la supraconductibilité parce que les atomes d'hélium ayant un spin nul sont régis par la *statistique de Bose-Einstein* tandis que les électrons de spin 1/2 satisfont au *principe de Pauli* et à la *statistique de Fermi-Dirac* (cf. t. II, § 82). Les électrons ne sont donc pas susceptibles de donner lieu à la *condensation de Bose-Einstein* qui détermine la superfluidité.

Un pas décisif dans l'explication de la supraconductibilité a été fait par les physiciens américains Bardeen, Cooper et Schrieffer. Leur théorie a été perfectionnée du point de vue mathématique par le physicien soviétique N. N. Bogolioubov. L'idée de base de cette théorie est la suivante.

Entre les électrons d'un métal s'exercent des forces de répulsion coulombiennes qui sont cependant notablement affaiblies par l'effet d'écran des ions positifs du réseau cristallin. D'autre part l'interaction des électrons avec les vibrations du réseau conduit à l'apparition d'une faible force d'attraction entre les électrons. Cette attraction est un *effet quantique* et peut, dans certaines conditions, surpasser la répulsion coulombienne entre les électrons, qui peuvent alors s'associer en paires (*paires de Cooper*). Ces électrons accouplés deux par deux ayant un spin nul se comportent comme des *particules de Bose* et transportent le courant électrique dans les supraconducteurs. C'est tout ce que nous pouvons dire car il nous est impossible d'exposer ici la théorie de la supraconductibilité.

PROBLÈMES

1. Deux bobines supraconductrices de self-inductances L_1 et L_2 branchées en parallèle sont connectées au circuit d'une batterie de force électromotrice $\mathscr{E}$ (fig. 203). Calculer les courants stationnaires $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ dans les bobines ainsi

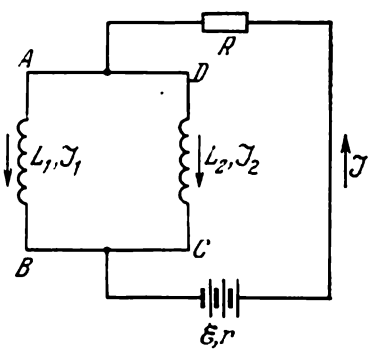


Fig. 203

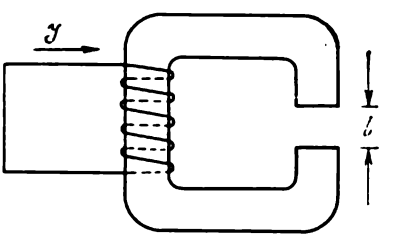


Fig. 204

que le courant total $\mathcal{J}$, sachant qu'on peut négliger le coefficient d'inductance mutuelle des bobines.

S o l u t i o n. D'après la loi d'Ohm $\mathcal{J} = \mathscr{E}/(R + r)$. Avant la connexion de la batterie, le flux magnétique embrassé par le contour supraconducteur $ABCD$ était nul. Il restera nul après que l'on fera passer le courant, i.e. $L_1\mathcal{J}_1 - L_2\mathcal{J}_2 = 0$, d'où

$$\frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}_2} = \frac{L_2}{L_1}. \tag{80.7}$$

Comme $\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}$, on trouve les courants $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$.

2. On excite le courant continu $\mathcal{J}$ dans le bobinage supraconducteur fermé d'un électroaimant (fig. 204). Le circuit magnétique en fer doux de perméabilité μ comporte un entrefer d'épaisseur l suffisamment petit pour pouvoir négliger la dispersion du champ magnétique. La longueur totale du circuit magnétique (entrefer compris) est L. Quel sera le courant $\mathcal{J}_0$ dans le bobinage de l'électroaimant si on supprime l'entrefer en y intercalant une plaque d'épaisseur l en fer doux?

Réponse. $\mathcal{J}_0 = \dfrac{\mathcal{J}}{1 + (\mu - 1)\, l/L}$.

3. On introduit un cylindre long en supraconducteur de première espèce dans un champ magnétique continu et homogène B parallèle à l'axe du cylindre. Calculer la force f s'exerçant sur l'unité d'aire de la surface latérale du cylindre.

Réponse. $f = B^2/(8\pi)$ (pression dirigée vers l'axe).

4. Un anneau en fil fin est placé dans un champ magnétique homogène $B = 10$ G perpendiculaire au plan de l'anneau, puis amené à l'état supraconducteur par refroidissement. Calculer l'intensité de courant dans l'anneau après suppression du champ magnétique sachant que le rayon de l'anneau $R = 5$ cm et le rayon du fil $a = 1$ mm.

Indication. La self-inductance d'un annear en fil (si le courant ne circule qu'en surface) s'exprime dans le système gaussien par la formule

$$L = 4\pi R\,[\ln(8R/a) - 2].$$

Réponse. $\mathcal{J} = \dfrac{c\pi R^2 B}{L} = 9{,}4 \cdot 10^{10}$ un. C.G.S.E. $= 31$ A.

5. On suspend à une distance h au-dessus de la surface plane d'un supraconducteur de première espèce et parallèlement à cette surface un fil fin rectiligne parcouru par un courant continu $\mathcal{J}$. Calculer la densité linéique du courant supraconducteur i circulant à la surface du supraconducteur.

Indication. Utiliser la méthode des images.

Réponse. $i = \mathcal{J}h/(\pi r^2)$ où r est la distance entre le fil et le point de repère. Le courant supraconducteur est parallèle au courant $\mathcal{J}$ mais de sens contraire.

6. Au-dessus de la surface plane d'un supraconducteur de première espèce recouverte d'une couche isolante d'épaisseur $h = 5$ mm repose un anneau de rayon $R = 10$ cm en fil supraconducteur fin parcouru par un courant continu $\mathcal{J}$. Quelle doit être la valeur du courant $\mathcal{J}$ pour que l'anneau plane au-dessus du supraconducteur si la masse de l'anneau est $m = 1$ g?

Réponse. $\mathcal{J} \geqslant c\sqrt{\dfrac{mgh}{2\pi R}} = 8{,}4 \cdot 10^{10}$ un. C.G.S.E. $= 25$ A.

7. Un petit aimant permanent de moment magnétique $\mathfrak{M} = 10^3$ G·cm³ et de masse $m = 10$ g peut planer, en position horizontale, à une hauteur h au-dessus de la surface horizontale plane d'un supraconducteur de première espèce. En assimilant l'aimant à un dipôle ponctuel, calculer la hauteur h.

Indication. On utilisera la méthode des images et la formule donnant l'énergie potentielle mutuelle de deux dipôles ponctuels.

Réponse. $h = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\mathfrak{M}^2}{mg}\right)^{1/4} \approx 2{,}1$ cm.

8. Une sphère de rayon a en supraconducteur de première espèce est placée dans un champ magnétique homogène B_0. Calculer le champ magnétique B à l'extérieur de la sphère, le champ B_0 étant encore insuffisant pour détruire la supraconductibilité. Calculer aussi la densité superficielle du courant supraconducteur i.

Solution. Introduisons l'hypothèse justifiée par les calculs ultérieurs qu'en dehors de la sphère au champ homogène B_0 vient se superposer le champ

du dipôle ponctuel $\vec{\mathfrak{M}}$ placé au centre de la sphère (fig. 205). On a alors

$$B = B_0 + \frac{3(\vec{\mathfrak{M}}r)}{r^5} r - \frac{\vec{\mathfrak{M}}}{r^3}. \qquad (80.8)$$

On détermine le moment $\vec{\mathfrak{M}}$ en imposant que la composante normale du vecteur B soit nulle sur la surface de la sphère:

$$B_r = B_0 \cos\vartheta + \frac{2\mathfrak{M}}{a^3}\cos\vartheta = 0.$$

Cette condition est vérifiée pour tous les angles ϑ lorsque

$$\vec{\mathfrak{M}} = -\frac{a^3}{2} B_0. \qquad (80.9)$$

A l'équateur, i.e. pour $r = a$, $\vartheta = 90°$, on trouve $B = {}^3/_2 B_0$. Le courant supraconducteur superficiel circule le long des parallèles définies par $\vartheta = \text{const}$, et en vertu du théorème de la circulation $i = \frac{3c}{8\pi} B_0 \sin\vartheta$.

9. Un cylindre infiniment long de rayon a en supraconducteur de première espèce est introduit dans un champ magnétique B_0 continu, uniforme et normal à l'axe du cylindre. Calculer le champ magnétique B à l'extérieur du cylindre, le champ B_0 étant inférieur au champ pouvant détruire la supraconductibilité du cylindre. Calculer aussi la densité superficielle du courant supraconducteur i.

Réponse.

$$B = B_0 - \frac{2a^2(B_0 r)}{r^4} r + \frac{a^2}{r^4} B_0, \qquad (80.10)$$

où r est le rayon vecteur normal à l'axe du cylindre et mené d'un point de l'axe au point de repère. Le champ régnant à la surface du cylindre est maximal pour $\vartheta = 90°$ et vaut $B = 2B_0$ (voir fig. 205). Le courant superficiel est dirigé parallèlement à l'axe du cylindre; son intensité est $i = \frac{c}{2\pi} B_0 \sin\vartheta$.

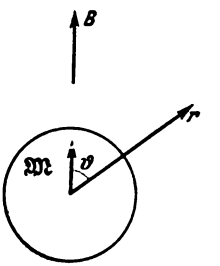


Fig. 205

10. Une bille en supraconducteur vole en direction d'un solénoïde le long de son axe. Au centre du solénoïde le champ $B = 1000$ G. Quelle doit être la vitesse initiale v de la bille pour qu'elle puisse traverser le solénoïde de part en part? Le diamètre du solénoïde est beaucoup plus grand que le diamètre de la bille. Densité du matériau de la bille $\rho = 8$ g/cm^3.

Solution. En utilisant les résultats du problème 8 il est facile de montrer qu'au centre du solénoïde l'énergie potentielle est égale à ${}^1/_2(\vec{\mathfrak{M}}\,B) = {}^1/_4 B^2 R^3$. A l'aide de l'équation exprimant l'énergie on trouve

$$v \geqslant B\sqrt{3/(4\pi\rho)} \approx 170 \text{ cm/s}.$$

11. Pour produire des champs magnétiques de très grande intensité on utilise, pour réaliser les bobinages, des supraconducteurs de seconde espèce. Les extrémités des fils sont reliées à la source de courant (les fils étant alors à l'état normal). Ensuite on refroidit les bobinages jusqu'à la température de l'hélium liquide et ils passent alors à l'état supraconducteur (ou à l'état mixte). Ensuite on les déconnecte de la source de courant et les court-circuite.

Un solénoïde à grand nombre de couches de fil supraconducteur, de rayon intérieur $a = 2$ cm, de rayon extérieur $b = 4$ cm et d'une longueur $l = 20$ cm, mis en court-circuit, permet de créer un champ intérieur $B_0 = 100$ kG. Evaluer

la quantité d'hélium liquide qui sera vaporisée lorsque le solénoïde passe de l'état supraconducteur (ou de l'état mixte) à l'état normal. Chaleur de vaporisation de l'hélium $q = 0{,}7$ cal/cm³.

Solution. On négligera les effets de bord et on posera que le courant dans le bobinage est un courant de densité spatiale constante, approximation justifiée dans des calculs grossiers. En appliquant le théorème de la circulation, on calcule le champ magnétique B à différentes distances r de l'axe du solénoïde

$$B = \begin{cases} B_0 & \text{pour} \quad r \leqslant a, \\ B_0 (b-r)/(b-a) & \text{pour} \quad a \leqslant r \leqslant b. \end{cases}$$

On calcule ensuite l'énergie magnétique W du système:

$$W = \frac{lB_0^2}{48} [3a (a+b) - b (b-a)] \approx 1{,}17 \cdot 10^{11} \text{ erg} \approx 2{,}8 \cdot 10^3 \text{ cal}.$$

La quantité d'hélium vaporisé est égale à $W/q = 4 \cdot 10^3$ cm³ $= 4$ l.

CHAPITRE IV

LES ÉQUATIONS DE MAXWELL

§ 81. Le courant de déplacement

1. Les équations fondamentales du champ électromagnétique dans les milieux immobiles, applicables aussi bien aux courants continus qu'aux courants alternatifs, ont été établies par Maxwell. On peut parvenir aux équations de Maxwell par une généralisation conséquente des données expérimentales. On doit commencer par choisir parmi les équations connues celles que l'on conservera, celles que l'on rejettera et celles qu'il faut d'abord généraliser. Pour ce faire, on mettra en œuvre un principe général. On doit exclure du nombre des équations fondamentales celles qui sont fondées sur la conception de l'action directe à distance. Telles sont les équations exprimant les lois de Coulomb, de Biot et Savart, etc. Ces lois sont incompatibles avec la conception d'une vitesse finie de propagation des interactions, qui est confirmée par l'expérience, et ne sont donc pas de validité générale. On ne peut conserver que les équations qui ne sont pas en contradiction avec la théorie des champs. C'est ce que nous avons fait dans tout ce qui précède. Nous avons admis par hypothèse que le théorème de Gauss (13.4), l'équation (58.1) et la loi élémentaire de l'induction (66.1) étaient des lois générales de l'électrodynamique. Le fait que l'on peut mettre ces lois sous les formes différentielles (13.5), (58.2) et (66.4) démontre qu'elles vérifient la théorie des champs. Nous adjoindrons aux équations fondamentales de l'électrodynamique la loi de la conservation des charges électriques. Cette dernière loi s'exprime sous forme différentielle de la façon suivante:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{81.1}$$

Lorsque le champ électromagnétique est stationnaire, cette équation se réduit à

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{81.2}$$

2. Le théorème de la circulation

$$\oint_L \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c} \mathcal{J} \tag{81.3}$$

se laisse également mettre sous une forme différentielle :

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} \tag{81.4}$$

et vérifie donc la théorie des champs. Néanmoins ce théorème ne peut faire partie du système d'équations fondamentales de l'électrodynamique puisque la divergence de tout rotor est identiquement nulle. En prenant la divergence des deux membres de l'équation (81.4) on obtient div $\boldsymbol{j} = 0$, équation qui n'est valable que pour les courants stationnaires et qui est en contradiction avec l'équation (81.1) dans le cas général. Or il n'y a aucune raison de mettre en doute la validité de l'équation (81.1) puisqu'elle exprime la loi de la conservation des charges électriques. On en conclut que les équations (81.3) et (81.4) ne sont valables que pour les courants stationnaires. Pour pouvoir les appliquer aux champs électromagnétiques alternatifs, on doit les généraliser au préalable.

Afin d'obtenir les formes généralisées de ces équations, on commencera par quelques considérations facilitant cette tâche. Comme la divergence du premier membre de (81.4) est identiquement nulle, le second membre de cette équation doit contenir un vecteur dont la divergence est également toujours nulle. Dans le cas de champs électromagnétiques stationnaires, ce vecteur doit se ramener au vecteur $\boldsymbol{j}$. Il est facile de trouver le vecteur qui satisfait à ces conditions. En dérivant par rapport au temps la relation div $\boldsymbol{D} = 4\pi\rho$, on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{D}} = 0,$$

et compte tenu de l'équation (81.1)

$$\operatorname{div} \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi} \dot{\boldsymbol{D}} \right) = 0. \tag{81.5}$$

Maxwell appela la grandeur

$$\boldsymbol{j}_{\text{dép}} = \frac{1}{4\pi} \dot{\boldsymbol{D}} \tag{81.6}$$

courant (plus exactement *densité de courant*) *de déplacement*, et la somme $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{\text{dép}}$ *courant total*. Ainsi

$$\operatorname{div} (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{\text{dép}}) = 0, \tag{81.7}$$

ce qui signifie que *le courant total est toujours solénoïdal*. L'incompatibilité avec (81.1) sera levée si on remplace dans (81.4) le courant de conduction $\boldsymbol{j}$ par le courant total, i.e. si on écrit

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{\text{dép}}). \tag{81.8}$$

C est ce que fit Maxwell.

Le raisonnement ci-dessus ne constitue nullement une démonstration de l'équation (81.8), mais c'est un procédé parmi une infinité d'autres de lever la contradiction mathématique entre les équations (81.1) et (81.4). On se rend compte qu'il existe une infinité de procédés de lever la contradiction dont il est question en remarquant qu'aucune nouvelle difficulté mathématique n'apparaît si on ajoute au second membre de (81.8) un vecteur arbitraire dont la divergence est nulle. La véritable démonstration de la justesse de l'équation (81.8) ne peut résulter que de sa confirmation par les données expérimentales.

3. Différentes autres considérations témoignent de la nécessité d'une généralisation des équations (81.3) et (81.4); deux exemples suffiront pour le montrer.

Exemple 1. Soit une sphère métallique portant une charge électrique Q et placée dans un milieu homogène illimité (fig. 206). Si le milieu est conducteur on verra apparaître des courants électriques radiaux qui créeront un champ magnétique. Lorsqu'on cherche à déterminer la direction de ce champ, on se heurte à la difficulté suivante. Le vecteur $\boldsymbol{B}$ ne peut avoir de composante radiale. Le système présente une symétrie sphérique. Si le vecteur $\boldsymbol{B}$ avait une composante radiale, celle-ci devrait être la même en tous les points de toute sphère S concentrique à la surface de la sphère métallique. Sur la sphère S la composante radiale de $\boldsymbol{B}$ serait partout dirigée soit vers le centre de la sphère métallique, soit en sens inverse. Dans les deux cas le flux du vecteur $\boldsymbol{B}$ à travers l'enveloppe sphérique S serait différent de zéro, ce qui est en contradiction avec l'équation (58.1). On pourrait en conclure que le vecteur $\boldsymbol{B}$ devrait être orthogonal au rayon reliant le centre de la sphère et le point considéré. Cette solution est également erronée puisque toutes les directions orthogonales à un rayon sont parfaitement équivalentes. La seule possibilité compatible avec la symétrie sphérique qui subsiste est que les vecteurs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$ soient partout nuls. Mais dans ce cas le courant j doit être également nul, conformément à l'équation (81.4). Il s'ensuit que les équations (81.4) et (81.3) ne peuvent être vérifiées dans le cas considéré.

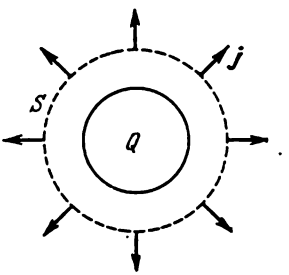


Fig. 206

Pour lever cette contradiction on doit admettre que les champs magnétiques peuvent être créés non seulement par les courants de conduction, mais par autre chose encore. On doit ajouter au courant de conduction $\mathcal{J}$ quelque chose qui soit en mesure de détruire le champ magnétique créé par ce courant. Ce quelque chose est le courant de déplacement. Sa valeur $\mathcal{J}_{\text{dép}}$ est définie par la condition

$\mathcal{J} + \mathcal{J}_{\text{dép}} = 0$. Comme le courant de conduction total s'écoulant de la sphère chargée est lié à la charge Q par la relation $\mathcal{J} = -dQ/dt$, on doit avoir $\mathcal{J}_{\text{dép}} = dQ/dt$. D'après la loi de Coulomb $Q = r^2D$. En différentiant cette expression et en divisant le résultat par la surface de la sphère $4\pi r^2$ on obtient la densité du courant de déplacement :

$$j_{\text{dép}} = \frac{\dot{Q}}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi}\dot{D}.$$

C'est la même expression que (81.6).

4. Exemple 2. Relions par un fil les armatures d'un condensateur plan chargé (fig. 207). Le fil sera parcouru par un courant électrique. L'application de la formule (81.3) conduit à nouveau à des difficultés. La circulation du vecteur H figurant dans le premier membre de l'équation (81.3) ne dépend que de la forme et de la position du contour L. C'est une quantité bien définie, tandis que le courant $\mathcal{J}$ figurant dans le second membre de cette même équation ne l'est pas. Pour définir $\mathcal{J}$ il faut tracer en pensée une surface S s'appuyant sur le contour L et calculer le courant qui la traverse. Or, comme l'intensité des courants alternatifs peut varier le long du fil, la valeur de $\mathcal{J}$ dépendra de l'endroit où la surface S coupe le fil conducteur. Cette indétermination devient particulièrement nette si on fait passer la surface S entre les armatures du condensateur sans qu'elle rencontre le fil parcouru par le courant. Dans ce cas $\mathcal{J} = 0$. Pour lever cette indétermination on doit ajouter au courant $\mathcal{J}$ dans l'équation (81.3) un terme supplémentaire $\mathcal{J}_{\text{dép}}$ tel que la somme $\mathcal{J} + \mathcal{J}_{\text{dép}}$ ne dépende pas du choix de la surface S. Ce terme est le courant de déplacement.

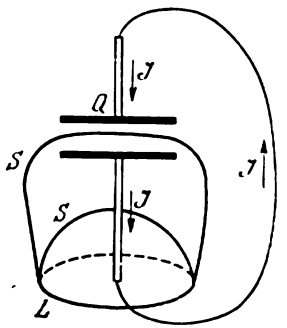


Fig. 207

Dire que le courant total $\mathcal{J} + \mathcal{J}_{\text{dép}}$ ne dépend pas de la surface S s'appuyant sur le même contour L c'est affirmer que le courant total passant à travers toute surface fermée est toujours égal à zéro. Les courants qui satisfont à cette condition sont appelés courants *fermés*. On ne doit pas associer à ce terme l'idée que les lignes de courant sont fermées. Si les lignes de courant sont fermées, les courants le sont aussi, mais la proposition inverse n'est pas toujours vraie : les lignes de courant des courants fermés ne sont pas nécessairement fermées. On peut dire que l'hypothèse de Maxwell consiste à affirmer tout formellement que *tout courant total est nécessairement fermé*. Les courants de conduction qui ne sont pas fermés eux-mêmes sont fermés par les courants de déplacement.

Partant de la condition que le courant total doit être fermé, on peut établir les expressions du courant de déplacement et de sa densité. Reprenons l'exemple relatif au condensateur. En idéalisant ce système on peut dire que le fil n'est parcouru que par le courant de conduction et le condensateur ne l'est que par le courant de déplacement. Le courant de déplacement complète le courant de conduction afin que le courant total soit fermé. Par suite le courant de conduction parcourant le fil doit être égal au courant de déplacement dans le condensateur : $\mathcal{J}_{\text{dép}} = \dot{Q}$, où Q est la charge de l'armature vers laquelle est dirigé le courant. On a évidemment $Q = S\sigma = SD/(4\pi)$. En dérivant par rapport au temps et en divisant le résultat par S on obtient de nouveau

$$j_{\text{dép}} = \frac{1}{4\pi}\dot{D}.$$

Ainsi, en utilisant trois procédés différents, on obtient la même expression de la densité du courant de déplacement.

5. Les courants de déplacement n'existent que là où varie le champ électrique (plus exactement l'induction électrique D). La signification physique de l'hypothèse de Maxwell concernant le courant de déplacement réside en ce que *les champs électriques variables donnent naissance à des champs magnétiques.* Cette découverte appartient uniquement à Maxwell et elle est analogue à la découverte de l'induction électromagnétique, selon laquelle les champs magnétiques variables génèrent des champs électriques.

6. Dans les diélectriques le courant de déplacement comporte deux composantes essentiellement différentes. Par définition le vecteur induction électrique $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$ et par suite

$$j_{\text{dép}} = \frac{1}{4\pi}\dot{\boldsymbol{E}} + \dot{\boldsymbol{P}}. \tag{81.9}$$

La grandeur $\dot{\boldsymbol{P}}$ est appelée *densité du courant de polarisation.* Le vecteur polarisation est défini par $\boldsymbol{P} = \sum e_i \boldsymbol{r}_i$, la sommation étant effectuée sur toutes les charges liées contenues dans l'unité de volume de la substance. En dérivant cette expression par rapport au temps on obtient

$$j_{\text{pol}} \equiv \dot{\boldsymbol{P}} = \sum e_i \boldsymbol{v}_i,$$

où $\boldsymbol{v}_i$ est la vitesse de mouvement de la i-ème charge. *Le courant de polarisation est donc le courant électrique produit par le mouvement des charges liées.* En principe ces charges ne se distinguent en rien des charges libres, aussi n'est-il pas étonnant que les courants de polarisation excitent des champs magnétiques. Ce qui est entièrement nouveau est que la deuxième composante du courant de dépla-

cement $\frac{1}{4\pi}\dot{E}$, qui est déterminée non par le mouvement des charges mais uniquement par les variations du champ électrique dans le temps, constitue aussi une source de champ magnétique. *Même dans le vide toute variation dans le temps du champ électrique excite un champ magnétique dans le milieu environnant.* La découverte de ce résultat fut le pas décisif qui permit à Maxwell d'élaborer son électrodynamique.

PROBLÈMES

1. L'espace entre les armatures d'un condensateur cylindrique long est occupé par un diélectrique homogène de faible conductibilité électrique. Lorsque le condensateur est chargé, le diélectrique est parcouru par un courant électrique allant d'une armature à l'autre. Calculer l'intensité du champ magnétique entre les armatures en négligeant les effets de bord.

Réponse. $H = 0$.

2. Un condensateur plan préalablement chargé et débranché de la source de courant se décharge lentement par des courants volumiques de conduction qui circulent dans le diélectrique entre les armatures du fait de l'existence d'une faible conductibilité électrique. Calculer l'intensité du champ magnétique à l'intérieur du condensateur en négligeant les effets de bord.

Solution. En désignant par σ la densité superficielle d'électricité sur l'armature positive, on a $D = 4\pi\sigma$ et par suite $j_{\text{dép}} = \frac{1}{4\pi}\dot{D} = \dot{\sigma}$. D'après la loi de la conservation des charges électriques $j = -\dot{\sigma}$. Par conséquent $j + j_{\text{dép}} = j_{\text{tot}} = 0$. Le champ magnétique dans le condensateur est nul.

3. Un condensateur plan constitué de deux disques identiques de rayon R, après avoir été chargé et débranché de la source d'électricité, est perforé par une étincelle électrique le long de son axe. En considérant que la décharge est quasi stationnaire et en négligeant les effets de bord, calculer la valeur instantanée de l'intensité du champ magnétique dans le condensateur (en fonction de la distance r jusqu'à son axe) sachant qu'à l'instant considéré l'intensité de courant dans l'étincelle est $\mathcal{J}$.

Solution. Par raison de symétrie, les lignes de force magnétiques seront des cercles coaxiaux dont l'axe commun est confondu avec l'axe du condensateur. Le champ H est donné par la formule

$$\oint H\,dl = 2\pi r H = \frac{4\pi}{c}(\mathcal{J} + i_{\text{dép}}),$$

où $i_{\text{dép}} = \mathcal{J}r^2/R^2$ est le courant de déplacement embrassé par un cercle de rayon r. On obtient

$$H = \frac{2\mathcal{J}}{cr}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

4. Un condensateur plan est composé de deux disques métalliques identiques entre lesquels se trouve un diélectrique homogène de permittivité ε. La distance entre les faces des disques est d. On applique aux armatures une tension alternative $V = V_0 \sin \omega t$. En négligeant les effets de bord, calculer le champ magnétique entre les armatures du condensateur.

Réponse. $H = \frac{\varepsilon\omega r}{2cd} V_0 \cos \omega t$, où r est la distance jusqu'à l'axe du condensateur. Les lignes de force magnétiques sont des cercles coaxiaux dont l'axe commun coïncide avec l'axe du condensateur.

§ 82. Le système d'équations de Maxwell

1. Après avoir complété les principales données disponibles dans le domaine de l'électromagnétisme par sa découverte de la génération des champs magnétiques par les courants de déplacement, Maxwell fut en mesure d'établir le *système des équations fondamentales de l'électrodynamique*. Ce système comporte quatre équations. Sous forme intégrale elles s'écrivent:

$$\oint_L \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) dS, \tag{82.1}$$

$$\oint_L \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\, dS, \tag{82.2}$$

$$\oint_S (\boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S}) = 4\pi \int \rho\, dV, \tag{82.3}$$

$$\oint_S (\boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}) = 0 \tag{82.4}$$

et sous forme différentielle

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{82.1a}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{82.2a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{82.3a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{82.4a}$$

L'équation de continuité exprimant la loi de la conservation des charges électriques ne fait pas partie des équations fondamentales, puisqu'elle dérive des équations (82.1) et (82.3). Pour le démontrer considérons un contour L infiniment petit et une surface quelconque S qu'il limite; réduisons maintenant ce contour à un point tout en laissant finie la surface S. A la limite la circulation $\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}$ s'annule et S devient une surface fermée; l'équation (82.1) devient alors

$$\oint \left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi} \dot{\boldsymbol{D}} \right) dS = 0.$$

L'intégrale $\oint (\boldsymbol{j}\, d\boldsymbol{S})$ représente le courant $\mathcal{J}$ sortant du volume V délimité par la surface S. D'autre part, en écrivant (82.3) sous la forme

$$\oint (\boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S}) = 4\pi q$$

on obtient après dérivation par rapport au temps

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\oint(\dot{D}\,dS).$$

On obtient finalement l'équation

$$\frac{\partial q}{\partial t}=-\mathcal{J}$$

exprimant la loi de la conservation des charges électriques. Cette même loi peut être déduite des équations différentielles (82.1a) et (82.3a). Il suffit pour cela de prendre la divergence des deux membres de (82.2a) et d'utiliser l'équation (82.3a). On retrouve alors l'équation (81.1).

Les équations de Maxwell montrent que *le champ électrique peut avoir pour source soit des charges électriques, soit des champs magnétiques variables dans le temps. Les champs magnétiques peuvent être excités soit par des charges électriques en mouvement* (*courants électriques*), *soit par des champs électriques alternatifs.* Les équations ne sont pas symétriques par rapport aux champs électrique et magnétique, car si les charges électriques existent dans la Nature, on ne connaît pas actuellement de charges magnétiques. Cherchant à rendre symétriques les équations de l'électrodynamique, Dirac émit l'hypothèse de l'existence de charges magnétiques, i.e. *de pôles magnétiques isolés* ou *monopôles.* Logiquement on ne peut s'élever contre cette hypothèse et si elle s'avérait exacte on serait amené à procéder à une généralisation des équations de Maxwell. Aux sources de champs magnétiques viendraient s'ajouter les charges magnétiques et aux sources de champs électriques on devrait ajouter les courants magnétiques résultant du mouvement des charges magnétiques. La validité des équations de Maxwell serait alors limitée aux régions de l'espace où il n'y a ni charges ni courants magnétiques. Mais de nombreuses tentatives de déceler l'existence de monopôles magnétiques se sont avérées infructueuses.

2. Les équations de Maxwell sous leur forme intégrale restent valables dans le cas de l'existence de *surfaces de discontinuité* sur lesquelles les propriétés du milieu ou les intensités des champs électrique et magnétique varient par saut. Cette forme des équations de Maxwell est de validité plus générale que la forme différentielle de ces équations qui implique que toutes les grandeurs varient de façon continue dans le temps et l'espace. On peut cependant arriver à une parfaite équivalence mathématique en imposant aux équations différentielles des *conditions aux limites* auxquelles doit satisfaire le champ électromagnétique à la surface de séparation de deux milieux. La forme intégrale des équations de Maxwell implique ces conditions aux limites. Nons avons déja établi ces conditions aux limites

qui s'énoncent comme suit:

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma, \tag{82.5}$$

$$B_{1n} = B_{2n}, \tag{82.6}$$

$$E_{1t} = E_{2t}, \tag{82.7}$$

$$[\boldsymbol{n}\boldsymbol{H}_2] - [\boldsymbol{n}\boldsymbol{H}_1] = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}, \tag{82.8}$$

où σ est la densité surfacique des charges électriques et $\boldsymbol{i}$ la densité superficielle du courant de conduction sur la surface de séparation considérée. Dans le cas particulier où il n'y a pas de courants superficiels, on aura à la place de (82.8):

$$H_{1t} = H_{2t}. \tag{82.9}$$

Remarquons encore une fois que les considérations que nous avons utilisées pour arriver aux équations de Maxwell n'en sont pas des démonstrations. Aucune théorie dépassée ne peut renfermer de nouveaux principes qui pourraient en être logiquement déduits. En conséquence les équations de Maxwell ne peuvent être démontrées. On doit les considérer comme les *axiomes fondamentaux de l'électrodynamique résultant d'une généralisation des faits expérimentaux.*

3. Les équations fondamentales de Maxwell écrites sous la forme (82.1) à (82.4) ou sous la forme (82.1a) à (82.4a) ne forment pas encore le système complet des équations du champ électromagnétique. Deux de ces équations sont vectorielles et les deux autres sont scalaires. En les écrivant en fonction des coordonnées on obtient 8 équations reliant entre elles 16 grandeurs: 15 composantes des vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{j}$ et le scalaire ρ. Il est évident que 8 équations ne peuvent suffire pour déterminer 16 grandeurs. Les équations fondamentales de Maxwell ne contiennent aucune constante caractérisant les propriétés du milieu où règne le champ électromagnétique. Il faut donc adjoindre à ces équations des relations entre les grandeurs caractérisant les propriétés individuelles du milieu. Ces relations sont appelées *équations matérielles.*

Le procédé de principe permettant d'établir les équations matérielles consiste à mettre en œuvre les théories moléculaires de la polarisation, de l'aimantation et de la conductibilité électrique du milieu. Ces théories sont fondées sur des modèles idéalisés du milieu. En leur appliquant les équations de la mécanique classique ou quantique ainsi que les méthodes de la physique statistique, on peut établir une relation entre les vecteurs $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{j}$, d'une part, et les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$, d'autre part. On obtient ainsi des relations plus ou moins compliquées suivant les caractéristiques du milieu et du champ électromagnétique, qui, ajoutées aux équations fondamentales de Maxwell, permettent d'obtenir le système complet des équations de l'électrodynamique.

Les équations matérielles sont les plus simples dans le cas de champs électromagnétiques faibles variant relativement lentement dans le temps et dans l'espace. Dans ce cas pour des milieux isotropes non ferromagnétiques et non ferroélectriques les équations matérielles s'écrivent comme suit:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{82.10}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{82.11}$$

$$\boldsymbol{j} = \lambda \boldsymbol{E}, \tag{82.12}$$

où ε, μ, λ sont les constantes caractérisant les propriétés électromagnétiques du milieu, que l'on appelle respectivement *permittivité diélectrique*, *perméabilité magnétique* et *conductibilité électrique*. Maxwell utilisa justement ces équations matérielles quoiqu'il ne pût, bien entendu, relier les grandeurs ε, μ et λ aux constantes atomiques et moléculaires des substances et fût obligé de les introduire dans la théorie comme des constantes *phénoménologiques*. D'après la théorie électronique les équations matérielles ne sont vérifiées que si les deux conditions suivantes sont remplies: 1) le champ électromagnétique ne doit pas beaucoup varier au cours d'intervalles de temps comparables à la période propre des oscillations intra-atomiques et intramoléculaires; 2) la variation spatiale du champ doit être petite sur des distances de l'ordre des distances atomiques et moléculaires. C'est ce qu'il faut entendre par « variation lente » du champ électromagnétique dont il a été question plus haut.

On inclut parfois les équations (82.10) à (82.12) dans le système des équations de Maxwell. Nous ne le faisons pas car ces équations ne sont pas aussi générales et aussi fondamentales que les équations de Maxwell proprement dites. Nous n'entendrons donc par équations de Maxwell que les quatre équations (82.1) à (82.4) ou (82.1a) à (82.4a).

Dans le cas de champs stationnaires ($\partial \boldsymbol{D}/\partial t = \partial \boldsymbol{B}/\partial t = 0$) les équations de Maxwell se scindent en deux groupes d'équations indépendantes. Le premier groupe contient les équations de l'électrostatique

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0; \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{82.13}$$

et le second contient les équations de la magnétostatique

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{82.14}$$

Dans ce cas les champs électrique et magnétique ne dépendent pas l'un de l'autre. Le champ électrique n'aura alors pour source que les charges électriques et le champ magnétique ne sera excité que par les courants de conduction.

§ 83. Vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques

1. Un phénomène physique essentiellement nouveau prédit par Maxwell lui-même découle des équations de l'électrodynamique maxwellienne. Il s'agit d'*ondes* ou de *perturbations électromagnétiques* se propageant dans l'espace avec une vitesse déterminée. Un exemple simple suffira à le démontrer. Considérons un milieu diélectrique homogène illimité caractérisé par la permittivité diélectrique ε et la perméabilité magnétique μ. Plaçons dans ce milieu un plan infini uniformément chargé que nous prendrons pour plan de coordonnées XY (fig. 208). Tant que ce plan et les charges qu'il porte sont immobiles, le champ électrique dans le milieu environnant sera orthogonal au plan et sera égal à $E = 2\pi\sigma/\varepsilon$, conformément au théorème de Gauss et par raisons de symétrie (σ est la densité surfacique des charges électriques, cf. §§ 6 et 13). Mettons maintenant en mouvement le plan et les charges qu'il porte le long de l'axe X avec une vitesse variée. Nous montrerons plus loin que ce mouvement fait apparaître un champ magnétique et une composante transversale du champ électrique (i.e. parallèle au plan chargé). Ce sont là des *champs variables* qui font l'objet du présent paragraphe. Quant à la composante normale du vecteur $\boldsymbol{E}$, elle ne changera pas, puisque les raisonnements développés pour établir la formule (6.1) restent en vigueur ici, à condition de remplacer E par D_n. La composante normale du vecteur $\boldsymbol{E}$ est simplement le champ électrostatique du plan chargé qui vient se superposer au champ électromagnétique des charges électriques en mouvement. Comme le champ électrostatique ne nous intéresse pas, on négligera l'existence de la composante normale du champ $\boldsymbol{E}$. On pourrait se libérer complètement de la composante normale en disposant infiniment près du plan chargé un second plan fixe chargé d'électricité de signe opposé. Le champ électrique de ce second plan serait purement statique et aurait détruit la composante normale dont il est question. Comme les charges de ce second plan sont fixes, sa présence ne saurait affecter le champ alternatif de l'onde électromagnétique.

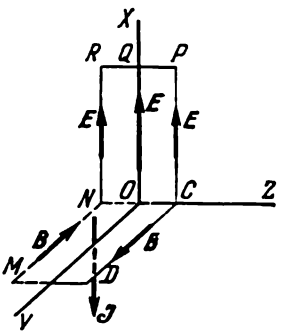


Fig. 208

2. Précisons maintenant quel champ électromagnétique sera excité par un plan chargé du fait de son mouvement. Les charges électriques qui se déplacent avec le plan sont équivalentes à un courant électrique $\mathcal{J}$ parallèle à l'axe X (sur la figure 208 le courant circule dans le sens négatif de l'axe X). Ce courant électrique excite

un champ magnétique dont les lignes de force s'enroulent autour du courant. Dans le cas d'un courant superficiel s'écoulant sur un plan infini, le champ magnétique sera parallèle à l'axe Y: pour $z > 0$, il est orienté dans le sens positif de l'axe Y et pour $z < 0$ il est orienté dans le sens négatif de cet axe. Par raison de symétrie, l'intensité des champs magnétiques à égale distance du plan chargé est la même de part et d'autre du plan, mais les sens du champ magnétique y sont opposés. Conformément à la formule (82.8) un saut du champ magnétique se produit lorsqu'on traverse le plan chargé; ce saut est dû au courant superficiel circulant sur le plan.

Les flux magnétiques embrassés par les contours rectangulaires fixes $OCPQ$ et $NOQR$ symétriques par rapport au plan sont de même grandeur mais de signes opposés. Comme ces flux varient dans le temps, en vertu de la loi de l'induction électromagnétique, ces flux donnent naissance à un champ électrique dont la circulation le long des contours $OCPQ$ et $NOQR$ est différente de zéro. Ce champ électrique est parallèle à l'axe X; comme nous l'avons signalé plus haut, il n'y a pas de champ électrique alternatif le long de l'axe Z et suivant l'axe Y il n'y a pas de champ électrique par raison de symétrie. Comme le flux magnétique à travers le contour $NCPR$ est nul, la circulation du vecteur $\boldsymbol{E}$ le long de ce contour sera nulle. On en conclut qu'à distances égales des deux côtés du plan chargé, le champ électrique alternatif sera de même grandeur et de même orientation. Sur le plan même le champ $\boldsymbol{E}$ aura en général une valeur différente. S'il n'en était pas ainsi, la circulation du vecteur $\boldsymbol{E}$ le long des contours $OCPQ$ et $NOQR$ aurait été nulle et les flux magnétiques embrassés par ces contours auraient été constants dans le temps.

Le champ électrique $\boldsymbol{E}$ généré par le champ magnétique variable crée à son tour un flux électrique variable (flux du vecteur $\boldsymbol{B}$) à travers le contour rectangulaire $CNMD$ (cf. fig. 208). Autrement dit, on voit apparaître un courant de déplacement qui donne naissance à un champ magnétique parallèle à l'axe Y. Le sens de ce champ magnétique est donné par la loi de Lenz: il s'opposera à toute variation du champ magnétique préexistant. Si on arrête le mouvement du plan chargé, le courant $\mathcal{J}$ disparaîtra, mais le champ électromagnétique qu'il avait déjà excité subsistera. Les champs électrique et magnétique se soutiendront mutuellement, i.e. toute variation du champ magnétique excitera un champ électrique et vice versa. Ainsi, après arrêt du mouvement des deux côtés du plan chargé subsisteront deux champs électromagnétiques symétriques par rapport à ce plan. Nous montrerons plus loin que les champs électromagnétiques ne resteront pas sur place, mais se propageront en sens opposés en s'éloignant du plan chargé. Ce sont ce que l'on appelle des *ondes* ou des *perturbations électromagnétiques*. De ce qui précède on conclut qu'elles sont transversales vis-à-vis des vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$.

3. Considérons l'une de ces perturbations, par exemple celle qui

se trouve à droite du plan chargé (fig. 209). A un instant donné le champ électrique sera représenté par la courbe *I* contenue dans le plan vertical et le champ magnétique sera représenté par la courbe *II* contenue dans le plan horizontal. Admettons que cette image du champ électromagnétique se déplace sans changer de forme de gauche à droite avec une vitesse v; les calculs ultérieurs justifient pleinement cette hypothèse. Traçons deux contours rectangulaires fixes *OAMN* et *OQPA* et écrivons les équations de Maxwell sous la forme

$$\oint_{OAMN} E\,dl = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_m}{\partial t},$$

$$\oint_{OQPA} H\,dl = \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{él}}{\partial t},$$

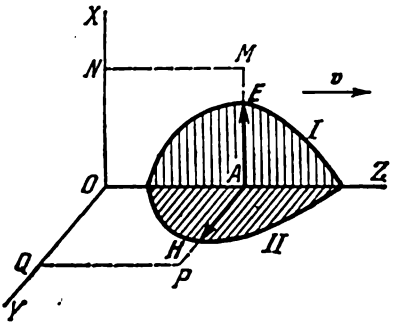


Fig. 209

où Φ_m est le flux magnétique et $\Phi_{él}$ le flux du vecteur D à travers les contours correspondants. Posons pour simplifier que la longueur du côté *AM* est égale à l'unité. Comme sur le contour *OAMN* le champ E n'est différent de zéro que sur le côté *AM*, la première des équations ci-dessus s'écrit

$$E \equiv E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}.$$

De même, la deuxième équation prend la forme

$$H \equiv H_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_{él}}{\partial t}.$$

Selon notre hypothèse, au cours du temps dt le champ électromagnétique se déplace d'une distance $v\,dt$. Le flux magnétique $vB\,dt$ sortira du contour *OAMN* et le flux électrique $vD\,dt$ sortira du contour *OQPA*. De ce fait les flux Φ_m et $\Phi_{él}$ embrassés par ces contours varieront de $d\Phi_m = -vB\,dt$, $d\Phi_{él} = -vD\,dt$. De là $\partial\Phi_m/\partial t = -vB$, $\partial\Phi_{él}/\partial t = -vD$; on tire des équations précédentes

$$E = \frac{v}{c}B, \quad H = \frac{v}{c}D. \tag{83.1}$$

Jusqu'ici nous n'avons pas utilisé les équations matérielles $D = \varepsilon E$ et $B = \mu H$. A l'aide de ces équations on peut éliminer D et B, ce qui donne

$$E = \frac{v}{c}\mu H, \quad H = \frac{v}{c}\varepsilon E. \tag{83.1a}$$

On en tire

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{83.2}$$

On obtient donc pour la vitesse v une valeur finie parfaitement déterminée et différente de zéro. Ce résultat justifie l'hypothèse que nous avons faite sur le caractère des variations de la perturbation électromagnétique dans le temps et l'espace. En effet, ayant admis que la perturbation électromagnétique se propageait sans changer de forme, nous n'avons rien dit au sujet de la vitesse de sa propagation que nous avons déterminée ensuite en imposant que la perturbation vérifie les équations de Maxwell. Or ce n'est possible que si la vitesse v est définie par la formule (83.2). La perturbation ne peut rester sur place car alors la vitesse v serait nulle. Elle ne peut non plus se propager instantanément, car on arriverait au résultat $v = \infty$. Ainsi les équations de Maxwell admettent pour solution l'existence de perturbations électromagnétiques se propageant avec la vitesse $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

4. On peut écrire les formules (83.1) sous forme vectorielle:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}[\boldsymbol{vB}], \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}[\boldsymbol{vD}]. \tag{83.3}$$

Dans ce cas $\boldsymbol{v}$ caractérise non seulement la grandeur de la vitesse de propagation de la perturbation, mais aussi son sens: la perturbation qui se propage de droite à gauche par rapport au plan est décrite par ces mêmes équations. Dans les deux cas les vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$ forment un trièdre de référence direct (fig. 210). Si on inverse le sens de l'un des vecteurs $\boldsymbol{E}$ ou $\boldsymbol{B}$, le sens de propagation de la perturbation s'inversera lui aussi.

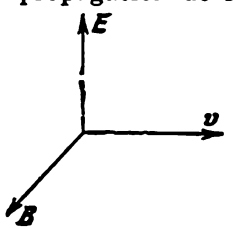


Fig. 210

Les formules (83.3) décrivent la *perturbation* dite *plane*, i.e. une perturbation telle que le champ électromagnétique soit le même en tous les points d'un plan orthogonal à sa direction de propagation (ce plan est appelé *front de l'onde*). Pour la caractériser plus exactement on l'appelle *perturbation* (ou *onde*) *progressive*, puisqu'elle ne se propage que dans une seule direction. Dans l'exemple considéré, le vecteur électrique était parallèle à l'axe X et le vecteur magnétique à l'axe Y. Il est possible que la perturbation ait son vecteur électrique dirigé suivant l'axe Y et le vecteur magnétique suivant l'axe X. Comme les équations de Maxwell sont linéaires et homogènes, toute superposition de ces perturbations sera elle aussi solution de ces équations. Cette superposition sera elle aussi une *onde électromagnétique progressive plane* qui vérifie (83.3). Les vecteurs électrique et magnétique de cette onde seront toujours rectangulaires et

le seront aussi par rapport à sa direction de propagation. Il n'est cependant pas nécessaire que le vecteur électrique soit toujours contenu dans un seul et même plan et son orientation spatiale peut varier. La même chose vaut pour le vecteur magnétique. Dans le cas particulier où le vecteur électrique (et par conséquent le vecteur magnétique) est contenu dans un même plan en tous les points de l'espace, on dit que l'onde est *à polarisation rectiligne.*

5. L'exemple imaginaire d'excitation d'ondes électromagnétiques est théoriquement particulièrement simple. Il n'est pas nécessaire de prendre un plan chargé infini et de le mettre en mouvement. Nous l'avons fait uniquement pour obtenir une perturbation plane. Ce qui importe pour l'excitation d'ondes électromagnétiques, c'est l'existence de charges électriques animées d'un mouvement accéléré. Dans les postes d'émission radioélectriques on excite les ondes électromagnétiques à l'aide de courants électriques rapidement variables circulant dans un système adéquat de conducteurs (les antennes). Ces ondes ne sont évidemment pas planes ; ce n'est qu'à grande distance de l'antenne d'émission que de petits segments de ces ondes peuvent être assimilés à des ondes planes. C'est pour cela que l'exemple des perturbations planes permet de mettre en évidence les particularités les plus notables des ondes électromagnétiques.

6. Il résulte de la formule (83.1a) que

$$\varepsilon E^2 = \mu H^2. \tag{83.4}$$

Cela signifie que *dans une onde électromagnétique progressive et plane l'énergie électrique est égale à tout instant à l'énergie magnétique.* On retrouve une situation analogue dans le cas d'une onde élastique progressive où l'énergie totale se répartit également en énergie cinétique et en énergie potentielle (cf. t. I, § 82). Cette propriété est commune à toutes les perturbations satisfaisant au *principe de superposition.* Pour les ondes électromagnétiques on pourrait utiliser la même démonstration que celle que nous avons donnée en mécanique pour les ondes élastiques (cf. t. I, § 82, pt. 2). On veillera seulement à considérer des perturbations à l'état initial où un seul des champs électrique ou magnétique est différent de zéro.

7. Pour le vide $\varepsilon = \mu = 1$ et la formule (83.2) donne $v = c$. Les expériences de Wilhelm Weber (1804-1891) et de Rudolf Kohlrausch (1809-1858) consacrées à la mesure de la constante électrodynamique c, ainsi que toutes les mesures ultérieures, ont montré que *la constante électrodynamique est égale à la vitesse de la lumière dans le vide.* Par conséquent *les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide avec la vitesse de la lumière.* C'est probablement ce résultat qui suggéra à Maxwell l'idée de la théorie électromagnétique de la lumière. Selon cette théorie *la lumière est un cas particulier des ondes électromagnétiques.* La lumière ne se distingue de toutes les autres ondes électromagnétiques que quantitativement, par sa lon-

gueur d'onde. Maxwell n'essaya pas de produire des ondes électromagnétiques quoiqu'il fût aussi bon expérimentateur que théoricien hors classe. Il ne vit pas la confirmation expérimentale de sa découverte car il mourut en 1879 âgé de 48 ans. C'est en 1887-1888 que Hertz réussit à générer pour la première fois des ondes électromagnétiques. Il montra que les ondes électromagnétiques se propagent, se réfléchissent, sont réfractées, contournent les obstacles et interfèrent entre elles. Il mesura leur vitesse de propagation et montra que leurs propriétés sont conformes aux équations de Maxwell. A partir de ce moment la théorie de Maxwell fut unanimement reconnue. (Les expériences de Hertz seront décrites au § 142, après que l'on apprendra à connaître les courants alternatifs et les oscillations électromagnétiques.) Les découvertes de Maxwell et de Hertz déterminèrent l'invention de la radio par A. S. Popov (1859-1906).

8. Dans le cas de forces conservatives l'équation de Newton $m\frac{d^2r}{dt^2} = F(r)$ ne change pas si on inverse le signe du temps, i.e. si on remplace t par $-t$. A cette symétrie des équations de la mécanique est liée la propriété suivante des forces conservatives. *Si à un instant donné on inverse les vitesses de tous les points matériels d'un système conservatif fermé, le système répétera son mouvement en sens inverse.*

Pour les milieux non conducteurs (non absorbants) les équations de Maxwell présentent une symétrie analogue. En effet, pour de tels milieux, les équations de Maxwell (compte tenu des équations matérielles) s'écrivent comme suit:

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{B}}{\mu}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},\\ \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E})=4\pi\rho, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0.\end{gathered} \tag{83.5}$$

Si on inverse les signes du temps t et du vecteur $\boldsymbol{B}$, ces équations s'écrivent

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\left(\frac{-\boldsymbol{B}}{\mu}\right)=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial(-t)}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial(-\boldsymbol{B})}{\partial(-t)},\\ \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{E})=4\pi\rho, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0.\end{gathered} \tag{83.6}$$

Or, comme ces équations sont identiques à (83.5), on en conclut que *pour les milieux non conducteurs les équations de Maxwell ne changent pas si on change simultanément les signes de t et de B ou ceux de t et de E.*

Considérons maintenant une solution arbitraire des équations (83.5):

$$\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}), \ \boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{r}). \tag{83.7}$$

Dans ce cas les expressions

$$\boldsymbol{E}_1(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(-t, \boldsymbol{r}), \ \boldsymbol{B}_1(t, \boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\Phi}(-t, \boldsymbol{r}) \tag{83.8}$$

seront également des solutions des équations (83.5) puisqu'elles vérifient les équations (83.6) qui sont identiques aux équations (83.5). Si à un instant initial (arbitrairement choisi) $t = 0$ on se fixe dans tout l'espace les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$, la solution du système (83.5) sera univoque. La solution (83.7) satisfait aux conditions initiales

$$\boldsymbol{E}_{t=0} = \boldsymbol{F}(0, r), \qquad \boldsymbol{B}_{t=0} = \boldsymbol{\Phi}(0, r),$$

et la solution (83.8) satisfait aux conditions initiales

$$\boldsymbol{E}_{1,\, t=0} = \boldsymbol{F}(0, r), \quad \boldsymbol{B}_{1,\, t=0} = -\boldsymbol{\Phi}(0, r).$$

Ces solutions sont évidemment liées par les relations

$$\boldsymbol{E}_1(t, r) = \boldsymbol{E}(-t, r), \; \boldsymbol{B}_1(t, r) = -\boldsymbol{B}(-t, r),$$

qui expriment le résultat suivant. *Si à un certain instant on inverse le sens du vecteur magnétique en tous les points de l'espace, en l'absence de corps conducteurs le champ électromagnétique retracera son histoire en sens inverse, à cela près qu'aux instants correspondants le sens du vecteur* $\boldsymbol{B}$ *sera inverse à son sens dans le processus initial.*

§ 84. Energie et flux d'énergie

1. On doit compléter les équations de Maxwell par des relations exprimant la loi de la conservation de l'énergie. Posons que le milieu dans lequel on excite le champ électromagnétique est fixe. Lorsque le champ électromagnétique varie et qu'un courant électrique se met à circuler, l'unité de volume est le siège du travail élémentaire extérieur:

$$\delta A^{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{j}\boldsymbol{E})\, dt. \tag{84.1}$$

Certains termes de cette équation avaient déjà été obtenus en électrostatique et en théorie des champs magnétiques des courants continus. Remarquons encore que pour établir le travail d'aimantation $\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{B}$ on avait utilisé le théorème sur la circulation sans tenir compte du courant de déplacement. Or cela ne doit pas nécessairement affecter la généralité du résultat final $\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{B}$ puisqu'au départ on avait utilisé l'expression du travail élémentaire (69.1) qui avait été obtenue aussi sans tenir compte du courant de déplacement. Cette circonstance n'empêche donc pas d'étendre l'expression (84.1) au cas de champs électromagnétiques alternatifs. Cette expression doit être considérée comme l'un des principaux postulats de la théorie macroscopique de l'électricité.

2. Le travail (84.1) sert à augmenter l'énergie interne, déduction faite de la chaleur évacuée par conductibilité thermique de l'unité de volume du milieu. On peut éliminer la conductibilité thermique en posant qu'elle est nulle. La généralité du résultat final n'en souffrira pas. Dans ces conditions, en notant u l'énergie interne de l'unité de volume du milieu, on a $\delta A^{\text{ext}} = du$ ou

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}}) + (\boldsymbol{j}\boldsymbol{E}). \tag{84.2}$$

On doit entendre pas u la densité de toute l'énergie interne et non de la seule partie électromagnétique. De ce fait l'équation (84.2) est valable pour tous les milieux, y compris les milieux ferromagnétiques et ferroélectriques. Elle tient compte non seulement de la chaleur de Joule (terme $\boldsymbol{j}\boldsymbol{E}$), mais aussi de la chaleur d'hystérésis ferromagnétique et ferroélectrique. Transformons le second membre de (84.2) à l'aide des équations de Maxwell (82.1a) et (82.2a):

$$\boldsymbol{E}\left(\frac{1}{4\pi}\dot{\boldsymbol{D}} + \boldsymbol{j}\right) + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{B}} = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}).$$

En vertu de l'identité vectorielle connue

$$\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\operatorname{div}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}].$$

En introduisant la notation

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}], \tag{84.3}$$

l'équation (84.2) se laisse écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{S} = 0. \tag{84.4}$$

Pour donner une interprétation physique de cette équation comparons-la à l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0, \tag{84.5}$$

où ρ désigne la densité de la substance ou celle de l'électricité et $\boldsymbol{j}$ la densité du flux de substance ou celle du courant électrique.

L'existence d'une analogie formelle entre les équations (84.4) et (84.5) conduit à la conception de l'écoulement de l'énergie dans l'espace, semblable à celui d'un fluide, le vecteur $\boldsymbol{S}$ représentant la *densité de flux de l'énergie électromagnétique*. Cette conception s'exprime d'une façon plus directe et plus évidente en termes mathématiques en écrivant l'équation (84.4) sous sa forme intégrale:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u\,dV = \oint S_n\,dF, \tag{84.4a}$$

où V est un volume arbitraire du milieu délimité par la surface fermée F et $\boldsymbol{n}$ la normale intérieure à cette surface. Sous cette forme l'équation (84.4) signifie que l'énergie interne dans le volume V s'accroît aux dépens de l'énergie électromagnétique entrant dans ce volume à travers la surface F et provenant du milieu environnant.

La conception d'un écoulement d'énergie subsiste lorsqu'on tient compte de la conductibilité thermique et des propriétés élastiques du milieu à condition d'ajouter à la densité de flux d'énergie électromagnétique la *densité de flux de chaleur* et la *densité d'énergie élastique*.

La notion générale du flux spatial d'énergie fut introduite en 1874 par N. A. Oumov (1846-1915). Aussi appelle-t-on le vecteur densité de flux d'énergie *vecteur d'Oumov* lorsqu'on ne précise pas la nature de l'énergie en cause. Des expressions concrètes de ce vecteur ne pouvaient être établies par Oumov que pour les milieux élastiques et les liquides visqueux. Onze ans après, les conceptions d'Oumov furent développées et appliquées par Poynting (1852-1914) à l'énergie électromagnétique. Comme c'est Poynting qui avait établi la formule (84.3) le vecteur $\boldsymbol{S}$ s'appelle *vecteur de Poynting*. La formule (84.4) ou (84.4a) qui exprime la loi de la conservation d'énergie en électrodynamique est connue sous le nom de *théorème de Oumov-Poynting*. On notera la remarquable simplicité et la non moins remarquable généralité de la formule (84.3). Le vecteur de Poynting est défini uniquement par les intensités des champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ et ne dépend d'aucune grandeur caractérisant les propriétés individuelles du milieu où se produit l'écoulement d'énergie électromagnétique.

3. Considérons le cas où il n'y a pas d'hystérésis. Le vecteur $\boldsymbol{D}$ est alors une fonction univoque du vecteur $\boldsymbol{E}$ et le vecteur $\boldsymbol{B}$ est une fonction univoque du vecteur $\boldsymbol{H}$. Comme il n'y a pas de chaleur d'hystérésis le travail élémentaire δA^{ext} sera utilisé pour produire de la chaleur de Joule $(\boldsymbol{jE})\,dt$ et pour accroître l'énergie électromagnétique. Conformément à la formule (84.1) l'expression

$$dw = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B}) \tag{84.6}$$

doit être interprétée comme donnant l'accroissement de la densité d'énergie électromagnétique w. Cette dernière est définie par l'intégrale

$$w = \frac{1}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}\,d\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\,d\boldsymbol{B}). \tag{84.7}$$

Dans le cas particulier où les relations $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ sont valables, nous avons

$$w = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon E^2 + \mu H^2) \tag{84.8}$$

ou

$$w = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{ED} + \boldsymbol{HB}). \tag{84.9}$$

4. Considérons quelques exemples d'écoulement de l'énergie électromagnétique.

Exemple 1. *Flux d'énergie dans une onde électromagnétique plane* (voir fig. 210). Puisque l'onde se propage dans une seule direction, l'énergie électromagnétique doit se propager dans cette même direction. Le flux d'énergie est numériquement égal à la quantité d'énergie passant par seconde à travers une surface de un centimètre carré normale à la direction de propagation de l'onde. En notant v la vitesse de propagation de l'onde, on a $S = vw$. D'après (83.4), dans une onde progressive plane, la densité d'énergie électrique est égale à la densité d'énergie magnétique ; par suite $w = \frac{\varepsilon}{4\pi} E^2$. Selon cette même formule (83.4) $\sqrt{\varepsilon} E = \sqrt{\mu} H$ et $w = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\varepsilon\mu} EH$. En tenant compte encore de la formule (83.2) on obtient

$$S = vw = \frac{c}{4\pi} EH.$$

Comme l'onde se propage dans la direction du vecteur $[\boldsymbol{EH}]$ cette dernière formule coïncide avec (84.3).

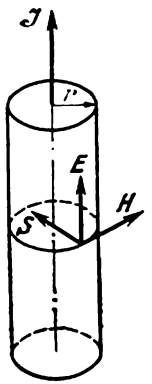


Fig. 211

Exemple 2. *Chaleur de Joule libérée dans un fil conducteur.* Un fil cylindrique de rayon r est parcouru par un courant continu J (fig. 211). Le champ magnétique s'enroule autour du fil et sur la surface du fil vaut $H = 2J/(cr) = 2j\pi r/c$. Le champ électrique $\boldsymbol{E}$ est parallèle à l'axe du fil. Le vecteur de Poynting $\boldsymbol{S}$ est donc dirigé vers l'intérieur du fil normalement à sa surface latérale. Par conséquent l'énergie électromagnétique pénètre dans le fil venant du milieu extérieur. L'aire de la surface latérale du fil est égale à $2\pi rl$, l étant sa longueur. La quantité d'énergie électromagnétique pénétrant dans le fil par seconde est

$$S \cdot 2\pi rl = \frac{c}{4\pi} EH \cdot 2\pi rl = \pi r^2 l \cdot jE = V \cdot jE,$$

où $V = \pi r^2 l$ est le volume du fil. Or la même quantité de chaleur est libérée dans le fil du fait du passage du courant électrique. On en conclut que *l'énergie électromagnétique contenue dans l'espace environnant pénètre dans le fil et y est transformée en chaleur de Joule.*

Exemple 3. *Charge d'un condensateur.* Soit un condensateur plan à armatures circulaires ; sa charge est réalisée dans des

conditions quasi statiques. Nous négligerons les inhomogénéités du champ électromagnétique près des bords du condensateur, ce qui permet d'utiliser le même procédé de calcul que dans l'exemple précédent. On devra seulement remplacer la densité du courant de conduction j par la densité du courant de déplacement $\dot{D}/(4\pi)$. On trouve alors que le condensateur reçoit par seconde du milieu extérieur l'énergie électromagnétique $\frac{V}{4\pi}(E\dot{D})$, où V est le volume du condensateur. L'énergie du condensateur s'accroît dans le temps dt de $dW = \frac{V}{4\pi}(E\dot{D})\,dt = \frac{V}{4\pi}(E\,dD)$. En admettant que $D = \varepsilon E$ l'intégration de l'expression de dW donne

$$W = \frac{V}{8\pi}(ED).$$

Les développements ci-dessus ne seront pas sensiblement modifiés si on tenait compte des inhomogénéités des champs électrique et magnétique à proximité des bords du condensateur. Près des bords le champ E possède une composante radiale et le champ H une composante parallèle à l'axe du condensateur. L'existence de ces composantes fait apparaître des flux d'énergie supplémentaires parallèlement à l'axe du condensateur. Cependant, pour raison de symétrie, le flux d'énergie ascendant sera compensé par le flux descendant. Par suite, le flux total d'énergie pénétrant dans le condensateur n'est déterminé que par la composante axiale du vecteur E et par la composante azimutale du vecteur H. Si on néglige les variations de ces composantes près des bords du condensateur, on retrouve le résultat obtenu plus haut.

Le même procédé de calcul permet de trouver l'expression de l'énergie magnétique d'un solénoïde parcouru par un courant continu. C'est ce que l'on recommande de faire au lecteur.

5. Une remarque de principe s'impose au sujet du procédé utilisé ci-dessus pour obtenir la formule de la densité de flux d'énergie électromagnétique. Les équations (84.4) et (84.4a) ne changent pas si on remplace le vecteur S par $S + \operatorname{rot} a$, où a est un vecteur arbitraire. En effet la divergence du rotor de tout vecteur est identiquement nulle. Le flux du vecteur rot a à travers toute surface fermée est identiquement nul. Par conséquent les raisonnements utilisés ne permettent pas de définir de façon univoque le vecteur densité de flux d'énergie électromagnétique. Ce fait ne crée pas de difficultés lorsqu'il s'agit de l'application de la loi de la conservation de l'énergie puisqu'il s'agit alors de flux d'énergie à travers des *surfaces fermées*. Par contre on se heurte à des difficultés, tout au moins en physique non relativiste, lorsqu'on applique la notion de flux d'énergie à des *surfaces non fermées*. Quoiqu'en physique prérelativiste on avait introduit la notion de localisation spatiale de l'énergie, on ne

concevait jamais l'énergie elle-même comme une substance ayant une masse et un mouvement propres. La théorie de la relativité supprime cette différence de principe entre masse et énergie et démontre que *toute énergie possède une certaine masse*: *la masse est égale au quotient de l'énergie par le carré de la vitesse de la lumière.* Mais le flux de substance et le flux de masse qui y est lié sont des grandeurs parfaitement définies et univoques. Le flux d'énergie doit donc être défini de façon aussi univoque.

Par ailleurs le flux d'énergie doit être lié à un *flux d'impulsion.* Définissons la densité de flux d'impulsion g pour un champ électromagnétique dans le vide afin d'éviter plus tard les complications qu'introduit la présence d'une substance. Soit w la densité d'énergie électromagnétique. La densité de masse correspondante est w/c^2. Si l'énergie se déplace avec la vitesse v, à ce mouvement est attachée une impulsion dont la valeur rapportée à l'unité de volume du milieu est donnée par $g_{\text{él}} = wv/c^2$. Cette impulsion est appelée *impulsion de champ électromagnétique.* En remarquant que wv est la densité de flux d'énergie électromagnétique S, on trouve pour la densité d'impulsion électromagnétique

$$g_{\text{él}} = \frac{S}{c^2} = \frac{1}{4\pi c}[EH]. \tag{84.10}$$

La notion d'impulsion de champ électromagnétique fut introduite par Max Abraham (1875-1922) avant que fut élaborée la théorie de la relativité.

6. Considérons maintenant le cas d'un champ électromagnétique E, H statique, i.e. ne variant pas dans le temps. D'après la formule (84.3) un flux d'énergie électromagnétique doit exister en tous les points de l'espace où les vecteurs E et H ne sont pas colinéaires. Comme pour les processus stationnaires $\partial u/\partial t = 0$, il résulte de (84.4) que div $S = 0$. Cela signifie que l'énergie s'écoule à la manière d'un liquide incompressible: dans tout volume de l'espace il rentre autant d'énergie qu'il en sort. Cet écoulement d'énergie électromagnétique ne se manifeste directement dans aucun phénomène physique. Mais comme une impulsion électromagnétique et son moment sont liés au flux d'énergie électromagnétique, cet écoulement d'énergie comporte des conséquences susceptibles de vérification expérimentale. L'exemple qui suit montre qu'il en est bien ainsi.

Considérons un condensateur cylindrique chargé placé dans un champ magnétique H permanent, homogène et parallèle à l'axe du condensateur (fig. 212, *a*). Les champs E et H sont rectangulaires et le vecteur de Poynting S est tangent à des cercles coaxiaux centrés sur l'axe du condensateur et dont les plans sont orthogonaux à cet axe (fig. 212, *b*). Ainsi le long de ces cercles s'effectue une circulation continue de l'énergie électromagnétique. L'impulsion électromagnétique totale du système est nulle du fait de sa symétrie axiale,

mais le moment cinétique $L_{él}$ rapporté à l'axe du système est différent de zéro :

$$L_{él} = \int r g_{él}\, dV = \frac{1}{4\pi c} \int rEH\, dV.$$

En y portant $E = 2Q/(lr)$, $dV = 2\pi r l dr$, on obtient après intégration

$$L_{él} = \frac{QH}{c} \int_0^R r\, dr = \frac{QH}{2c} R^2,$$

où l est la longueur du condensateur, Q sa charge et R le rayon de l'armature extérieure. Pour simplifier les calculs on négligera le rayon de l'armature intérieure en le supposant petit. La figure 212

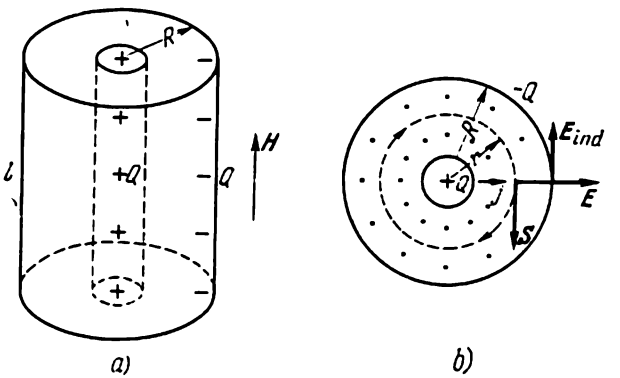


Fig. 212

montre que le vecteur $L_{él}$ est dirigé à l'encontre du champ H si l'armature intérieure porte une charge positive et suivant le champ H si cette armature porte une charge négative. En supposant que l'armature intérieure est chargée positivement, on a

$$L_{él} = -\frac{QR^2}{2c} H. \qquad (84.11)$$

Supposons maintenant qu'un courant électrique radial s'écoule de l'armature intérieure vers l'armature extérieure et décharge lentement le condensateur. On doit admettre alors que le condensateur est rempli d'un milieu faiblement conducteur dont la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique sont pratiquement égales à l'unité. Lorsque le condensateur sera déchargé, le moment cinétique électromagnétique (84.10) devient nul et le condensateur doit

recevoir un moment cinétique mécanique de même grandeur, de même direction et de même sens. Si le condensateur était suspendu à un fil, après sa décharge le fil devrait se tordre. On le démontre par le raisonnement suivant.

En notant j la densité volumique du courant radial, tout élément de volume dV du diélectrique est soumis à la force d'Ampère $dF = \frac{1}{c}[jH]\,dV$. Le moment dM de cette force rapporté à l'axe du condensateur est numériquement égal à $\frac{1}{c}\,rjH\,dV$ et dirigé à l'encontre du champ H, comme indiqué sur la figure 212, *b*. Ainsi sous forme vectorielle $dM = -\frac{1}{c}\,rjH\,dV$. En y portant $dV = 2\pi rl\,dr$, $j = \mathcal{J}/(2\pi rl)$, on obtient après intégration

$$M = -\frac{\mathcal{J}H}{c}\int_0^R r\,dr = -\frac{\mathcal{J}R^2}{2c}H.$$

Sous l'action du moment M le moment cinétique mécanique du condensateur doit varier conformément à l'équation

$$dL = M\,dt = -\frac{R^2H}{2c}\mathcal{J}\,dt = -\frac{R^2H}{2c}dQ.$$

Après intégration on trouve qu'après décharge le moment cinétique du condensateur est :

$$L = -\frac{QR^2}{2c}H, \tag{84.12}$$

ce qui correspond à (84.11).

On arrive au même résultat si, laissant le condensateur chargé, on supprime le champ magnétique H. Lorsqu'on supprime le champ magnétique H, un champ électrique circulaire apparaît. Sur un cercle de rayon R l'intensité de ce champ est donnée par la loi de l'induction électromagnétique : $2\pi RE_{\text{ind}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}\pi R^2\frac{dH}{dt}$, d'où

$$E_{\text{ind}} = -\frac{R}{2c}\frac{dH}{dt}.$$

Ce champ exerce sur la charge $-Q$ un moment

$$M = \frac{Q}{2c}R^2\frac{dH}{dt}.$$

Par suite $dL = M\,dt = \frac{Q}{2c}R^2dH$. En intégrant entre les limites H et 0, on retrouve le même résultat que ci-dessus.

L'effet dont il a été question est extrêmement petit, mais en principe il peut être observé.

PROBLÈMES

1. Un condensateur à air plan, ayant pour armatures deux disques identiques, est chargé jusqu'à ce qu'apparaisse une grande différence de potentiel entre ses armatures, puis est débranché de la source de tension. Une rupture électrique se produit au centre du condensateur (perforation par une étincelle électrique) et le condensateur se décharge. En supposant que sa décharge s'effectue de façon quasi stationnaire et en négligeant les inhomogénéités du champ près des bords du condensateur, calculer le flux total d'énergie électromagnétique sortant de l'espace compris entre les armatures. Analyser le phénomène du point de vue de la conservation et de la transformation de l'énergie.

Réponse. Le flux d'énergie est nul (cf. problème 3 du § 81).

2. On communique une charge Q à un condensateur de capacité C dont les armatures sont constituées par deux disques identiques. On débranche le condensateur de la source d'électricité et on relie ses armatures par un long fil cylindrique passant à l'extérieur du condensateur: le condensateur se décharge. En négligeant les inhomogénéités du champ près des bords du condensateur, montrer par un calcul direct que le flux total d'énergie électromagnétique sortant du condensateur est égal au flux total d'énergie électromagnétique entrant dans le fil. Etudier le phénomène du point de vue du mouvement, de la conservation et de la transformation de l'énergie.

Indication. Revoir exemples 2 et 3 donnés dans ce paragraphe.

Réponse. L'énergie électrique sort du condensateur par ses bords et s'écoule dans le fil où elle se transforme en énergie interne (thermique).

3. Un condensateur à air plan constitué par deux disques identiques est d'abord chargé puis placé à l'intérieur d'un solénoïde où règne un champ magnétique permanent et homogène d'intensité $B = 1000$ G. Le champ magnétique est créé par une batterie qui fait passer un courant continu dans le bobinage du solénoïde. Le champ électrique entre les armatures est $E = 10\,000$ V/cm. Le volume d'air entre les armatures est $V = 100$ cm^3. Le condensateur est perforé par une étincelle électrique suivant son axe et se décharge. Quelle sera la variation de l'impulsion mécanique du système après la rupture électrique? Etudier l'effet du point de vue de la loi de la conservation de l'impulsion.

Solution. Par suite de la symétrie axiale l'impulsion électromagnétique totale est égale à zéro. Elle ne peut donc varier du fait de la décharge du condensateur. L'impulsion mécanique totale du système ne peut donc varier elle non plus. Mais par suite de la décharge l'impulsion électromagnétique localisée dans le condensateur diminue de $\frac{V}{4\pi c}[EH]$ et l'impulsion électromagnétique du champ à l'extérieur du condensateur augmente d'autant. Il s'ensuit que le condensateur acquiert l'impulsion mécanique $\frac{V}{4\pi c}[EH]$ qui est égale à $\sim 10^{-4}$ g·cm/s. Le solénoïde reçoit une impulsion égale mais de sens opposé. L'étincelle peut être assimilée à un courant de conduction. Si tout le champ électrique du condensateur était localisé en son intérieur, le champ magnétique créé par l'étincelle à l'extérieur du condensateur aurait été entièrement compensé par le champ magnétique du courant de déplacement (cf. problème 3 du § 81). En réalité une partie du courant de déplacement passe en dehors du condensateur et y crée un champ magnétique qui exerce son action sur les courants circulant dans le solénoïde et modifie ainsi l'impulsion de ce dernier.

4. Même problème que ci-dessus mais le condensateur ne subit pas de rupture électrique; au lieu de cela on coupe le circuit d'alimentation du solénoïde. Quelle sera la variation de l'impulsion mécanique du système?

Réponse. Identique à celle du problème précédent.

§ 85. Le système international d'unités de mesure (SI)

1. En mécanique le système d'unités de mesure rigoureusement scientifique dont les grandeurs fondamentales sont la *longueur*, la *masse* et le *temps* (C.G.S.) a été élaboré en se fondant sur les lois de Newton. En électrodynamique la situation était moins favorable, car ses principes fondamentaux (lois de Maxwell) n'ont été établis et adoptés qu'à la fin du XIXe siècle. Auparavant on commença à utiliser largement des unités de mesure pratiques arbitrairement choisies: le *volt*, l'*ampère*, l'*ohm* et les unités qui en dérivent. Ces unités pratiques n'avaient aucun lien avec le système d'unités mécaniques. Il était donc tout indiqué d'introduire un système unique d'unités de mesure des grandeurs mécaniques et électromagnétiques. Or les physiciens et les électrotechniciens s'engagèrent dans des voies différentes. Les physiciens n'introduisaient aucune nouvelle grandeur fondamentale et considéraient les grandeurs électriques et magnétiques comme dérivant des grandeurs mécaniques. Les systèmes d'unités bâtis selon ce principe sont appelés *systèmes absolus*. L'un de ces systèmes absolus est le *système gaussien* C.G.S. que nous avons adopté dans notre cours. Tout en conservant les unités mécaniques, l'électrotechnique ne consentit pas à sacrifier les unités électriques pratiques (volt, ampère, ohm, etc.). On ne peut réaliser cette synthèse qu'en rendant le système d'unités notablement plus mauvais. Cette appréciation concerne aussi le *système international d'unités de mesure* (SI) qui a été récemment élaboré et recommandé pour l'usage général. Dans ce qui suit nous exposerons les bases sur lesquelles a été élaboré le système SI, ainsi que nous relèverons ses défauts de principe.

Dans le système SI on a modifié l'échelle des grandeurs mécaniques fondamentales: à la place du centimètre on y trouve le *mètre*, à la place du gramme le *kilogramme*. On n'y gagne pas grand-chose, car il est impossible d'arriver à ce que la grandeur des unités soit également commode dans tous les cas. Une seule et même unité paraîtra dans certains cas trop grande, dans d'autres trop petite. On parvient à satisfaire à toutes les exigences par l'utilisation des préfixes «micro », « milli », « méga », etc. Il est d'ailleurs bien évident que le changement de l'échelle des unités des grandeurs fondamentales n'entraîne aucune modification de principe et ne peut donc donner lieu à des controverses. Deux autres aspects sont affaire de principe.

Premièrement, c'est que dans le système SI on a ajouté aux trois grandeurs mécaniques fondamentales de longueur, de masse et de temps une quatrième grandeur fondamentale purement électrique et ayant sa propre dimension. Il s'agit de l'unité d'*intensité de courant électrique*, l'*ampère*. La quantité d'électricité est donc une grandeur dérivée ayant pour unité l'*ampère-seconde* que l'on appelle le *coulomb*.

Deuxièmement, dans le système SI les équations de Maxwel- s'écrivent sous une forme dite *rationalisée*, ne contenant aucun fact teur numérique. Sous leur forme intégrale ces équations s'écrivenl comme suit :

$$\oint (\boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l}) = \mathcal{J} + \int \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\, d\boldsymbol{S}\right), \tag{85.1}$$

$$\oint \left(\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l}\right) = -\int \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\, d\boldsymbol{S}\right), \tag{85.2}$$

$$\oint (\boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{S}) = q, \tag{85.3}$$

$$\oint (\boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}) = 0, \tag{85.4}$$

et sous forme différentielle de la façon suivante :

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{85.1a}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{85.2a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho, \tag{85.3a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{85.4a}$$

L'idée de la « rationalisation » des équations de Maxwell est due à Heaviside (1850-1925). Ces équations étant *fondamentales*, il estimait qu'il fallait les débarrasser de facteurs numériques tels que 4π. Pour y arriver il suffit de modifier les valeurs des unités de charge électrique et des intensités des champs électrique et magnétique. Une telle rationalisation ne présente aucun avantage pratique. Les facteurs numériques s'éliminent entre certaines formules et réapparaissent dans d'autres, de sorte que le nombre de facteurs numériques reste pratiquement le même. Lorentz apporta son appui à l'idée de Heaviside. Dans le *système de Heaviside-Lorentz* les équations de Maxwell s'écrivent comme dans le système gaussien à cela près que le facteur sans dimension 4π y est remplacé partout par un autre facteur sans dimension, l'unité. Ainsi ce système ne présente aucun avantage de principe vis-à-vis du système gaussien ; ces deux systèmes sont aussi bons l'un que l'autre. La « rationalisation » mise en œuvre dans le système SI est plus complète : on élimine non seulement le facteur 4π mais encore la vitesse de la lumière dans le vide c, qui est une *grandeur à dimensions*.

2. Les équations (85.1) à (85.4) écrites dans le système SI prédéterminent les dimensions et les unités de mesure des vecteurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{H}$:

$$[\boldsymbol{D}] = \mathrm{C/m^2} = \mathrm{A \cdot s/m^2}, \quad [\boldsymbol{H}] = \mathrm{A/m}.$$

Le lien avec la mécanique est assuré par les *vecteurs de force* $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ qui sont définis par les relations

$$\boldsymbol{F}_e = q\boldsymbol{E}, \tag{85.5}$$

$$\boldsymbol{F}_m = q\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}], \tag{85.6}$$

où $\boldsymbol{F}_e$ et $\boldsymbol{F}_m$ sont les forces appliquées à la charge q dans les champs électrique et magnétique. On en tire

$$[\boldsymbol{E}] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{A\cdot s^3}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}},$$

$$[\boldsymbol{B}] = \frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{C\cdot m}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A\cdot m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A\cdot s^2}} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m^2}}.$$

L'unité d'induction $\boldsymbol{B}$ est le *tesla*. Les unités de $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{H}$ n'ont pas reçu de dénomination spéciale. On les désigne par les termes «*volt par mètre* », « *coulomb par mètre carré* » et « *ampère par mètre* ». Les quatre vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ ont tous des dimensions différentes. Même dans le vide $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$ ainsi que $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$ sont des grandeurs différentes dans le système SI. Dans le vide elles sont reliées par les relations

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}. \tag{85.7}$$

Les grandeurs ε_0 et μ_0 sont appelées *constante électrique* et *constante magnétique*.

Il résulte de l'équation (85.3) que le champ électrique de la charge ponctuelle q est défini dans le vide par la formule

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \quad \text{ou} \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

La loi de Coulomb doit donc s'écrire dans le cas du vide de la façon suivante:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \tag{85.8}$$

De même le théorème sur la circulation (85.1) appliqué à un courant direct dans le vide conduit aux résultats suivants:

$$H = \frac{\mathcal{J}}{2\pi r}, \quad B = \frac{\mu_0 \mathcal{J}}{2\pi r}.$$

La force d'interaction de deux fils fins parallèles parcourus par les courants $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ est définie par la formule

$$F = \mu_0 \frac{\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2}{2\pi r}\, l, \tag{85.9}$$

où l est la longueur du segment de l'un des fils auquel s'applique la force $\boldsymbol{F}$.

Les formules (85.8) et (85.9) permettent de déterminer les valeurs des constantes ε_0 et μ_0. Posons $q_1 = q_2 = 1$ C, $r = 1$ m. D'après la formule (85.8) on trouve $F = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ newtons. Calculons cette même force à l'aide de la loi de Coulomb $F = q_1q_2/r^2$ dans le système gaussien. Dans ce cas $r = 100$ cm et par définition du coulomb $q_1 = q_2 = 10c$ un. C.G.S.E., où $c \approx 10^8$ m/s est la vitesse de la lumière dans le vide en m/s. Ainsi $F = c^2 \cdot 10^{-2}$ dynes $= c^2 \cdot 10^{-7}$ N. En comparant avec le résultat précédent on trouve

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}. \tag{85.10}$$

On procédera de la même façon pour calculer la constante magnétique μ_0. Posons dans la formule (85.9) $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = 1$ A, $l = r = 1$ m. Alors $F = \mu_0/(2\pi)$ N. Calculons cette même force dans le système gaussien à l'aide de la formule $F = 2\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2 l/r\,(100\,c)^2$. (Nous écrivons au dénominateur $100c$ au lieu de c pour exprimer la vitesse c en m/s et non en cm/s comme cela s'impose dans le système gaussien.) En posant dans cette formule $l = r = 100$ cm, $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = 10c$ un. C.G.S.E., on obtient $F = 2 \cdot 10^{-2}$ dyne $= 2 \cdot 10^{-7}$ N. En comparant au résultat précédent on trouve

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1{,}256 \cdot 10^{-6} \text{ G/m}. \tag{85.11}$$

Les constantes ε_0 et μ_0 n'ont aucune signification physique et n'interviennent que comme des *facteurs dimensionnels*, introduits tout à fait artificiellement pour convertir les grandeurs essentiellement semblables ($\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$ dans le vide) d'un système d'unités à un autre. Or ces facteurs sont liés entre eux par la relation

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}, \tag{85.12}$$

où la vitesse de la lumière est mesurée en m/s. Seul le produit $\varepsilon_0\mu_0$ a une signification physique réelle.

3. Dans le système SI les équations matérielles s'écrivent comme suit :

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{85.13}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\mu\boldsymbol{H}, \tag{85.14}$$

$$\boldsymbol{j} = \lambda\boldsymbol{E}. \tag{85.15}$$

La permittivité diélectrique ε et la perméabilité magnétique μ sont sans dimension et sont égales aux mêmes grandeurs définies dans le système gaussien. Dans le système SI on les appelle des grandeurs *relatives*; les produits $\varepsilon_0\varepsilon$ et $\mu_0\mu$ sont appelés *permittivité* et *perméabi-*

lité absolues du milieu. La conductibilité électrique λ a pour dimension

$$[\lambda]=\left[\frac{\mathcal{J}}{ES}\right]=\left[\frac{\mathcal{J}}{\varphi l}\right]=\frac{A}{\mathrm{V\cdot m}}=\frac{1}{\mathrm{Ohm\cdot m}}.$$

La densité d'énergie s'exprime dans le système SI par

$$w=\frac{1}{2}(\boldsymbol{ED}+\boldsymbol{HB}) \tag{85.16}$$

et le vecteur de Poynting par

$$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{EH}]. \tag{85.17}$$

Le moment dipolaire électrique s'exprime comme avant par $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$, on le mesure en coulombs-mètres.

On a conservé l'ancienne définition du vecteur polarisation $\boldsymbol{P}$; c'est le moment dipolaire de l'unité de volume du milieu. Comme le vecteur $\boldsymbol{D}$ il a pour dimension le quotient de la charge par l'aire. On définit donc le vecteur $\boldsymbol{D}$ par la formule

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}. \tag{85.18}$$

Le facteur ε_0 est introduit pour rendre égales les dimensions des termes du second membre. Le vecteur $\boldsymbol{P}$ est lié à $\boldsymbol{E}$ par la relation $\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\alpha\boldsymbol{E}$, où α est une grandeur sans dimension appelée *polarisabilité du milieu.* Elle est liée à ε par la relation

$$\varepsilon=1+\alpha. \tag{85.19}$$

Cette formule montre que la polarisabilité α est dans le système SI 4π fois plus grande que sa valeur dans le système gaussien.

La polarisabilité β d'une molécule est définie par la formule $\boldsymbol{p}=\varepsilon_0\beta\boldsymbol{E}$. La grandeur β a la dimension d'un volume; elle est liée à α par la relation $\alpha=N\beta$, où N est le nombre de molécules contenues dans l'unité de volume du milieu.

Le moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ d'une spire parcourue par un courant est défini par $\vec{\mathfrak{M}}=\mathcal{J}\,\boldsymbol{S}$. Par suite le vecteur aimantation $\boldsymbol{I}$ ou le moment magnétique de l'unité de volume d'une substance magnétique a la même dimension que celle du vecteur $\boldsymbol{H}$. On définit donc le vecteur $\boldsymbol{H}$ par la formule

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{I}. \tag{85.20}$$

La susceptibilité magnétique $\varkappa$ est sans dimension; par définition $\boldsymbol{I}=\varkappa\boldsymbol{H}$. Elle est liée à la perméabilité magnétique μ par la relation

$$\mu=1+\varkappa. \tag{85.21}$$

Par conséquent la susceptibilité magnétique $\varkappa$ est dans le système SI 4π fois plus grande que dans le système gaussien.

4. Il existe un procédé, systématiquement le même, pour convertir les formules électrodynamiques du système gaussien en système SI et inversement. On fait correspondre à chaque grandeur physique du système gaussien un coefficient *de conversion* bien déterminé. Après avoir remplacé chacune des grandeurs par la même grandeur multipliée par le coefficient de conversion adéquat, les équations sont transposées du système gaussien dans le système SI. La méthode de détermination des coefficients de conversion n'est cependant pas univoque. En effet, si on a déterminé un certain ensemble de coefficients de conversion, le produit de tous ces coefficients par une même grandeur donne naissance à un nouvel ensemble convenant tout aussi bien à la conversion. Comme dans les deux systèmes les équations de la mécanique sont les mêmes il n'est nul besoin d'introduire des coefficients de conversion pour les grandeurs mécaniques. On n'en a besoin que pour les grandeurs électriques et magnétiques. Si on multiplie une grandeur quelconque par une grandeur mécanique, le coefficient de conversion n'en est pas modifié. Ainsi on fait correspondre le même coefficient de conversion au champ électrique $\boldsymbol{E}$ et au potentiel φ puisque d'après l'équation $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ on tire le champ $\boldsymbol{E}$ du potentiel en le divisant par une grandeur mécanique — la longueur. La charge q, la densité de charge ρ, le courant $\mathcal{J}$, la densité de courant $\boldsymbol{j}$, la polarisation $\boldsymbol{P}$, etc., auront le même coefficient de conversion. La vitesse de la lumière c ne figure pas explicitement dans le système SI où on la remplace par $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Etant les mêmes dans les deux systèmes, la permittivité diélectrique et la perméabilité magnétique relatives ne requièrent pas de coefficients de conversion.

Après avoir donné ces quelques explications, nous allons procéder à l'établissement d'un système de coefficients de conversion e, d, . . . que l'on fera correspondre aux grandeurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, . . . selon le schéma suivant:

$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{D}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{H}$	$\mathcal{J}$, q	c
e	d	b	h	i	$1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

Pour traiter ce problème on pourrait utiliser le système d'équations de Maxwell, mais il est plus simple de se fonder sur les formules de la densité d'énergie, du flux d'énergie et de la force:

$$w_e = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{ED}), \quad w_m = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{HB}).$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{8\pi}[\boldsymbol{EH}], \quad \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}.$$

Cette approche présente l'avantage de n'avoir affaire dans les premiers membres de ces formules qu'à des grandeurs mécaniques qui n'ont pas besoin d'être converties. Après multiplication par les coefficients de conversion adéquats, les formules ci-dessus s'écrivent

$$w_e = \frac{ed}{8\pi}(ED), \quad w_m = \frac{hb}{8\pi}(HB),$$

$$S = \frac{eh}{4\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}[EH], \quad F = ieqE.$$

Les coefficients de conversion doivent être tels qu'après conversion ces formules deviennent

$$w_e = \frac{1}{2}(ED), \quad w_m = \frac{1}{2}(HB),$$

$$S = [EH], \quad F = qE.$$

On doit avoir

$$\frac{ed}{4\pi} = \frac{hb}{4\pi} = \frac{eh}{4\pi\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = ie = 1.$$

Comme le choix de l'un de ces coefficients est arbitraire, nous imposerons une « condition de symétrie » supplémentaire $e/\sqrt{\varepsilon_0} = h/\sqrt{\mu_0}$, ce qui permet d'arriver aux résultats suivants:

$$e = \sqrt{4\pi\varepsilon_0}, \quad h = \sqrt{4\pi\mu_0}, \quad d = \sqrt{4\pi/\varepsilon_0},$$
$$b = \sqrt{4\pi/\mu_0}, \quad i = 1/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}.$$

Il est facile de se rendre compte qu'à l'aide de ces coefficients, la conversion de toutes les équations fondamentales de Maxwell donne des résultats corrects. Considérons, par exemple, l'équation (82.1a). Après l'avoir multipliée par les coefficients de conversion, on trouve

$$\sqrt{4\pi\mu_0}\ \mathrm{rot}\ H = 4\pi\frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}j + \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{4\pi/\varepsilon_0}\frac{\partial D}{\partial t},$$

et après simplification

$$\mathrm{rot}\ H = j + \frac{\partial D}{\partial t}.$$

C'est bien l'équation (85.1a) dans le système SI.

A l'aide des coefficients de conversion que nous venons d'établir il est facile de calculer les coefficients de conversion de toutes les autres grandeurs physiques. Certaines de ces grandeurs sont répertoriées dans le tableau 1. Les coefficients de conversion des grandeurs

Tableau 1

Table de conversion des grandeurs et des formules du système gaussien en système SI et inversement

Dénomination de la grandeur	Système de Gauss	Système SI
Vitesse de la lumière	c	$1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$
Intensité de champ électrique, potentiel	E, φ	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,(E, \varphi)$
Induction électrique	D	$\sqrt{4\pi/\varepsilon_0}\,D$
Charge, densité de charge, courant, densité de courant, polarisation	$q, \rho, \mathcal{J}, j, P$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\,(q, \rho, \mathcal{J}, j, P)$
Induction magnétique, flux magnétique	B, Φ	$\sqrt{4\pi/\mu_0}\,(B, \Phi)$
Intensité de champ magnétique	H	$\sqrt{4\pi\mu_0}\,H$
Moment magnétique, aimantation	$\vec{\mathfrak{M}}$, I	$\sqrt{\mu_0/4\pi}\,(\vec{\mathfrak{M}}, I)$
Permittivité électrique, perméabilité magnétique (relatives)	ε, μ	ε, μ
Polarisabilité électrique, susceptibilité magnétique	α, $\varkappa$	$\frac{1}{4\pi}\,(\alpha, \varkappa)$
Conductivité électrique	λ	$\lambda/(4\pi\varepsilon_0)$
Résistance électrique	R	$4\pi\varepsilon_0 R$
Capacité	C	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,C$
Inductance	L	$\frac{4\pi}{\mu_0}\,L$

données dans le système SI en système gaussien sont égaux à l'inverse des coefficients de conversion directs. Soit la relation $D = \varepsilon_0 E + P$ donnée dans le système SI. Quelle sera sa forme dans le système gaussien ? En prenant les inverses des coefficients de conversion directs on obtient

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{4\pi}}\,D = \varepsilon_0 \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\,E + \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,P,$$

et après simplification on trouve $D = E + 4\pi P$.

5. Donnons encore le tableau 2 pour la conversion des valeurs numériques des grandeurs physiques du système SI en système gaussien et inversement. Le facteur 3 (à l'exclusion des exposants) doit être remplacé dans les calculs précis par 2,99792458 conformément à la valeur précise de la vitesse de la lumière. Par exemple, pour

Tableau 2

Table de conversion des valeurs numériques des grandeurs physiques du système SI en système gaussien

Grandeur physique	Notation	Système SI	Système gaussien
Longueur	l	1 m (mètre)	10^2 cm
Masse	m	1 kg (kilogramme)	10^3 g
Temps	t	1 s (seconde)	1 s
Force	F	1 N (newton)	10^5 dynes
Travail, énergie	A, $\mathcal{E}$	1 J (joule)	10^7 erg
Puissance	P	1 W (watt)	10^7 erg/s
Pression	$\mathcal{P}$	1 Pa (pascal)	10 dynes/cm^2
Intensité de courant électrique	$\mathcal{J}$	1 A (ampère)	$3\cdot10^9$
Charge électrique	q	1 C (coulomb)	$3\cdot10^9$
Intensité de champ électrique	E	1 V/m (volt par mètre)	$\frac{1}{3}\cdot10^{-4}$
Potentiel électrique	φ	1 V (volt)	$\frac{1}{3}\cdot10^{-2}$
Polarisation	P	1 C/m^2 (coulomb par mètre carré)	$3\cdot10^5$
Inductance électrique (déplacement électrique)	D	1 C/m^2 (coulomb par mètre carré)	$12\pi\cdot10^5$
Capacité électrique	C	1 F (farad)	$9\cdot10^{11}$ cm
Résistance électrique	R	1 ohm (Ω)	$\frac{1}{9}\cdot10^{-11}$ s·cm^{-1}
Résistivité électrique	ρ	1 ohm·m (ohm·mètre)	$\frac{1}{9}\cdot10^{-9}$ s
Conductibilité électrique	$\Lambda=1/R$	1 S (siemens)	$9\cdot10^{11}$ cm·s^{-1}
Conductivité électrique	λ	1 S/m (siemens par mètre)	$9\cdot10^9$ s^{-1}
Flux magnétique	Φ	1 Wb (weber)	10^8 M
Induction magnétique	B	1 T (tesla)	10^4 G
Intensité de champ magnétique	H	1 A/m (ampère par mètre)	$4\pi\cdot10^{-3}$ Oe
Aimantation	I	1 A/m (ampère par mètre)	$\frac{1}{4\pi}\cdot10^4$ G
Inductance	L	1 H (henry)	10^9 cm

l'induction électrique dans les calculs précis on remplace $12\pi\cdot10^5$ par $2{,}99792458\cdot4\pi\cdot10^5$. Lorsque les unités gaussiennes ont des dénominations généralement adoptées, on les indique dans le tableau, dans tous les autres cas on n'indique que le nombre d'unités.

6. Les avantages du système SI ne concernent que les activités de l'ingénieur. Les calculs exécutés à l'aide des formules du système SI donnent des résultats numériques en unités pratiques — volts, ampères, ohms, joules, etc. Les défauts de ce système sont plus graves et sont affaire de principe. Pour décrire un champ électromagnétique le système SI introduit *quatre* vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ *non seulement dans le cas de milieux matériels, mais aussi dans celui du vide.* Le système SI ne se distingue pas essentiellement du système électrotechnique élaboré par Giorgi au début du XXe siècle. A cette époque les équations de Maxwell étaient peu appliquées en électrotechnique et leur interprétation physique n'était pas encore mise au point. Les conceptions mécanistes relatives à la nature du champ électromagnétique étaient prédominantes. On admettait que le vide (que l'on appelait alors éther) en tant que milieu où on crée le champ électromagnétique ne se distingue en rien des autres milieux matériels.

C'est sous l'influence de ces conceptions aujourd'hui périmées qu'apparut le système Giorgi. Selon ces conceptions les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$ dans le vide diffèrent non seulement par des facteurs numériques, mais aussi par leur essence même, à l'instar par exemple des efforts de traction et des déplacements en théorie d'élasticité.

Or la Physique a depuis longtemps rejeté ces différences de principe entre les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$, qui ont été introduites dans la théorie mécanique de l'éther universel. La Physique a fermement établi que pour décrire le champ électromagnétique dans le vide, il suffit d'indiquer un *seul vecteur électrique* $\boldsymbol{E}$ et un *seul vecteur magnétique* $\boldsymbol{B}$. Pour le physicien la coïncidence des valeurs numériques de $\boldsymbol{E}$ et de $\boldsymbol{D}$, de $\boldsymbol{B}$ et de $\boldsymbol{H}$ dans le vide *résulte non pas d'une convention arbitraire, mais exprime l'identité effective de ces grandeurs.*

Par contre l'introduction dans le système SI des facteurs dimensionnels ε_0 et μ_0 est un simple *artifice* destiné à rendre les formules plus commodes pour les ingénieurs électriciens. L'esprit des conceptions physiques périmées est présent dans le système SI et se manifeste notamment dans la terminologie: les grandeurs ε_0 et μ_0 étaient appelées *permittivité diélectrique* et *perméabilité magnétique du vide.* C'est parce que ces notions sont absolument dénuées de sens que plus tard on introduisit les termes neutres de *constantes « électrique »* et *« magnétique »*. Les grandeurs ε_0 et μ_0 n'en devinrent pas plus riches de sens; ces grandeurs parfaitement inutiles du système SI encombrent la Physique et ses formules.

Avant l'apparition de la théorie de la relativité tout système d'unités physiquement sensé devait satisfaire à la condition que les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$, ainsi que $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$ aient *mêmes dimensions.* Les dimensions des champs électriques et magnétiques pouvaient cependant être différentes. La théorie de la relativité rendit cette condition encore plus stricte, puisqu'elle démontra que la subdivision du champ électromagnétique en champs électrique et magnétique était *relative*, i.e. dépendait du choix du référentiel. Il fut établi que les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ se combinent en un seul tenseur antisymétrique de deuxième rang et les vecteurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{H}$ se combinent de même pour former un autre tenseur. Il est évident que les composants d'un même tenseur doivent avoir les *mêmes dimensions.* Il est donc absolument nécessaire que les quatre vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ aient les mêmes dimensions. Le système SI ne satisfait pas à cette condition puisqu'il faut introduire des facteurs dimensionnels pour rendre identiques les dimensions des composants des deux tenseurs. Le système C.G.S. de Gauss vérifie cette condition quoiqu'il fut élaboré avant qu'apparut la théorie de la relativité. De ce point de vue le système SI n'est pas plus logique qu'un système où la longueur serait mesurée en mètres, la largeur en parsecs et la hauteur en années-lumière.

De tous les systèmes d'unités de mesure existants c'est encore le système C.G.S. de Gauss qui est le meilleur pour la Physique. Pour un physicien il est beaucoup plus facile de faire tous les calculs en système gaussien et de convertir les résultats, si c'est nécessaire, en unités pratiques que de s'encombrer tout au long des calculs de grandeurs et de notions artificielles introduites par le système SI (ε_0 et μ_0 absolus et relatifs, $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{H}$ dans le vide, etc.).

On doit cependant tenir compte de l'importance prise par le système SI; c'est pour cette raison que nous donnons à la fin de ce tome une liste des principales formules d'électrodynamique écrites dans le système SI.

CHAPITRE V

MOUVEMENT DES PARTICULES CHARGEES DANS LES CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

§ 86. Mouvement dans les champs continus et uniformes

1. Les questions relatives au mouvement des particules chargées dans les champs électromagnétiques ont déjà été abordées sous forme de problèmes aux §§ 4 et 57. Nous les étudierons ici d'une manière plus systématique, en excluant toutefois tout ce qui concerne l'optique électronique et ionique, qui sera étudiée dans le tome IV à la suite de l'exposé de l'optique géométrique. On a exclu aussi les accélérateurs de particules et la spectroscopie de masse puisqu'il est tout indiqué d'en parler en physique atomique et nucléaire.

Le cas le plus simple est celui du mouvement des particules dans les champs électromagnétiques continus et uniformes.

2. Dans un champ électrique continu une particule de charge e est soumise à la force $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E}$. Si le mouvement n'est pas relativiste et si le champ est uniforme, la particule se meut avec une accélération constante $\boldsymbol{a} = e\boldsymbol{E}/m$. Un tel mouvement est parfaitement analogue au mouvement d'une particule dans un champ de gravitation constant et uniforme. Dans le cas général la trajectoire de la particule sera de forme parabolique. Dans le cas de mouvements relativistes la masse m de la particule croît avec la vitesse v et l'accélération décroît. L'étude de ce cas est donnée dans un problème à la fin de ce paragraphe.

3. Dans un champ magnétique continu une particule chargée est soumise à la force $\boldsymbol{F}_m = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]$. Etant orthogonale à la vitesse $\boldsymbol{v}$, cette force ne produit pas de travail et ne fait qu'incurver la trajectoire sans modifier la vitesse de la particule. La masse relativiste m de la particule ne varie donc pas sous l'action de cette force.

Supposons que le champ magnétique soit non seulement continu mais encore uniforme. Si la vitesse de la particule est dirigée le long du champ $\boldsymbol{B}$, la force $\boldsymbol{F}_m$ est nulle. La particule est animée d'un mouvement rectiligne uniforme, ce qui signifie que le champ magnétique n'exerce aucune action sur les particules qui se déplacent le long du champ.

Si la particule se déplace dans une direction normale à celle du champ, sa vitesse reste constante en grandeur, mais change de di-

rection. La force $\boldsymbol{F}_m = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]$ est de grandeur constante et toujours normale à la trajectoire de la particule. La trajectoire de la particule sera donc circulaire et son plan sera orthogonal à la direction du champ. Le sens de rotation de la particule sur la trajectoire circulaire est indiqué sur la figure 213 (le champ magnétique pointe vers le lecteur). Si la charge e est positive, le champ $\boldsymbol{B}$ et la vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\omega}$ seront de sens contraires. Dans le cas d'une charge e négative, ces vecteurs sont de même sens. L'accélération

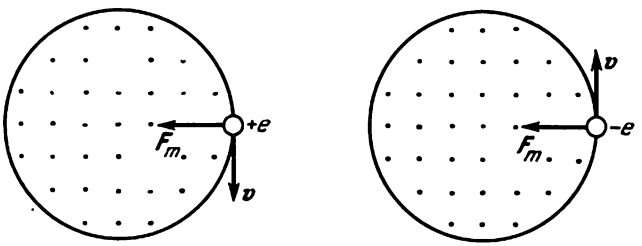


Fig. 213

de la particule est dirigée vers le centre de la circonférence le long de laquelle elle tourne et a pour valeur $\omega^2\rho$, ρ étant le rayon de la circonférence. On trouve la valeur de la vitesse angulaire ω à partir de l'équation de mouvement $m\omega^2\rho = |e|\,Bv/c$. Comme $v = \omega\rho$, on en tire $\omega = |e|\,B/(mc)$ ou sous forme vectorielle

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{e\boldsymbol{B}}{mc}. \tag{86.1}$$

La grandeur ω est la *vitesse de cyclotron* et ρ le *rayon de cyclotron* ou *rayon de Larmor* *). La formule (86.1) s'applique aux mouvements non relativistes et relativistes, à condition d'entendre par m la masse relativiste de la particule.

Pour faire l'étude du cas général où la vitesse $\boldsymbol{v}$ fait un certain angle avec la direction du champ magnétique, nous ne considérerons que les vitesses non relativistes. Exprimons la vitesse $\boldsymbol{v}$ par $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_\parallel + \boldsymbol{v}_\perp$, où $\boldsymbol{v}_\parallel$ est la composante parallèle et $\boldsymbol{v}_\perp$ la composante perpendiculaire au champ. Les mouvements avec ces vitesses sont indépendants. Le premier est un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\boldsymbol{v}_\parallel$ le long du champ et le second est une rotation circulaire uniforme autour du champ avec la vitesse angulaire (86.1). Le rayon de cette circonférence $\rho = v_\perp/\omega$. La superposition de ces mouvements

*) On désigne souvent ω sous le nom de *fréquence de Larmor*. Néanmoins pour éviter toute confusion nous appellerons fréquence de Larmor une grandeur deux fois plus petite, i.e. $|e|\,B/(2mc)$ (cf. § 76).

est un mouvement suivant une hélice d'axe parallèle au champ magnétique (fig. 214).

4. Superposons au champ magnétique continu et uniforme $\boldsymbol{B}$ un champ électrique $\boldsymbol{E}$ continu et uniforme. Nous poserons que $E \ll B$. Il apparaîtra de l'exposé ultérieur que ce n'est qu'à cette condition que le mouvement peut s'effectuer à des vitesses non relativistes. Le mouvement est décrit par l'équation

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\right). \qquad (86.2)$$

Introduisons un référentiel animé d'un mouvement uniforme avec la vitesse $\boldsymbol{v}_d$ par rapport au référentiel initial. Dans ce nouveau référentiel la vitesse relative $\boldsymbol{v}'$ de la particule vérifie l'équation

$$m\dot{\boldsymbol{v}}' = e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}'\boldsymbol{B}] + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_d\boldsymbol{B}]\right).$$

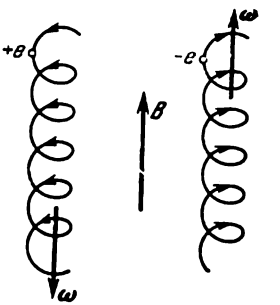


Fig. 214

Supposons d'abord que le vecteur $\boldsymbol{E}$ est perpendiculaire au champ magnétique $\boldsymbol{B}$. Choisissons une vitesse $\boldsymbol{v}_d$ telle que la condition $\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_d\boldsymbol{B}] = 0$ soit vérifiée; on a alors

$$\boldsymbol{v}_d = c\frac{[\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}]}{B^2}, \qquad (86.3)$$

et par suite

$$m\dot{\boldsymbol{v}}' = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}'\boldsymbol{B}].$$

Dans le nouveau référentiel l'équation du mouvement relatif ne contient plus le champ électrique, puisque son influence est compensée par la vitesse $\boldsymbol{v}_d$. La particule se meut comme si elle n'était soumise qu'à l'action du seul champ magnétique, i.e. elle décrit une trajectoire en hélice. Dans le référentiel initial le champ magnétique imposait à la particule une rotation uniforme le long d'une hélice. Dans le cas présent, à cette rotation vient se superposer un mouvement uniforme lent de vitesse $\boldsymbol{v}_d$, défini par la formule (86.3). Ce mouvement est appelé *dérive électrique*.

La grandeur de la vitesse de dérive électrique est donnée par la formule $v_d = cE/B$. Si on avait $E > B$ cette formule donnerait le résultat absurde $v_d > c$, ce qui démontre que l'étude non relativiste n'est admissible que si $E \ll B$, conformément à ce que nous avons supposé ci-dessus.

Considérons maintenant le cas où la direction du champ électrique continu fait un angle quelconque avec la direction du champ magnétique. Décomposons le champ $\boldsymbol{E}$ en une composante $\boldsymbol{E}_{\parallel}$ dirigée

le long du champ $\boldsymbol{B}$ et une composante $\boldsymbol{E}_\perp$ perpendiculaire au champ $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp$. Le mouvement de la particule se présentera alors comme la superposition de trois mouvements: 1) d'un mouvement uniformément accéléré suivant la direction de $\boldsymbol{B}$ d'accélération $\boldsymbol{a}_\parallel = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_\parallel$; 2) d'une rotation circulaire uniforme autour de la direction de $\boldsymbol{B}$ de vitesse angulaire (86.1); 3) d'un mouvement de dérive électrique avec la vitesse

$$\boldsymbol{v}_d = \frac{c}{B^2}[\boldsymbol{E}_\perp \boldsymbol{B}] = \frac{c}{B^2}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}]. \tag{86.3a}$$

Le sens et la vitesse de la dérive électrique ne dépendent ni du signe de la charge, ni de la masse de la particule: les particules positives et négatives dérivent exactement de la même façon. Par addition des mouvements 1) et 2) on obtient un mouvement en hélice. L'axe de l'hélice est parallèle à la direction du champ magnétique; du fait de l'accélération $\boldsymbol{a}_\parallel$ le pas de l'hélice varie en fonction du temps. Le caractère de ce mouvement se maintiendra jusqu'à ce que par accélération constante la vitesse de la particule devienne tellement grande que son mouvement deviendra relativiste.

5. Notons que dans un champ magnétique continu et uniforme le même mouvement s'observe si la particule est soumise à l'action d'une force $\boldsymbol{F}$ étrangère quelconque, remplaçant le champ électrique, la force de pesanteur par exemple. A la place du champ $\boldsymbol{E}$ on trouvera alors le vecteur $\boldsymbol{F}/e$ et on obtient à nouveau un mouvement de dérive avec une vitesse de dérive

$$\boldsymbol{v}_d = \frac{c}{B^2 e}[\boldsymbol{F}\boldsymbol{B}]. \tag{86.4}$$

Mais dans ce cas la direction de la force appliquée $\boldsymbol{F}$ ne dépend plus du signe de la charge de la particule et par suite les vitesses de dérive des particules positives et négatives sont dirigées en sens opposés.

PROBLÈME

Etudier le mouvement relativiste d'une particule chargée dans un champ électrique continu uniforme.

Solution. Le mouvement s'effectue dans un plan parallèle au champ électrique $\boldsymbol{E}$ et à la vitesse initiale $\boldsymbol{v}_0$ de la particule. Adoptons ce plan pour plan des coordonnées XY, l'axe X étant parallèle au champ $\boldsymbol{E}$. L'équation de mouvement s'écrit alors

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0,$$

et par suite

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0 = \text{const},$$

l'instant initial étant celui où l'impulsion $\boldsymbol{p}$ est parallèle à l'axe Y. La masse relativiste de la particule est donnée par

$$(mc)^2 = (m_0c)^2 + p^2.$$

En utilisant cette relation on trouve les équations des coordonnées de la particule :

$$\sqrt{(m_0c)^2+p_0^2+(eEt)^2}\,\frac{dx}{dt}=eEct,$$

$$\sqrt{(m_0c)^2+p_0^2+(eEt)^2}\,\frac{dy}{dt}=p_0c$$

ou

$$dx=\frac{ct\,dt}{\sqrt{\tau^2+t^2}},\qquad dy=\frac{p_0}{eE}\,\frac{c\,dt}{\sqrt{\tau^2+t^2}},$$

avec la notation

$$\tau^2=\frac{(m_0c)^2+p_0^2}{(eE)^2}. \tag{86.5}$$

Après intégration on trouve

$$x=c\sqrt{\tau^2+t^2},\qquad y=\frac{p_0c}{eE}\operatorname{arcsh}\frac{t}{\tau}. \tag{86.6}$$

Ce sont ces équations qui décrivent le mouvement. En calculant t à l'aide de la deuxième équation et en portant cette expression dans la première équation, on trouve l'équation de la trajectoire :

$$x=c\tau\operatorname{ch}\frac{eEy}{p_0c}. \tag{86.7}$$

C'est l'équation de la chaînette. Pour $|eEy|/(p_0c)\ll 1$ elle se réduit à l'équation de la parabole

$$x=c\tau\left[1+\frac{eEy}{2(p_0c)^2}\right]. \tag{86.8}$$

§ 87. Dérive d'une particule chargée dans un champ magnétique non uniforme en présence d'un champ électrique faible

1. Dans le cas général où les champs magnétique et électrique ne sont pas uniformes et varient au cours du temps le mouvement de la particule devient très compliqué. Dans ces cas on n'arrive pas à intégrer les équations de mouvement données sous forme analytique. Pour calculer le mouvement on doit recourir aux méthodes numériques qui sont longues et ennuyeuses. Il existe cependant un cas particulier où on peut donner une image simple et claire du mouvement sans avoir à utiliser les méthodes numériques. C'est le cas où le champ magnétique est fort et ses variations dans l'espace et le temps sont lentes. Un champ électrique peut venir se superposer au champ magnétique à condition qu'il soit faible devant ce dernier. Le problème peut alors être traité par la méthode des approximations successives.

A l'approximation d'ordre zéro on néglige complètement le champ électrique ainsi que les variations spatio-temporelles du

champ magnétique. La particule est alors animée d'un mouvement de rotation rapide sur un petit cercle de Larmor dont le centre se déplace le long d'une ligne de force magnétique. En première approximation on tient compte du champ électrique et des inhomogénéités spatio-temporelles du champ magnétique, qui se manifestent par un mouvement supplémentaire lent du centre du cercle de Larmor. Ce mouvement porte le nom de *dérive* et le centre du cercle de Larmor celui de *centre menant* de la particule. Les paramètres du mouvement : fréquence de cyclotron ω, rayon ρ du cercle de Larmor, vitesses longitudinale $v_{\parallel}$ et transversale $v_{\perp}$ de la particule varient lentement. On entend par variation lente une variation qui est petite devant les valeurs de ces paramètres au cours d'une période de cyclotron $T = 2\pi/\omega$. Il faut pour cela que sur la longueur du cercle de Larmor et pendant la durée de la période de cyclotron la variation du champ magnétique] soit petite. Comme on suppose que le champ magnétique est fort, le rayon du cercle de Larmor est petit. Les rotations rapides sur un petit cercle sont souvent de peu d'intérêt. Pour les éliminer des calculs, il suffit de faire la moyenne du mouvement de la particule sur un temps de l'ordre de la période de cyclotron. On aura alors affaire non pas au mouvement de la particule, mais au mouvement moyenné de son centre menant. La théorie qui traite du mouvement ainsi simplifié de la particule est appelée *théorie de dérive*. Au cours des deux dernières décennies la théorie de dérive trouve de nombreuses applications dans l'étude des mouvements des particules cosmiques dans les champs magnétiques interstellaires et interplanétaires, ainsi que dans différents pièges magnétiques utilisés pour confiner et échauffer le plasma en vue de la réalisation de réactions nucléaires contrôlées. On trouvera ci-après un exposé simplifié de la théorie de dérive et de ses principaux résultats.

2. L'objet de la théorie de dérive consiste à déterminer la vitesse du mouvement régulier du centre menant résultant de la présence d'un champ électrique et des inhomogénéités spatio-temporelles du champ magnétique. En vertu de l'équation de Maxwell $\partial \boldsymbol{B}/\partial t = -c \operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ les inhomogénéités temporelles du champ magnétique peuvent être éliminées du calcul en les exprimant par des variations spatiales correspondantes du champ électrique. Nous avons dit que le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ était fort. Les grandeurs qui sont proportionnelles à $\boldsymbol{B}$ sont considérées comme des grandeurs d'*ordre zéro*. Ce sont les grandeurs les plus grandes qui ne figurent cependant pas dans la théorie de dérive, car elles ne se manifestent que dans les rotations rapides sur les circonférences de cyclotron qui s'éliminent par moyennage sur les périodes de cyclotron. Les termes qui sont proportionnels au champ électrique et aux dérivées premières spatiales du champ magnétique sont appelés termes du *premier ordre de petitesse*. Nous négligerons les dérivées premières et d'ordres supérieurs du champ électrique $\boldsymbol{E}$ ainsi que les dérivées secondes et d'ordres supé-

rieurs du champ magnétique $\boldsymbol{B}$. Dans cette approximation la vitesse du mouvement régulier du centre menant se présente comme une fonction linéaire de l'intensité $\boldsymbol{E}$ du champ électrique et des dérivées premières spatiales du vecteur $\boldsymbol{B}$. Il est évident que dans cette approximation tous les termes de la fonction linéaire sont *indépendants* et peuvent être calculés *indépendamment les uns des autres*. Les variations spatiales du champ magnétique se composent de ses variations en grandeur et en direction. On peut donc décomposer le mouvement de dérive du centre menant en trois mouvements: 1) *dérive sous l'action du champ électrique ou dérive électrique*, 2) *dérive due aux seules variations en grandeur du champ magnétique*, 3) *dérive due aux seules variations en direction du champ magnétique* (i.e. déformations des lignes de force magnétiques). Dans l'approximation linéaire on peut calculer ces différentes vitesses de dérive *indépendamment* les unes des autres; c'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

3. La dérive électrique. Comme indiqué ci-dessus, en première approximation on n'a pas à tenir compte de l'inhomogénéité du champ électrique. On ne tiendra pas compte non plus de l'inhomogénéité du champ magnétique puisque celle-ci n'affecte la vitesse de la dérive électrique qu'en deuxième approximation. On peut donc utiliser le résultat (86.3a) établi pour les champs non homogènes, quoique cette formule ne sera plus exacte et ne donnera la vitesse de dérive électrique qu'en première approximation.

Les considérations suivantes aideront à se faire une idée claire de l'origine de la dérive électrique ainsi que de toute dérive provo-

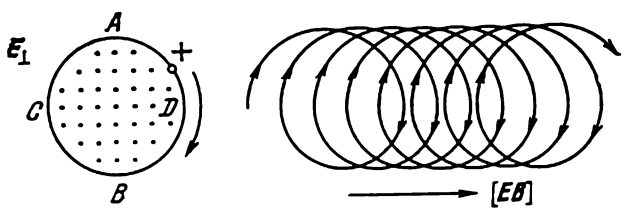


Fig. 215

quée par une petite force de perturbation $\boldsymbol{F}$ superposée au champ magnétique. En admettant que le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ est homogène, considérons la projection de la trajectoire de la particule sur un plan orthogonal à ce champ. Confondons ce plan avec le plan de la figure et orientons le champ magnétique vers le lecteur (fig. 215 et 216). En l'absence de champ électrique la projection de la trajectoire de la particule sera un cercle de Larmor de rayon ρ. Pour fixer les idées posons qu'il s'agit d'une particule portant une charge positive (fig. 215) et superposons un champ électrique dont la composante $E_\perp$ est dirigée suivant la verticale ascendante. Puisque lors du

mouvement ascendant de la particule le champ $E_\perp$ produit un travail positif la vitesse $v_\perp$ de la particule dans la position supérieure A sera plus grande que dans la position inférieure B. D'autre part, au point A les champs électrique et magnétique exercent sur la particule des actions dirigées en sens opposés, tandis qu'au point B ces actions sont de même sens. Ces deux effets ont pour résultat que le

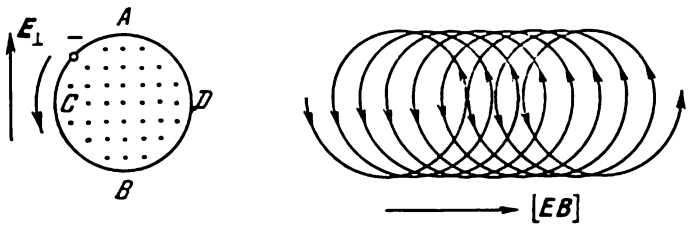


Fig. 216

rayon de courbure r de la projection de la trajectoire augmente dans sa partie supérieure et diminue dans sa partie inférieure, conformément aux expressions suivantes:

$$\frac{1}{r}=\frac{eB}{mv_\perp c}-\frac{eE_\perp}{mv_\perp^2} \text{ (au point } A\text{)},$$

$$\frac{1}{r}=\frac{mB}{mv_\perp c}+\frac{eE_\perp}{mv_\perp^2} \text{ (au point } B\text{)}.$$

De ce fait le cercle est transformé en une courbe non fermée telle qu'en la parcourant la projection de la particule se déplace lentement de gauche à droite (fig. 215, à droite). Ce déplacement est la dérive électrique. Pour une particule portant une charge négative le déplacement correspondant est illustré par la figure 216. Dans les deux cas la particule dérive de gauche à droite i.e. le sens de la dérive électrique *ne dépend pas du signe de la charge de la particule.*

Pour calculer la vitesse de la dérive électrique on se fondera sur les considérations suivantes. Dans les positions C et D (fig. 215) la particule se meut avec la même vitesse v_C qui est plus grande que sa vitesse au point B et plus petite qu'au point A d'une même quantité u. Cette quantité u est la vitesse de dérive électrique: $u = v_d$. En effet en utilisant un référentiel se déplaçant de gauche à droite avec la vitesse u, les vitesses de la particule dans les positions A et B deviennent égales, de sorte que la particule effectue un mouvement circulaire uniforme. La grandeur u se laisse déterminer à partir de l'équation énergétique: $^1/_2m\,(v_C + u)^2 - {}^1/_2mv_C^2 = eE_\perp\rho$. En

substituant $\rho = mcv_C/(eB)$ et en négligeant le carré de la vitesse u on obtient

$$v_d = u = \frac{E_\perp}{B} c,$$

résultat conforme à (86.3a).

4. Dérive déterminée par les variations en grandeur du champ magnétique. Pour calculer la vitesse instantanée de dérive on introduit un référentiel local dont l'axe Z est orienté suivant la direction du champ magnétique $\boldsymbol{B}$. Notons $\boldsymbol{h}$ le vecteur unitaire suivant la direction de $\boldsymbol{B}$. Prenons pour

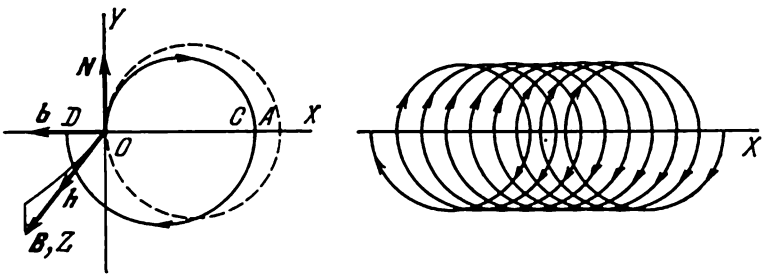


Fig. 217

axe Y la direction de la normale principale $\boldsymbol{N}$ à une ligne de force magnétique et orientons l'axe X dans le sens négatif de la binormale $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{hN}]$ (fig. 217).

La plus forte variation de la grandeur du champ magnétique se produit suivant la direction de la normale principale $\boldsymbol{N}$. Dans le cas qui nous importe surtout, celui où la particule se meut dans une région de l'espace où ne circule aucun courant électrique, le champ $\boldsymbol{H} \equiv \boldsymbol{B}$ doit croître suivant la normale $\boldsymbol{N}$. Pour le démontrer considérons dans un plan adjacent deux lignes de force magnétiques BC et AD infiniment rapprochées et deux segments de droite infiniment courts AB et CD orthogonaux à ces lignes de force (fig. 218). La circulation du vecteur $\boldsymbol{H}$ le long du contour infinitésimal $BCDA$ est égale à $H_1 l_1 - H_2 l_2$, où l_1 et l_2 sont les longueurs des côtés BC et AD et H_1 et H_2 les intensités de champ magnétique sur ces côtés du contour. Puisqu'en l'absence de courant électrique cette circulation est égale à zéro, le champ H sera plus fort sur le côté le plus court, ce qui démontre notre assertion.

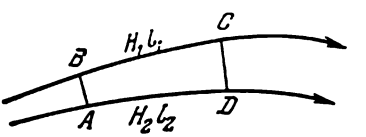


Fig. 218

Comme il s'agit ici de l'influence qu'exercent sur la vitesse de dérive les variations du module du champ magnétique, sa direction restant constante on peut négliger la courbure des lignes de force magnétiques et poser qu'elles sont rectilignes. On peut également négliger l'existence d'une composante longitudinale $v_{\parallel}$ de la vitesse puisque le déplacement le long d'un champ magnétique n'affecte pas les forces s'exerçant sur la particule. Cela signifie que dans tous les calculs intermédiaires on doit entendre par v la vitesse transversale $v_{\perp}$. Pour abréger l'écriture on supprimera l'indice $\perp$ partout sauf dans les formules finales où $v_{\perp}$ désignera la vitesse transversale. Le calcul intermédiaire sera fait pour une particule portant une charge e positive.

Une particule positive tournera dans le sens des aiguilles d'une montre comme indiqué sur la figure 217. Partant du point O, elle se déplacerait sur un cercle de rayon $\rho = v/\omega_B$ si le champ magnétique B était constant. Ce cercle représenté en pointillé sur la figure 217 coupe l'axe X en un point A se trouvant à une distance $OA = 2\rho$ du point O. Or le champ magnétique et la courbure de la trajectoire augmentent avec la coordonnée y. Par suite la particule rencontrera l'axe X en un point C se trouvant à gauche du point A. Lorsque la particule se déplacera dans la moitié inférieure du plan XY, la courbure de la trajectoire sera plus petite et la particule rencontrera l'axe X en un point D se trouvant à gauche du point O. Ainsi après une révolution la particule chargée positivement se déplacera de droite à gauche d'une distance OD. Une particule chargée négativement serait déplacée dans le sens contraire. Si la variation spatiale du champ magnétique est faible, la trajectoire réelle d'une particule ayant effectué une révolution diffère peu d'une trajectoire circulaire et le déplacement OD est petit devant le rayon ρ. Le chemin parcouru par une particule après plusieurs révolutions est représenté sur la figure 217 à droite. La particule tourne rapidement sur une circonférence dont le centre se déplace lentement parallèlement à l'axe X. Ce déplacement est une dérive.

Calculons la vitesse de dérive v_d en prenant la moyenne du mouvement de la particule sur la rotation rapide de Larmor. Ecrivons l'équation de mouvement de la particule $\dot{v} = [v\omega_B]$ sous forme analytique :

$$\dot{v}_x = v_y\omega_B, \quad \dot{v}_y = -v_x\omega_B.$$

Comme la dérive se produit parallèlement à l'axe X et qu'il n'y a pas de dérive parallèlement à l'axe Y, on trouve la vitesse de dérive $v_d = \bar{v}_x$ en imposant que la valeur moyenne de v_y et par suite celle de $\dot{v}_y = -v_x\omega_B$ soient nulles, i.e. $\overline{v_x\omega_B} = 0$. Développons ω_B en

une série de puissances de y et gardons le seul terme linéaire de ce développement :

$$\omega_B = \omega_0 + \left(\frac{d\omega_B}{dy}\right)_{y=0} y.$$

On aura alors

$$\overline{v}_x\omega_0 + \frac{d\omega_B}{dy}\,\overline{yv_x} = 0.$$

Comme par hypothèse la quantité $d\omega_B/dy$ est petite, il suffit de calculer la valeur moyenne du produit $yv_x = y\dot{x}$ dans l'approximation d'ordre zéro, ce qui revient à admettre que la trajectoire de la particule est circulaire :

$$x = \rho\cos\omega_0 t, \qquad y = -\rho\sin\omega_0 t.$$

On a alors

$$\overline{y\dot{x}} = \rho^2\omega_0\,\overline{\sin^2\omega_0 t} = \frac{1}{2}\rho^2\omega_0,$$

d'où

$$v_d = \overline{v}_x = -\frac{\rho^2}{2}\frac{d\omega_B}{dy},$$

ce qui s'écrit sous forme vectorielle

$$\boldsymbol{v}_d = \frac{\rho^2}{2}\frac{d\omega_B}{dy}\boldsymbol{b}, \tag{87.1}$$

et en tenant compte des relations $\rho = v/\omega_B$ et $\omega_B = eB/(mc)$

$$\boldsymbol{v}_d = \frac{mcv_\perp^2}{2eB^2}\frac{\partial B}{\partial N}\boldsymbol{b}. \tag{87.2}$$

Cette dernière formule est vérifiée que la particule porte une charge positive ou négative. *Une particule chargée positivement dérive dans le sens positif de la binormale à une ligne de force magnétique et une particule chargée négativement dérive dans le sens négatif de la binormale.*

Mettons maintenant la formule (87.2) sous une forme géométriquement plus concrète en supposant que dans la région de l'espace où se meut la particule il n'y a aucun courant électrique. Comme le champ $\boldsymbol{B}$ au point considéré est dirigé suivant l'axe Z, on écrira la formule (87.2) de la manière suivante :

$$\boldsymbol{v}_d = \frac{mcv_\perp^2}{2eB^2}\frac{\partial B_z}{\partial y}\boldsymbol{b}.$$

En l'absence de courant électrique rot $\boldsymbol{B} = 0$ et $\partial B_z/\partial y = \partial B_y/\partial z$ et par suite

$$v_d = \frac{mcv_\perp^2}{2eB^2}\frac{\partial B_y}{\partial z}\boldsymbol{b}.$$

La figure 219 montre que tg $\alpha = B_y/B_z$, α étant l'angle entre la tangente à la ligne de force magnétique et l'axe Z. A l'origine des coordonnées O la tangente est horizontale et on peut donc remplacer tg α par α à proximité de O. Pour cette même raison on peut remplacer la différentiation le long d'un arc de la ligne de force magnéti-

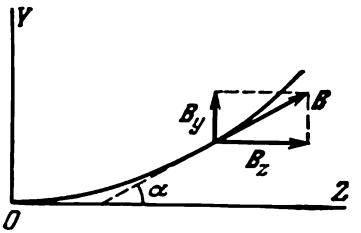


Fig. 219

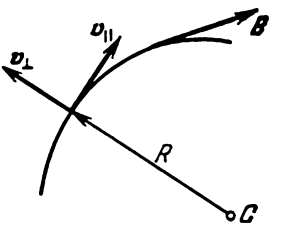


Fig. 220

que par la différentiation par rapport à la coordonnée z. Le rayon de courbure R d'une ligne de force est donné par

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial\alpha}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B_y}{B_z}\right) = \frac{1}{B_z}\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{B_y}{B_z^2}\frac{\partial B_z}{\partial z},$$

ou $1/R = \frac{1}{B}\frac{\partial B_y}{\partial z}$ puisqu'au point O $B_z = B$, $B_y = 0$. On obtient finalement

$$v_d = \frac{mcv_\perp^2}{2eBR}\boldsymbol{b}. \tag{87.3}$$

5. Dérive déterminée par l'incurvation des lignes de force magnétiques. Pour calculer la vitesse de dérive introduisons un référentiel local en rotation autour du centre de courbure C d'une ligne de force magnétique (fig. 220). Orientons l'axe de rotation parallèlement à la binormale $\boldsymbol{b}$ de cette ligne de force (la binormale est perpendiculaire au plan de la figure). La valeur de la vitesse angulaire de rotation Ω est définie par la condition $v_\parallel = [\Omega R]$. Dans ce référentiel local la particule ne possède qu'une vitesse transversale $v_\perp$ qui joue le rôle d'une vitesse relative v_{rel}. Pour décrire le mouvement de la particule dans le référentiel local on doit ajouter aux forces s'exerçant sur la particule deux forces d'inertie — la force de Coriolis et la force centrifuge. On n'a pas à tenir compte de la non-uniformité de la vitesse de rotation car

elle ne peut affecter la dérive de la particule qu'au deuxième ordre de petitesse ou à un ordre supérieur. La force d'inertie de Coriolis $2m\,[\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\boldsymbol{\Omega}] = 2m\Omega\,[\boldsymbol{v}_\perp \boldsymbol{b}]$ est orientée suivant la ligne de force et ne peut donc modifier que la composante longitudinale $v_\parallel$ de la vitesse $\boldsymbol{v}$. La force d'inertie centrifuge $mv_\parallel^2 \boldsymbol{R}/R^2$ fait apparaître une dérive suivant une direction orthogonale. Selon la formule (86.4) la vitesse de cette dérive est

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} = \frac{c}{B^2 e}\left[\frac{mv_\parallel^2}{R^2}\,\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{B}\right] = -\frac{mcv_\parallel^2}{BeR}\,[\boldsymbol{Nh}].$$

En notant $\boldsymbol{N}$ le vecteur unitaire de la normale principale à la ligne de force magnétique, on a $\boldsymbol{R} = -R\boldsymbol{N}$. On posera donc $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{h}$ et en remarquant que $\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{hN}]$ la dernière relation s'écrit

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} = \frac{mcv_\parallel^2}{BRe}\,\boldsymbol{b}. \tag{87.4}$$

Comme la dérive que décrit cette formule est due à la force d'inertie centrifuge on est en présence d'une *dérive centrifuge.*

6. Considérons maintenant le cas général d'un champ électromagnétique quelconque auquel s'applique l'approximation de la dérive. Comme toutes les dérives que nous avons considérées ci-dessus sont en première approximation indépendantes les unes des autres, il suffit de les additionner dans le cas général. On obtient ainsi pour le mouvement moyenné du centre menant de la particule dans une région de l'espace où ne circule aucun courant électrique

$$\boldsymbol{V} = v_\parallel \boldsymbol{h} + \frac{c}{B^2}\,[\boldsymbol{EB}] + \frac{mc}{eBR}\left(v_\parallel^2 + \frac{1}{2}\,v_\perp^2\right)\boldsymbol{b}. \tag{87.5}$$

Dans cette formule les notations ont été légèrement modifiées. $\boldsymbol{h}$ désigne ici le vecteur unitaire de la tangente à la ligne de force magnétique passant par le centre menant de la particule et non par la particule elle-même. Les grandeurs $v_\parallel$ et $v_\perp$ désignent les *valeurs moyennes* de la vitesse de la particule le long du *nouveau vecteur* $\boldsymbol{h}$ et le long d'une normale à ce vecteur. De même nous assignons les valeurs des champs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{E}$ au point où se trouve le centre menant de la particule et non au point où se trouve la particule. Ces changements n'altèrent que le premier terme du second membre de la formule (87.5), les autres termes n'étant affectés qu'au premier ordre ou à un ordre supérieur de petitesse. Le premier terme $v_\parallel \boldsymbol{h}$ se trouve modifié par les changements effectués car ils sont d'ordre zéro de petitesse. Si on avait conservé l'ancienne signification du vecteur $\boldsymbol{h}$, on aurait dû introduire dans le terme $v_\parallel \boldsymbol{h}$ un terme correctif de premier ordre de petitesse. Ce terme est inutile avec la nouvelle définition du vecteur $\boldsymbol{h}$.

Ainsi *dans un champ magnétique fort mais faiblement inhomogène et en présence d'un champ électrique faible une particule chargée effec-*

tue un rapide mouvement de rotation sur un cercle de Larmor dont le centre se déplace le long d'une ligne de force magnétique avec la vitesse $v_\parallel$ *et dérive dans une direction normale au champ magnétique. La dérive est déterminée par le champ électrique et les inhomogénéités du champ magnétique. La vitesse de la dérive électrique est donnée par l'expression* $\frac{c}{B^2}[\boldsymbol{EB}]$. *Le sens de cette dérive est indépendant du signe de la charge portée par la particule. La dérive déterminée par les inhomogénéités du champ magnétique s'effectue le long de la binormale à une ligne de force magnétique; les particules de charge positive dérivent dans le sens positif de la binormale et les particules chargées négativement dérivent en sens contraire. La vitesse de cette dérive « magnétique » est donnée par l'expression* $\frac{mc}{eBR}\left(v_\parallel^2 + \frac{1}{2}v_\perp^2\right)\boldsymbol{b}$.

§ 88. L'invariant adiabatique

1. Lorsqu'une particule chargée se meut dans un champ magnétique inhomogène ou lorsque le champ magnétique varie, le rayon de Larmor ρ de la particule ainsi que sa vitesse transversale $v_\perp$ varient. Etudions l'allure de ces variations en supposant que l'inhomogénéité du champ magnétique est faible et qu'il varie lentement dans le temps.

Considérons d'abord le cas où la particule se déplace dans une direction normale au champ magnétique $\boldsymbol{B}$, ce champ étant homogène et ne variant qu'en fonction du temps. Nous supposerons qu'il n'y a pas de champ électrique autre que celui résultant de la variation temporelle de $\boldsymbol{B}$. Dans ces conditions la particule ne dérive pas, comme l'indique la formule (87.5). Si le champ magnétique était invariable, la particule décrirait une trajectoire circulaire de rayon $\rho = v/\omega$. Lorsque le champ magnétique varie, la trajectoire cesse d'être fermée. Si le champ magnétique varie lentement, au cours d'une période de cyclotron $T = 2\pi/\omega$ les écarts à une trajectoire circulaire sont petits. Tout champ magnétique variable induit un champ électrique sous l'influence duquel le rayon de Larmor ρ et la vitesse v de la particule varient selon l'équation $m\dot{v} = eE_s$, où E_s est la projection du champ électrique $\boldsymbol{E}$ sur la direction de la trajectoire. On peut négliger les variations de E_s au cours d'une période de cyclotron et comme les écarts de la trajectoire réelle de la particule par rapport à la trajectoire circulaire de Larmor sont petits, on peut remplacer E_s par la projection du vecteur $\boldsymbol{E}$ sur la direction du cercle de Larmor (ce dernier est représenté en pointillé sur la figure 221). Dans ces conditions E_s se laisse déterminer par l'équation

$$\oint E_s\,ds = \frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi\rho^2}{c}\frac{dB}{dt}.$$

La dérivée $d\Phi/dt$ est affectée ici du signe plus et non du signe moins parce qu'il s'agit de la projection sur le sens du mouvement de la particule, et pour $e > 0$ ce sens est contraire au sens positif de parcours du contour. On tire de l'équation ci-dessus

$$E_s = -\frac{\rho}{2c}\frac{dB}{dt} = \frac{mv}{2eB}\frac{dB}{dt}.$$

L'équation de mouvement s'écrit maintenant

$$m\frac{dv}{dt} = \frac{mv}{2B}\frac{dB}{dt}.$$

Après intégration on obtient

$$\frac{v^2}{B} = \text{const}.$$

Ce résultat signifie que la quantité v^2/B se conserve lors du mouvement de la particule. Mais ce n'est vrai que si les variations du champ magnétique sont *lentes*; la quantité v^2/B n'est pas l'intégrale de mouvement exacte mais un *invariant adiabatique*.

Dans le cas où la particule possède une vitesse longitudinale $v_\parallel$, celle-ci n'exerce aucune influence sur le mouvement transversal. Dans le cas considéré il suffit de remplacer la vitesse réelle v de la particule par sa composante transversale $v_\perp$, ce qui donne

$$\frac{v_\perp^2}{B} = \text{const}. \qquad (88.1)$$

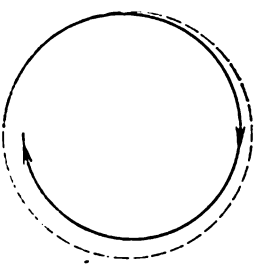


Fig. 221

C'est la quantité $v_\perp^2/B$ qui est l'invariant adiabatique.

2. Considérons maintenant le cas où le champ magnétique dans lequel se meut la particule est continu et ses inhomogénéités sont petites. Nous supposerons que la particule ne subit aucune dérive transversale, ce qui signifie que son centre menant se déplace le long d'une ligne de force magnétique. Pour simplifier nous admettrons que les lignes de force magnétiques sont rectilignes (sur la figure 222 la ligne de force est représentée en pointillé). La particule peut se déplacer dans le sens de convergence ou dans le sens de divergence des lignes de force magnétiques. Une particule en mouvement est soumise à la force de Lorentz $\boldsymbol{F} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]$. Cette force a une composante le long de la ligne de force centrale, qui ralentit ou accélère le mouvement longitudinal d'une particule suivant qu'elle

est dirigée dans le sens de la convergence des lignes de force ou dans le sens opposé. Comme l'énergie cinétique totale de la particule se conserve, tout accroissement de la vitesse longitudinale $v_{\parallel}$ s'accompagne d'une diminution de la vitesse transversale $v_{\perp}$ et inversement. Nous allons démontrer que la relation (88.1) reste cependant valable. Il suffit de passer dans un référentiel en mouvement avec la vitesse $v_{\parallel}$. Etant parallèle au champ magnétique $\boldsymbol{B}$, la force d'inertie de translation $-m\dot{v}_{\parallel}$ qui apparaît n'exerce aucune influence sur la vitesse de dérive. Or dans un référentiel mobile le champ magnétique $\boldsymbol{B}$ devient variable et on peut donc lui appliquer toutes les considérations que nous avons utilisées pour obtenir la formule (88.1).

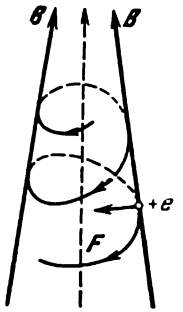


Fig. 222

3. Considérons le cas où la particule est soumise à une dérive transversale avec la vitesse v_d. Cette dérive peut être due soit à un champ électrique soit aux inhomogénéités du champ magnétique, soit enfin à ces deux causes agissant simultanément. Il est également possible que la dérive soit due à d'autres forces mais les considérations qui suivent s'appliquent à tous les cas. Utilisons un référentiel en mouvement avec la vitesse v_d. On peut négliger ici la force d'inertie $-m\dot{v}_d$, car c'est une quantité d'ordre de petitesse égal ou supérieur à deux. Ainsi le cas qui nous occupe se trouve ramené aux cas déjà considérés. Il en résulte que le rôle d'invariant adiabatique sera assumé ici par la quantité $v_{\perp}'^2/B$, où v' est la vitesse de la particule dans le référentiel mobile. Or $v_{\perp}'$ est la vitesse de rotation de la particule sur le cercle de Larmor lorsqu'on néglige son mouvement de dérive et son mouvement le long d'une ligne de force magnétique. On en conclut que l'invariance adiabatique de $v_{\perp}^2/B$ se conserve à condition d'entendre par $v_{\perp}$ la vitesse de rotation de la particule sur le cercle de Larmor comme nous venons de le préciser.

4. Une particule animée d'un mouvement de rotation sur le cercle de Larmor possède un moment magnétique $\vec{\mathfrak{M}}$ égal à $mv_{\perp}^2/(2B)$. Ce moment est orienté dans le sens contraire à celui du champ magnétique quel que soit le signe de la charge de la particule ; aussi sous forme vectorielle ce moment est donné par

$$\vec{\mathfrak{M}} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B}\,\boldsymbol{h}. \tag{88.2}$$

Le flux magnétique à travers le cercle de Larmor est égal à

$$\Phi = \pi\frac{m^2c^2v_{\perp}^2}{e^2B}. \tag{88.3}$$

Compte tenu de (88.1) on en conclut que $\vec{\mathfrak{M}}$ et Φ sont des invariantes adiabatiques.

5. A l'invariance adiabatique de la quantité (88.1) est lié l'effet de *réflexion des particules chargées par les régions où le champ magnétique est fort.* Posons que le champ magnétique ne varie pas au cours du temps et que la particule se déplace dans le sens de la convergence des lignes de force magnétiques. Conformément aux résultats du point 2 la vitesse longitudinale de la particule doit diminuer et sa vitesse transversale doit augmenter. En notant v la vitesse totale, α l'angle que fait la vitesse v avec la ligne de force magnétique, on a $v_\perp = v \sin \alpha$. Comme la vitesse v ne varie pas lorsque la particule se déplace dans un champ magnétique permanent, on tire de (88.1)

$$\frac{\sin^2 \alpha}{B} = \frac{\sin^2 \alpha_0}{B_0} = \text{const.} \tag{88.4}$$

L'indice zéro dénote les valeurs de B et de α pour une position de la particule choisie comme position initiale. La formule (88.4) montre que la particule ne peut pénétrer dans la région du champ où $B > B_0/\sin^2 \alpha_0$ puisque dans le cas contraire $|\sin \alpha|$ serait plus grand que un. A mesure que la particule pénètre plus avant dans une région de champ plus intense, l'angle α augmente. Tant que cet angle reste inférieur à 90° la particule continue d'avancer, ce qui exige que pour tous les points de la trajectoire soit vérifiée l'inégalité

$$\sin \alpha_0 < \sqrt{B_0/B}. \tag{88.5}$$

Lorsqu'en un point quelconque de la trajectoire l'angle α devient égal à 90°, la particule commence à régresser, ce qui signifie qu'elle a été réfléchie. Cet effet rappelle la réflexion totale de la lumière en optique. Le point où se produit la réflexion est défini par l'équation

$$\sin \alpha_0 = \sqrt{B_0/B}. \tag{88.6}$$

6. En relation avec les questions que nous venons d'examiner il est opportun de citer le problème de la *fusion thermonucléaire contrôlée.* Dans certaines conditions les noyaux atomiques légers peuvent fusionner en dégageant une énergie de plusieurs MeV ou de plusieurs dizaines de MeV par réaction thermonucléaire. Telles sont par exemple les réactions de fusion des noyaux du deutérium ou de fusion des noyaux de deutérium avec des noyaux de tritium. La quantité d'énergie dégagée dans les réactions de fusion est des millions de fois plus grande que celle dégagée dans les réactions chimiques ordinaires. Dans les conditions naturelles les réactions thermonucléaires évoluent au sein des étoiles et les réactions de fusion artificielles sont réalisées dans la bombe à hydrogène. Dans les bombes à hydrogène la fusion des noyaux atomiques est non contrôlée et présente

un caractère explosif. Dans tous les pays industriels du monde d'importants travaux de recherches consacrés à la réalisation de réactions de fusion contrôlées ont été lancés. Si on y arrive un jour, l'Humanité aura à sa disposition une source d'énergie pratiquement inépuisable puisque les réserves terrestres en deutérium sont fort importantes. (L'Océan Mondial contient un atome de deutérium pour 5000-6000 atomes d'hydrogène.) Pour que les noyaux légers puissent commencer à fusionner, il faut porter la substance à une température égale ou supérieure à 10 keV. A ces températures toutes les substances passent à l'état de *plasma totalement ionisé*, composé d'électrons et de noyaux atomiques. Il s'agit donc de produire le plasma, de le chauffer et de le confiner pendant un temps suffisamment long pour que la plupart des noyaux réagissent entre eux. Pour y arriver on a proposé différents dispositifs de confinement du plasma à l'aide de champs magnétiques.

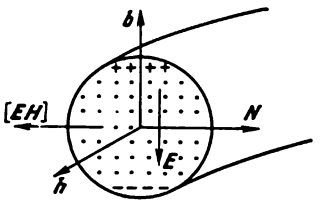


Fig. 223

L'étude du problème de la fusion thermonucléaire contrôlée commença en U.R.S.S. en 1951 et peu après aux U.S.A. et dans les autres pays développés. Initialement on pensait pouvoir utiliser pour le confinement du plasma le champ magnétique à l'intérieur d'une bobine toroïdale (cf. fig. 151). Le champ magnétique y imposerait aux particules du plasma des trajectoires coïncidant avec les lignes de force magnétiques en forme de cercles coaxiaux centrés sur l'axe géométrique du tore. Or le champ magnétique toroïdal augmente à mesure qu'on s'approche de cet axe. De ce fait les particules chargées positivement dérivent le long de la binormale $\boldsymbol{b}$ et les particules chargées négativement dérivent en sens inverse. Le plasma se polarise, ce qui fait apparaître un champ électrique orienté suivant la verticale descendante (fig. 223). Ce champ électrique donne naissance à une dérive électrique et comme le sens de cette dérive est indépendant du signe des charges des particules, le plasma tout entier s'en trouve rejeté vers la paroi extérieure de la chambre de réaction. Aussi ce dispositif simple ne peut-il assurer le confinement magnétique (piège magnétique). Nous ne pouvons expliquer ici les procédés de compensation de la « dérive torique » utilisés dans les installations de recherche thermonucléaire modernes appelées *stellarators* et *tokomaks* ; ce sont surtout les tokomaks qui semblent offrir les meilleures perspectives pour résoudre le problème de la fusion thermonucléaire contrôlée.

Mentionnons encore un autre type de piège magnétique fondé sur les concepts développés dans ce paragraphe. C'est le piège ouvert représenté schématiquement sur la figure 224. Le champ magnétique est produit par une bobine rectiligne. Au centre du piège le

champ magnétique est presque homogène et égal à B_0. A l'aide de bobines auxiliaires on renforce le champ près des bords jusqu'à la valeur maximale B. Les zones de champ magnétique renforcé sont appelées *miroirs* ou *bouteilles magnétiques*. Le piège ne retient que les particules qui vérifient la condition

$$\sin \alpha_0 > \sqrt{B_0/B}. \tag{88.7}$$

Les particules réfléchies exécutent un mouvement fini jusqu'à ce que, par interaction avec les autres particules, la condition (88.7) ne soit plus vérifiée. Si l'angle α vérifie la condition (88.5) le piège

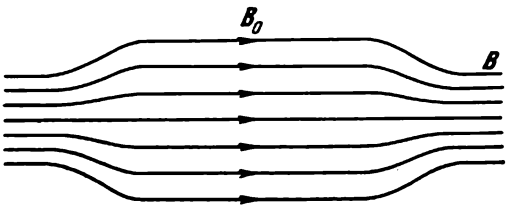


Fig. 224

ne peut retenir les particules. Le cône défini par l'équation (88.6) est appelé *cône de perte*. Le piège ne retient que les particules dont les directions de mouvement (dans la région de champ uniforme) sont comprises dans les limites du cône de perte. Toutes les autres particules s'en échappent.

Nous nous limiterons à ces quelques informations, car le problème de la fusion thermonucléaire contrôlée est un très grand problème non encore résolu ; le lecteur pourra consulter avec profit l'ouvrage de L. A. Artsimovitch « Fusion thermonucléaire contrôlée ».

7. Notons pour conclure ce paragraphe que le champ magnétique terrestre fonctionne comme un piège magnétique d'échelle cosmique, de structure analogue au piège ouvert représenté sur la figure 224. L'intensité du champ magnétique terrestre est minimale à l'équateur et maximale à proximité des pôles magnétiques. Une particule chargée dont la direction n'est pas comprise dans le cône de perte exécutera un mouvement oscillant le long d'une ligne de force magnétique, étant réfléchie près des pôles magnétiques, et dérivera lentement vers l'est ou vers l'ouest. La particule se trouve « bloquée » puisque son mouvement est limité dans une région déterminée autour du globe terrestre. Des particules de grandes énergies se forment constamment dans les couches supérieures de l'atmosphère à la suite de réactions nucléaires déterminées par l'action des rayons cosmiques. Certaines particules s'éloignent de l'espace circumterrestre, d'autres y sont piégées. C'est ainsi que se forment les *couches* ou *ceintures radiatives* décelées en 1958 par Van Allen et par S. N. Ver-

nov (né en 1910) à l'aide des satellites artificiels. Ces recherches ont montré que notre planète est entourée, en plus de l'enveloppe gazeuse, de plusieurs couches de particules chargées de grandes énergies que l'on appelle ceintures de radiations. Selon des données récentes, il existe deux couches d'électrons et une couche de protons qui se recouvrent notablement. La ceinture protonique et la ceinture électronique intérieure apparaissent à une altitude de 1000 km environ. Le maximum de concentration de la ceinture protonique se trouve à une distance du centre de la Terre approximativement égale à trois rayons terrestres. L'énergie des protons varie de 40 MeV sur la frontière interne de la ceinture à 0,5 MeV dans les zones extérieures. Le maximum de concentration de la ceinture électronique intérieure se trouve à 1,5 et celui de la ceinture extérieure à environ 5 rayons terrestres du centre de la Terre.

Voyons dans quelle mesure on peut appliquer la théorie de la dérive au mouvement des particules des ceintures radiatives. Posons que le champ magnétique est égal à $B \sim 0{,}1$ G dans les limites de la ceinture de radiations. Pour des protons d'energie $\mathscr{E} = 1$ MeV, le rayon de Larmor est

$$\rho_{\text{pr}} = \frac{v}{\omega_{\text{pr}}} = \frac{\sqrt{2\mathscr{E} m_{\text{pr}} c^2}}{|e|\, B} \sim 10\,\text{km}.$$

Pour les électrons animés de vitesses proches de la vitesse de la lumière, on doit faire appel à une formule relativiste. Pour des électrons de même énergie $\mathscr{E}$, la formule relativiste fournit le résultat suivant:

$$\rho_{\text{él}} = \frac{c}{\omega_{\text{él}}} = \frac{m_{\text{él}} c^2}{|e|\, B} = \frac{\mathscr{E} + m_{0\,\text{él}} c^2}{|e|\, B} \sim 0{,}3\,\text{km}.$$

On peut assimiler en approximation le champ magnétique terrestre au champ d'un doublet et poser que son intensité varie en raison inverse du cube de la distance au centre de la Terre: $B \sim \text{const}/r^3$. On en tire $|\Delta B/B| \sim 3\Delta r/r$. En posant $\Delta r = \rho$ on obtient

$$\Delta B/B \sim \rho/r,$$

ce qui donne $|\Delta B/B| \sim 10^{-3}$ pour les protons et $\sim 10^{-4}$ pour les électrons. Ainsi malgré l'intensité relativement faible du champ magnétique terrestre, les dimensions des cercles de Larmor des protons et des électrons sont négligeables devant le rayon terrestre; sur des distances comparables à ces dimensions la variation du champ magnétique est petite. Ces résultats suffisent pour pouvoir appliquer au mouvement d'une particule la théorie de la dérive et considérer ce mouvement comme adiabatique.

Il reste à élucider l'influence de la concentration des particules chargées. Pour cela il faut évaluer la longueur de libre parcours λ.

des particules. Or, comme dans le plasma les forces coulombiennes diminuent lentement avec la distance, la trajectoire d'une particule n'est pas composée de segments rectilignes en zigzag, comme c'est le cas pour les gaz neutres. Elle ressemble plutôt à une ligne ondulée dont la courbure varie de façon continue. Les variations de direction s'accumulent lentement pour donner un angle de déviation fini. On ne peut donc parler de longueur de libre parcours moyen que tout conventionnellement. Le rôle de la longueur de libre parcours λ est assumé par la distance moyenne que doit parcourir une particule pour que la direction de son mouvement varie de $\sim 90°$. Nous ne pouvons donner ici la démonstration de la formule de λ, aussi nous contenterons-nous d'en donner la valeur numérique. Dans les ceintures radiatives la concentration ne dépasse pas quelques particules chargées par cm^3. Posons pour fixer les idées $n \sim 10\ cm^{-3}$. Pour une particule d'énergie ~ 1 MeV, les estimations donnent $\lambda \sim \sim 10^{20}$ cm, valeur 10^{11} fois plus grande que les dimensions du globe terrestre. Ce résultat montre que les collisions avec d'autres particules ne peuvent empêcher une particule de subir des réflexions un très grand nombre de fois à proximité des pôles magnétiques avant qu'elle ne rentre dans le cône de perte et ne s'échappe du champ magnétique terrestre.

§ 89. Détermination de la charge spécifique d'une particule

1. On appelle *charge spécifique d'une particule* le rapport de sa charge e à sa masse m. Lorsqu'on détermine ce rapport, on exprime usuellement la charge e en unités C.G.S.M. et la masse m en grammes. On utilisera donc dans ce paragraphe le système d'unités C.G.S.M. On peut déterminer la charge spécifique par étude du mouvement de la particule dans des champs électrique et magnétique transversaux. C'est ce que fit J. J. Thomson et ses collaborateurs à la charnière du XXe siècle pour déterminer la nature des rayons cathodiques et anodiques émis dans des tubes contenant des gaz raréfiés (sous une pression de l'ordre de quelques centièmes de mm Hg). C'est ainsi que furent découverts l'*électron* et les *isotopes*, i.e. les éléments chimiques dont les noyaux ont une même charge mais des masses différentes.

2. Etudions d'abord le mouvement d'une particule dans le champ électrique transversal d'un condensateur chargé. Dirigeons l'axe X parallèlement aux armatures du condensateur et l'axe Z perpendiculairement à celles-ci. Posons qu'avant de pénétrer dans le condensateur la particule se déplaçait le long de l'axe X (fig. 225). Dès qu'elle aura pénétré dans le condensateur, elle sera soumise à l'action du champ électrique, sera déviée vers l'axe Z et se dépla-

cera dans le plan ZX. Les équations de mouvement de la particule sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=eE_x, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=eE_z. \tag{89.1}$$

Supposons que sur tout le parcours l'angle que fait la trajectoire avec l'axe X est petit, ce qui implique $v_z \ll v_x$. On peut donc négliger v_z^2 devant v_x^2 et écrire $v_x = (v^2 - v_z^2)^{1/2} \approx v\,[1-\frac{1}{2}\,(v_z/v)^2] \approx v$, où v est la vitesse totale de la particule. Dans cette approximation on peut poser que la vitesse v est constante et que le mouvement parallèlement à l'axe X est uniforme. En éliminant t à l'aide de la relation $dx = v\,dt$ on obtient la forme différentielle de l'équation de la trajectoire:

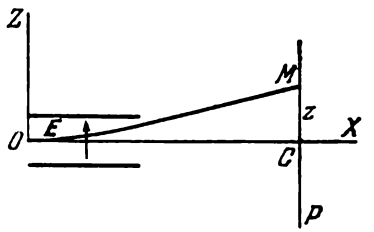


Fig. 225

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{e}{mv^2}E_z. \tag{89.2}$$

Dans le condensateur le champ électrique est uniforme et égal à E exception faite des petites régions proches de ses bords où E_z varie de E à zéro. Une fois sortie du condensateur la particule s'y meut librement, i.e. d'un mouvement rectiligne et uniforme, et tombe sur une plaque photographique P en un point M se trouvant à une distance $z = CM$ de l'axe X. On calcule la déviation z en intégrant deux fois l'équation (89.2):

$$z=A\frac{e}{mv^2}, \tag{89.3}$$

où A est la constante du dispositif de mesure:

$$A=\int_0^L dx \int_0^x E_z(x')\,dx',$$

L la distance OC entre l'origine des coordonnées O et la plaque P. En utilisant la notation $f(x) = \int_0^x E_z(x')\,dx'$ on écrira $A = \int_0^L f(x)\,dx$. En intégrant par parties on trouve

$$A=\int_0^L (L-x)\,E_x\,dx. \tag{89.4}$$

En négligeant les inhomogénéités du champ près des bords du condensateur l'intégration de (89.4) donne

$$A = El\left(L - \frac{l}{2}\right),$$

l étant la longueur du condensateur.

3. Considérons maintenant le mouvement d'une particule chargée transversalement à un champ magnétique dans des conditions analogues à celles imposées ci-dessus. Le champ magnétique est supposé uniforme et dirigé parallèlement à l'axe Y (fig. 226). Ce n'est qu'aux bords de la région du champ uniforme qu'il présente des inhomogénéités. Comme dans le cas du champ électrique on admettra que le taux d'inhomogénéité est petit. Supposons qu'avant de pénétrer dans le champ magnétique la particule se déplaçait toujours parallèlement à l'axe X et qu'ensuite elle ne s'écartait que de peu de cette direction. Pour calculer la force de Lorentz $F = e[vB]$ on peut poser que la vitesse v est partout parallèle à l'axe X, donc dirigée suivant le vecteur unitaire i : $v = vi$. Dans cette approximation $F = ev[iB] = ev([ij]B_y + [ik]B_z) = ev(B_y k - B_z j)$. Comme le champ est pour l'essentiel parallèle à l'axe Y, on peut négliger la composante B_z. La particule sera alors déviée vers l'axe Z conformément à l'équation

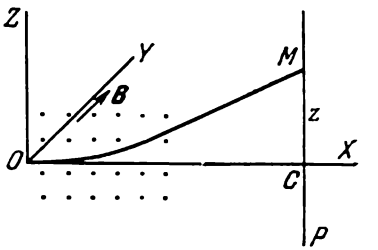


Fig. 226

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = evB_y.$$

On peut déduire cette équation de la seconde équation (89.1) en y remplaçant E_z par vB_y. Sans procéder à d'autres calculs on peut donc écrire

$$z = C\frac{e}{mv}, \tag{89.5}$$

où C est la constante de l'appareil :

$$C = \int_0^L (L - x)\, B_y\, dx. \tag{89.6}$$

4. D'après ce que nous venons de voir, dans un champ électrique transversal les déviations sont proportionnelles à $e/(mv^2)$ et dans un champ magnétique transversal elles sont proportionnelles à $e/(mv)$.

Par mesure de ces déviations on peut donc calculer la charge spécifique e/m et la vitesse v de la particule. En pratique il est commode de disposer le condensateur dans un champ magnétique afin que la particule soit soumise à l'action simultanée des champs électrique et magnétique. Les champs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}$ peuvent être ou parallèles ou rectangulaires. Dans les expériences initiales on utilisait des rayons cathodiques (électrons) ou des rayons anodiques (ions).

Lorsque le champ électrique $\boldsymbol{E}$ du condensateur est perpendiculaire au champ magnétique $\boldsymbol{B}$, les deux champs font dévier la particule dans le même sens ou en sens contraires (sur les figures 225 et 226 dans la direction de l'axe Z). Il est recommandé d'appliquer au condensateur une tension telle que pour les particules se déplaçant avec une vitesse donnée ces déviations se compensent mutuellement, c.-à-d. que ces particules traversent l'appareil sans subir de déviation. Ensuite on n'applique plus qu'un seul champ et on mesure la péviation des particules :

$$z = A\frac{e}{mv^2} = -C\frac{e}{mv}.$$

Connaissant z on calcule la vitesse v et la charge spécifique e/m. C'est ainsi qu'en 1897 J. J. Thomson détermina le rapport e/m des rayons cathodiques.

Une des difficultés que présentait cette méthode était liée au grand éventail des vitesses que possédaient les particules des faisceaux cathodiques et anodiques. Pour éliminer l'influence des différences de vitesse on orientait les champs électrique et magnétique parallèlement l'un à l'autre. Si les deux champs sont dirigés le long de l'axe Z, le champ électrique fera dévier les particules le long de l'axe Z et le champ magnétique les fera dévier le long de l'axe Y. Ces déviations sont respectivement égales à

$$z = A\frac{e}{mv^2}, \quad y = C\frac{e}{mv}.$$

Ces deux relations représentent sous forme paramétrique l'équation de la courbe enregistrée sur la plaque photographique par des particules de même charge spécifique e/m mais de vitesses v différentes. C'est la vitesse v qui en est le paramètre. En l'éliminant l'équation de cette courbe s'écrit

$$z = \frac{A}{C^2}\frac{m}{e}y^2.$$

C'est l'équation de la parabole. En déterminant le rapport z/y^2, on calcule la charge spécifique e/m. C'est à l'aide de cette *méthode* dite *des « paraboles »* que J. J. Thomson découvrit en 1912 les isotopes des éléments non radioactifs (néon).

Les progrès de la technique du vide et des sources d'électrons et d'ions ont permis de réaliser ces mesures dans de meilleures conditions de contrôle. Par exemple, pour produire un faisceau d'électrons ayant une vitesse v donnée, on peut mettre à profit l'effet de l'*émission thermoélectronique*. La source d'électrons est un fil de tungstène incandescent. Les électrons émis par ce fil sont accélérés par une tension appliquée jusqu'à ce qu'ils possèdent une énergie donnée et on les fait passer simultanément à travers des orifices ou des fentes pour former un faisceau bien défini ; enfin on fait dévier ce faisceau par des champs électriques et magnétiques.

La description des méthodes modernes de mesure des charges spécifiques ne rentre pas dans le cadre de ce cours. C'est le domaine de la *spectrométrie* et de la *spectrographie de masse*. Le résultat fondamental établi dès la fin du XIXe siècle est le suivant. Dans le cas de rayons anodiques la charge spécifique e/m dépend de la composition du gaz dans le tube et vaut $\sim 10^4$ un. C.G.S.M. de charge/g ou au-dessous. Pour les rayons cathodiques on trouve une valeur beaucoup plus grande — $e/m = 1{,}759 \cdot 10^7$ un. C.G.S.M. de charge/g qui ne dépend pas de la nature du gaz contenu dans le tube. J. J. Thomson, qui obtint ce résultat en 1897, découvrit en fait l'électron.

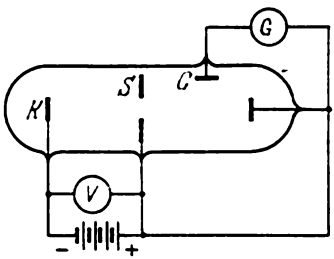


Fig. 227

PROBLÈME

Dans une des plus anciennes méthodes de mesure de la charge spécifique de l'électron, les électrons arrachés à un disque K en aluminium étaient accélérés par une différence de potentiel appliquée entre K et la fente S (fig. 227). Après avoir traversé la fente S, le faisceau d'électrons pénètre dans un champ magnétique uniforme normal au plan de la figure. Tout le système se trouve dans le vide. En faisant varier l'intensité du champ magnétique, on cherche à obtenir un courant maximal sur le collecteur C, ce courant étant mesuré par le galvanomètre G. En mesurant le champ magnétique correspondant on peut calculer le rapport e/m. Faire ce calcul sachant que la distance d entre la fente S et le collecteur C est égale à 10 cm, l'angle α que fait la direction initiale du faisceau avec la droite reliant S à C est égal à 30° ; $V = 1000$ V, $B = 10{,}6$ G.

Réponse. $\frac{e}{m} = \frac{8V}{B^2 d^2} \sin^2 \alpha = 1{,}78 \cdot 10^7$ un. C.G.S.M. de charge/g.

§ 90. Mesure de la charge élémentaire par la méthode des gouttes d'huile

1. Les mesures de la charge spécifique e/m ont contribué au développement des conceptions sur la nature atomistique de l'électricité. J. J. Thomson et ses disciples Townsend (1868-1957) et Charles

Wilson (1869-1959) réalisèrent les premières mesures de la *charge élémentaire*, i.e. de la plus petite charge existant dans la Nature. Des mesures précises ont été réalisées en 1908-1916 par R. Millikan (1868-1953) au cours d'expériences devenues classiques. Ces expériences apportèrent une preuve irréfutable de l'atomisme de l'électricité. Millikan mesurait la charge électrique portée par de petites gouttes d'huile à l'aide du dispositif schématiquement représenté sur la figure 228. Ce dispositif comporte un condensateur plan très soigneusement ajusté ; à travers l'armature supérieure perforée on fait pénétrer dans le condensateur de petites gouttes d'huile provenant d'un pulvérisateur approprié. Pour soustraire les gouttelettes aux courants de convection de l'air, le condensateur est enfermé dans une enceinte de protection à l'intérieur de laquelle la température et la pression de l'air sont maintenues constantes. On peut appliquer aux armatures du condensateur une tension constante de plusieurs milliers de volts fournie par un générateur. Au cours des expériences on pouvait faire varier la tension appliquée. Pendant la pulvérisation les gouttelettes d'huile se chargent d'électricité et pénétrant dans le condensateur s'y déplacent sous l'action de leur propre poids et du champ électrique régnant dans le condensateur. On observe le mouvement d'une gouttelette donnée à l'aide d'un microscope à travers une fenêtre spéciale.

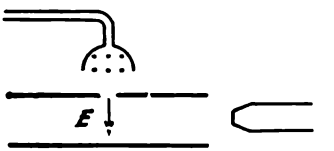


Fig. 228

En 1912 A. F. Ioffé (1880-1960) utilisa une installation analogue mais à la place de gouttelettes d'huile il utilisa de petits grains de zinc et des gouttelettes de mercure.

2. Supposons d'abord que l'on n'applique pas de tension électrique au condensateur. Une gouttelette qui pénètre dans le condensateur y tombera en chute libre sous l'action de la pesanteur, éprouvant la force de résistance de l'air kv proportionnelle à la vitesse v de la gouttelette. La vitesse de chute v_g qui s'établit dans le champ de pesanteur est donnée par l'équation

$$kv_g = (m - m_0)\, g, \tag{90.1}$$

où m est la masse de la goutte et m_0 la masse d'air déplacé. On doit faire figurer cette dernière masse pour tenir compte de la force ascensionnelle d'Archimède. Si la goutte porte une charge électrique et se trouve soumise à l'action d'un champ électrique E, son mouvement se modifie. On choisit le champ E tel que sous son action la goutte chargée se met à monter. En notant v_E la vitesse de montée en régime établi et q sa charge électrique, on a

$$kv_E = qE - (m - m_0)\, g.$$

On tire de ces équations le résultat suivant:

$$q = \frac{k(v_g + v_E)}{E}. \tag{90.2}$$

Par irradiation avec des rayons X on peut ioniser légèrement l'air contenu entre les armatures du condensateur, ce qui fera varier brusquement la charge de la goutte et la vitesse de son mouvement dans le même champ électrique. Si la goutte continue son mouvement ascendant avec une vitesse différente v'_E, sa nouvelle charge est égale à

$$q' = \frac{k(v_g + v'_E)}{E},$$

et par conséquent

$$\frac{q'}{q} = \frac{v_g + v'_E}{v_g + v_E}.$$

En mesurant les vitesses des mouvements stationnaires d'une goutte donnée dans le même champ électrique, on arrive à comparer les charges q et q'. Si la gouttelette est très petite et si l'électricité a une structure atomistique, on peut espérer que la charge qu'elle porte ne comportera qu'un petit nombre de charges élémentaires e. Le rapport q'/q sera alors un rapport de petits nombres entiers. C'est ce que l'on observa dans les expériences de Millikan et de Ioffé.

Dans un autre procédé de traitement des résultats expérimentaux on calcule les sauts de vitesse Δv_E d'une goutte donnée lorsqu'on fait varier sa charge électrique. Selon la formule (90.2) ces sauts de vitesse sont liés à la variation Δq de la charge de la goutte par la relation

$$\Delta q = k\frac{\Delta v_E}{E}. \tag{90.3}$$

Si l'électricité présente une structure atomistique, Δq ne peut prendre que des valeurs discrètes déterminées égales à un multiple entier de la charge élémentaire. La charge élémentaire e sera alors égale à la plus petite valeur de Δq (exception faite de la valeur $\Delta q = 0$). Ainsi les variations Δv_E de la vitesse établie de la goutte doivent se présenter comme des sauts de vitesse et doivent être des multiples d'une certaine valeur minimale. C'est ce que confirmèrent les expériences.

3. Pour arriver à une détermination quantitative de la charge d'une goutte à l'aide de la formule (90.2) on doit connaître la valeur du coefficient k. On peut la calculer par la formule de Stokes $k = 6\pi\eta a$, où η est la viscosité de l'air (voir t. I, § 101). Comme les gouttes sont très petites, on ne peut mesurer leurs rayons a à l'aide

du microscope qui ne donne ici qu'une *image de diffraction* de la goutte ayant la forme d'une petite étoile brillante résultant de la diffusion de la lumière par la goutte. Ni la forme ni les dimensions de cette image de diffraction n'ont aucun rapport avec la forme et la taille réelles de la goutte. Pour déterminer le rayon a on peut utiliser la même formule de Stokes. En portant dans (90.1) $k = 6\pi\eta a$, $m - m_0 = \frac{4\pi}{3} a^3 (\rho - \rho_0)$, où ρ est la densité de l'huile et ρ_0 celle de l'air, on trouve

$$a = \sqrt{\frac{9\eta v_g}{2(\rho - \rho_0)}}, \tag{90.4}$$

et par conséquent

$$q = \frac{9\pi\eta}{E} \sqrt{\frac{2\eta v_g}{\rho - \rho_0}} (v_g + v_E). \tag{90.5}$$

La plus petite valeur de q ou de Δq calculée par la formule (90.5) sera égale à la valeur de la charge élémentaire e.

4. En pratique on constate que pour de très petites gouttes la valeur de la charge élémentaire e calculée à l'aide de la formule (90.5) était anomalement grande et d'autant plus grande que la goutte était petite. Millikan expliqua ce résultat en supposant que la formule de Stokes cessait d'être valable pour de très petites gouttes. En effet la formule de Stokes avait été établie dans l'hypothèse que le milieu visqueux dans lequel se déplaçait la bille était *continu*. Pour les gaz cette condition n'est remplie que si la longueur de libre parcours moyen λ des molécules gazeuses est petite devant les dimensions de la bille ($\lambda \ll a$). En 1910, en appliquant la théorie cinétique des gaz, Cunningham introduisit un terme de correction dans la formule de Stokes :

$$k = \frac{6\pi\eta a}{1 + A\lambda/a}, \tag{90.6}$$

où A est une constante. Le dénominateur de cette formule peut s'écrire sous la forme $f(\lambda/a)$ et on peut alors le développer en série suivant les puissances de λ/a et ne garder que le terme linéaire en λ/a. Comme λ varie en raison inverse de la pression $\mathcal{P}$ du gaz, on peut mettre cette formule sous la forme

$$k = \frac{6\pi\eta a}{1 + B/(\mathcal{P}a)}. \tag{90.7}$$

On peut calculer la constante B par la théorie cinétique des gaz, mais il est plus sûr de la déterminer expérimentalement. En substituant l'expression (90.7) dans la formule (90.1) on obtient une équation cubique par rapport au rayon a de la goutte :

$$\frac{\eta v_g}{1 + B/(\mathcal{P}a)} = \frac{2}{9}(\rho - \rho_0) a^2. \tag{90.8}$$

Comme la fraction $B/(\mathcal{P}a)$ ne représente qu'une petite correction, on peut résoudre cette équation par la méthode des approximations successives. Dans l'approximation d'ordre zéro on néglige le terme $B/(\mathcal{P}a)$ et on retrouve pour a l'expression (90.4) que l'on désignera par a_0, i.e.

$$a_0 = \sqrt{\frac{9\eta v_g}{2(\rho-\rho_0)}}. \tag{90.9}$$

On remplace ensuite dans le dénominateur de (90.8) $B/(\mathcal{P}a)$ par $B/(\mathcal{P}a_0)$ et la résolution de l'équation de deuxième degré nous donne a en approximation d'ordre un. On peut calculer ensuite a en approximations d'ordre deux, trois, etc. Cependant cela ne sert à rien puisque la formule initiale (90.7) n'est exacte qu'aux termes linéaires en $B/(\mathcal{P}a)$ près. Millikan démontra que la précision de la première approximation était suffisante.

Il apparaît clairement que pour faire le calcul en première approximation il faut remplacer dans la formule (90.5) la viscosité η par $\frac{\eta}{1+B/(\mathcal{P}a_0)}$, ce qui conduit au résultat suivant:

$$q = \frac{q_0}{[1+B/(\mathcal{P}a_0)]^{3/2}},$$

où q_0 est la charge de la goutte calculée en approximation d'ordre zéro, i.e. par la formule (90.5) et q la valeur de la charge calculée en première approximation, que l'on posera être la vraie charge de la goutte. Pour la charge élémentaire e on obtient notamment

$$\left(\frac{e_0}{e}\right)^{2/3} = 1 + \frac{B}{\mathcal{P}a_0}. \tag{90.10}$$

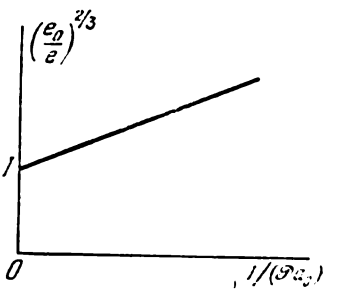


Fig. 229

Si on effectue les mesures sous différentes pressions $\mathcal{P}$ et si on porte en abscisses $1/(\mathcal{P}a_0)$ et en ordonnées $(e_0/e)^{2/3}$, on obtiendra une ligne droite (fig. 229). Millikan constata en effet que les points expérimentaux formeut une ligne droite, ce qui confirmait que les bases du calcul étaient correctes. En prolongeant la droite (90.10) jusqu'à son intersection avec l'axe des ordonnées, on trouve qu'au point d'intersection $e = e_0$. La valeur e_0 est précisément la valeur de la charge élémentaire e. Nous aurions trouvé cette même valeur de e à l'aide de la formule (90.5) si on avait utilisé des gouttes assez grandes pour que la formule de Stokes soit vérifiée. En mesurant la pente de la droite (90.10) on détermine la valeur de la constante B. D'après les données modernes $e = 4{,}803 \cdot 10^{-10}$ un. C.G.S.E. $= 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

Millikan trouva une valeur plus petite car il utilisait une valeur trop petite de la viscosité de l'air. Connaissant les valeurs de e et de la charge spécifique e/m on trouve la masse de l'électron $m = 9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g.

§ 91. La masse électromagnétique

1. Nous avons montré au § 84 qu'en électrodynamique la loi de la conservation de l'impulsion implique que le champ électromagnétique doit posséder une impulsion dont la densité est

$$g = \frac{1}{4\pi c}[EH]. \tag{91.1}$$

Nous sommes arrivés à ce résultat en comparant l'expression de la densité de flux d'énergie électromagnétique $S = \frac{c}{4\pi}[EH]$ à la formule d'Einstein $\mathscr{E} = mc^2$. Sans utiliser la théorie de la relativité, l'électrodynamique classique arrive à la même conclusion mais sous une forme très générale. Un exemple particulier donné au § 84 en fournit la preuve.

2. Calculons maintenant l'impulsion du champ électromagnétique (ou impulsion électromagnétique) liée à une charge animée d'un mouvement uniforme. Nous supposerons que la vitesse v de la charge mobile est petite devant la vitesse de la lumière c et que la charge est uniformément répartie à la surface d'une sphère de rayon a. Dans un référentiel dans lequel la sphère est immobile, les champs E et B sont nuls à l'intérieur de la sphère. On en conclut que le champ électrique sera nul dans tout référentiel par rapport auquel la sphère chargée est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme. Cette assertion découle directement de la formule de transformation du champ électrique (66.6). A l'intérieur de la sphère le champ magnétique sera également nul, mais nous n'aurons pas à utiliser ici ce résultat. Ainsi pour calculer la quantité de mouvement électromagnétique totale $L_{\text{él}}$ on doit intégrer (91.1) sur le volume de l'espace infini extérieur à la sphère.

Nous supposerons que la charge e se déplace dans le vide où les champs B et H sont identiquement les mêmes et sont définis par l'expression $H = \frac{e}{c}\left[v\frac{r}{r^3}\right] = \frac{1}{c}[vE_0]$, E_0 étant le champ statique (coulombien) de la charge e. Le champ électrique E de la charge en mouvement diffère du champ statique E_0, mais dans l'approximation que nous utilisons ici on peut négliger cette différence. On peut en effet représenter le champ E sous forme d'une série de puissances de v/c. Le premier terme de cette série est le champ statique E_0 qui apporte dans l'expression de la quantité de mouvement électromagnétique $L_{\text{él}}$ un terme proportionnel à v/c. Les termes suivants sont

de l'ordre de $(v/c)^2$, $(v/c)^3$, etc., que l'on négligera. Ainsi dans l'approximation utilisée

$$g = \frac{1}{4\pi c}[E_0 H] = \frac{1}{4\pi c^2}[E_0[vE_0]] = \frac{1}{4\pi c^2}\{E_0^2 v - (E_0 v) E_0\}.$$

Adoptons la direction de la vitesse v pour axe X. On peut écrire alors

$$(E_0 v) E_0 = (E_{0x} v_x)(E_{0x} i + E_{0y} j + E_{0z} k).$$

Avant d'intégrer cette expression il est indiqué de la moyenner sur toutes les directions spatiales puisqu'il n'en subsiste alors que le terme $\overline{E_{0x}^2} v_x i = E_0^2 v/3$, et par suite

$$L_{\text{él}} = \frac{4v}{3c^2}\int \frac{E_0^2}{8\pi} dV$$

ou

$$L_{\text{él}} = \frac{4}{3}\frac{W_{\text{él}}}{c^2} v, \tag{91.2}$$

où $W_{\text{él}}$ est l'énergie électrostatique de la charge e. Notons que le résultat (91.2) s'applique à toute distribution de charge de symétrie sphérique et non seulement à une distribution superficielle sur une sphère. En effet on démontre aisément, en s'appuyant sur les équations de Maxwell, que les champs électrique et magnétique d'une charge animée d'un mouvement uniforme sont liés par la relation $H = \frac{1}{c}[vE]$; cette relation est suffisante pour en déduire la formule (91.2) à condition de ne conserver que les termes linéaires en v.

Ainsi du fait de l'existence du champ électromagnétique, à la quantité de mouvement de l'électron vient s'ajouter la quantité de mouvement électromagnétique. Pour $v \ll c$ on peut représenter cette dernière sous forme $L_{\text{él}} = m_{\text{él}} v$, où

$$m_{\text{él}} = \frac{4}{3}\frac{W_{\text{él}}}{c^2}. \tag{91.3}$$

Cette grandeur est appelée *masse électromagnétique*. Si l'électricité est répartie sur la surface d'une sphère, on a $W_{\text{él}} = e^2/(2a)$, et par suite

$$m_{\text{él}} = \frac{2e^2}{3ac^2}. \tag{91.4}$$

3. On peut arriver à la notion de masse électromagnétique à l'aide des considérations suivantes. L'énergie du champ magnétique d'une sphère chargée en surface est donnée par l'expression :

$$W_m = \int \frac{H^2}{8\pi} dV = \frac{e^2 v^2}{8\pi}\int \frac{\sin^2\vartheta}{r^4} dV,$$

où ϑ est l'angle entre les directions de la vitesse v et du rayon r mené par le centre de la sphère. En écrivant l'élément de volume sous la forme $dV = 2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$ on obtient

$$W_m = \frac{e^2 v^2}{4} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin^3\vartheta\, d\vartheta = \frac{e^2 v^2}{3a} = \frac{m_{\text{él}}}{2} v^2.$$

Grâce à la présence du champ magnétique l'énergie de la sphère se trouve augmentée de W_m. On peut interpréter cette augmentation d'énergie soit comme une *augmentation de l'énergie cinétique* de la sphère, soit comme une *augmentation de la masse* de la sphère d'une quantité égale à la masse électromagnétique.

Le défaut de ce procédé de démonstration de l'existence d'une masse électromagnétique est qu'il n'explicite pas le rôle du champ électrique dont l'énergie augmente aussi avec la vitesse v. Mais si on compare les deux démonstrations, on arrive à la conclusion que dans l'approximation utilisée l'énergie électrique ne contribue pas à la valeur de la masse électromagnétique. Dans cette approximation la masse électromagnétique est liée uniquement à l'énergie d'excitation du champ magnétique.

4. Dans les approximations d'ordres supérieurs on constate, d'une part, un renforcement de l'influence du champ magnétique sur la masse électromagnétique et, d'autre part, une influence de l'énergie électrique sur cette masse. La masse électromagnétique commence alors à dépendre de la vitesse v de l'électron, du mode de distribution de la charge électrique dans cette particule ainsi que des déformations qui accompagnent son mouvement. Au début du XXe siècle, les physiciens tentèrent sur la base d'hypothèses arbitraires sur la répartition de la charge et les déformations de l'électron, d'élucider la nature de la masse de l'électron ainsi que celle de sa variation avec la vitesse. On pensait que la masse de toute particule se composait d'une « masse véritable » indépendante de la vitesse et d'une masse électromagnétique « apparente » qui serait fonction de la vitesse. Les physiciens cherchaient à séparer la masse véritable de la masse apparente par étude de la variation de la masse de l'électron en fonction de sa vitesse. On se demandait notamment si la totalité de la masse de l'électron ne serait pas apparente, i.e. de nature électromagnétique. Depuis longtemps ces études ne présentent qu'un intérêt purement historique. En effet l'étude de la variation de la masse en fonction de la vitesse ne permet pas de résoudre la question de la nature physique de la masse puisque la théorie de la relativité a montré, en plein accord avec les données expérimentales, que quelle que soit la nature physique de la masse, celle-ci varie avec la vitesse selon la formule

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{91.5}$$

et que la masse du corps est liée à son énergie par la relation

$$\mathscr{E} = mc^2. \tag{91.6}$$

La question relative à la nature physique de la masse n'est pas tranchée pour autant, de même qu'on ne peut encore écarter l'hypothèse de la masse électromagnétique de l'électron. Pour expliquer le fait que la formule (91.3) comporte le facteur 4/3, qui est absent dans la formule d'Einstein (91.6), la théorie classique affirmait que l'énergie électrostatique $W_{\text{él}}$ ne représentait pas l'énergie totale de l'électron. La nécessité de faire intervenir une énergie supplémentaire résulte de ce qu'en présence des seules forces électrostatiques l'électron ne peut être en équilibre et sous l'action des forces coulombiennes il devrait voler en éclats. Pour que cela ne se produise pas, on doit faire intervenir, selon les conceptions classiques, des forces supplémentaires d'origine non électrostatique et l'énergie correspondante.

Si on admet que toute la masse de l'électron est d'origine électromagnétique et si on supprime le facteur 2/3 dans la formule (91.4), on obtient

$$a = \frac{e^2}{mc^2} = 2{,}818 \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \tag{91.7}$$

Cette grandeur est appelée *rayon classique de l'électron*. On ne doit pas considérer la formule (91.7) comme donnant les « dimensions vraies » de l'électron, car il n'existe aucun autre procédé indépendant de détermination de ses dimensions. On doit considérer le rayon classique (91.7) comme une *longueur caractéristique qui constitue la limite inférieure du domaine de validité de la théorie classique des champs.* Cette théorie ne s'applique pas pour les *champs très forts* de l'ordre de

$$E_0 = \frac{e}{a^2} = \frac{m^2c^4}{e^3} = 6 \cdot 10^{15} \text{ un. C.G.S.E.} = 1{,}8 \cdot 10^{18} \text{ V/cm}.$$

5. En réalité les limites du domaine d'application des conceptions classiques sont fixées par les *effets quantiques* et correspondent à un rayon électronique classique près de 100 fois plus grand. On détermine aisément ces dimensions à l'aide de la *relation d'incertitude entre l'énergie et le temps.* Nous donnons cette estimation à l'intention des lecteurs ayant des notions de mécanique quantique. Selon la mécanique quantique, si on observe le comportement d'une particule pendant un temps Δt on ne peut connaître son énergie qu'à $\Delta\mathscr{E}$ près, cette grandeur vérifiant la condition $\Delta\mathscr{E}\,\Delta t \gtrsim \hbar$, où $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ erg·s est la constante de Planck divisée par 2π. C'est cette condition que l'on appelle relation d'incertitude entre l'énergie et le temps. Si l'intervalle de temps Δt est court, on verra apparaître dans le vide et pour un temps très bref des *paires électron-positon.* Cela ne se produit que si l'indétermination $\Delta\mathscr{E}$ sur l'énergie n'est pas inférieure à l'énergie propre d'une paire électron-positon, i.e. à $2mc^2$. (Les masses du positon et de l'électron sont les mêmes.) L'intervalle de temps

s'écoulant entre la naissance et l'annihilation d'une paire positon-électron ne sera pas supérieur à $\Delta t \sim \frac{\hbar}{2mc^2}$. Au cours de ce temps la paire positon-électron pourra parcourir un chemin ne dépassant pas $\Lambda_C = c\,\Delta t \sim \frac{\hbar}{mc} = 0{,}38 \cdot 10^{-9}$ cm. (Cette dernière grandeur est appelée *longueur d'onde de Compton*.) On peut donc dire que toute « charge ponctuelle » est entourée jusqu'à une distance $\sim \Lambda_C$ d'une région de paires électron-positon « virtuelles » (« *polarisation du vide* »). Cela signifie qu'à ces distances l'image classique d'une « charge ponctuelle » n'est plus valable. C'est la longueur d'onde de Compton $\Lambda_C = \frac{\hbar}{mc}$ qui fixe une limite inférieure à la validité de la théorie classique des champs. Le rapport entre Λ_C et le rayon classique de l'électron est égal à

$$\frac{\Lambda_C}{a} = \frac{\hbar c}{e^2} = 137.$$

De même la théorie classique des champs cesse d'être valable aux intensités de champs près de 137 fois plus faibles que E_0. Posons que le champ électrique E_{qu} crée sur la longueur Λ_C une différence de potentiel vérifiant la relation $e\Lambda_C E_{qu} \gtrsim 2mc^2$. En rejetant les facteurs numériques on en déduit

$$E_{qu} \gtrsim \frac{m^2c^3}{e\hbar} = \frac{e^2}{\hbar c} E_0 = \frac{1}{137} E_0.$$

Dans un champ de cette intensité la paire positon-électron virtuellement formée sera séparée en ses constituants, ce qui correspond à une *rupture du vide*, phénomène que la physique classique considère comme impossible.

CHAPITRE VI

LES ÉLECTROLYTES

§ 92. Electrolyse et dissociation électrolytique

1. On appelle *électrolytes* dans le sens général du terme les substances qui se décomposent en leurs constituants chimiques lorsqu'elles sont traversées par un courant électrique. Sont des électrolytes de nombreuses combinaisons entre les métaux et les métalloïdes lorsqu'elles se trouvent à l'état fondu, ainsi que les substances solides conductrices de courant, telles les *solutions solides* et les *cristaux ioniques*. Mais les électrolytes les plus importants du point de vue de leurs applications techniques et scientifiques sont les *solutions aqueuses d'acides, de sels et de bases inorganiques*. Ce sont surtout ces électrolytes que nous considérerons. Notons que la solution aqueuse n'est pas nécessairement un électrolyte. Par exemple les solutions aqueuses de sucre ne laissent pas passer le courant électrique et ne sont pas des électrolytes. D'autre part, on connaît de nombreuses solutions non aqueuses (par exemple celles où le solvant est l'alcool) possédant des propriétés électrolytiques qui sont cependant beaucoup moins marquées que celles des solutions aqueuses.

La décomposition d'un électrolyte en ses constituants résultant du passage d'un courant électrique est appelée *électrolyse*. Les produits de la décomposition de l'électrolyte se dégagent sur les électrodes ; les électrodes sont des corps conducteurs de formes géométriques appropriées qui plongent dans l'électrolyte et qui sont reliés aux bornes d'une batterie galvanique ou d'une autre source de courant continu. En règle générale ces produits entrent en réaction chimique avec les électrodes ou avec le solvant. On dit alors qu'il se produit des *réactions secondaires*. Ces réactions secondaires occultaient pendant longtemps la nature de l'effet d'électrolyse et les lois qui le régissent. Dans l'étude de l'électrolyse il importe avant tout d'éliminer les réactions secondaires qui compliquent l'étude afin de concentrer toute l'attention sur les réactions *primaires*. C'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

2. C'est en 1805 que Grotthuss (1785-1822) élabora la première hypothèse expliquant l'électrolyse. Selon cette hypothèse, les molécules du soluté se composent de deux parties, l'une chargée positivement et l'autre négativement. Dans la solution soumise à l'action d'un champ électrique, une partie des molécules du soluté se décom-

posent pour une certaine raison en ces deux parties constitutives. Ces dernières passent en solution sous forme de particules chargées que l'on appela plus tard *ions*. Sous l'action du champ électrique appliqué les ions positifs se déplacent vers l'électrode négative (la cathode) et les ions négatifs se déplacent vers l'électrode positive (l'anode). Malgré ces déplacements, en dehors des électrodes chaque élément de volume contiendra le même nombre d'ions positifs et négatifs. Si on supprime le champ électrique les ions positifs et négatifs se recombinent pour former des molécules neutres et on n'observera aucune décomposition chimique du soluté. La situation est toute autre près des électrodes. Lorsque les ions arrivent aux électrodes ils s'y déchargent et se dégagent sous formes d'atomes neutres qui sont les produits de décomposition du soluté.

3. Une question vient aussitôt à l'esprit : pourquoi les molécules neutres se trouvant en solution se décomposent-elles en ions ? Avant les recherches de Clausius (1822-1888) on pensait que cela se produisait sous l'action du champ électrique appliqué ; autrement dit la décomposition du soluté en ses constituants chimiques résulterait de l'application d'un champ électrique. Clausius fut le premier à indiquer dès 1857 que s'il en était ainsi, à chaque composé chimique devrait correspondre une intensité minimale E_{min} du champ électrique nécessaire pour surmonter l'affinité chimique. Plus l'affinité chimique est grande, plus grand devrait être le champ électrique E_{min}. Avec $E < E_{min}$ on ne devrait trouver aucun ion en solution et celle-ci ne pourrait assurer le passage du courant électrique. La réalité est autre, puisque les expériences ont montré que *les électrolytes vérifient la loi d'Ohm* $j = \lambda E$ et par conséquent *un champ électrique aussi faible soit-il détermine l'électrolyse de n'importe quel électrolyte.*

Pour décomposer le soluté d'un électrolyte il faut dépenser une quantité supplémentaire d'énergie. Cette énergie n'est pas aussi petite qu'on pourrait le penser. Dans l'électrolyse de l'acide chlorhydrique HCl, sur les électrodes se dégagent le chlore et l'hydrogène qui sont des substances possédant une grande affinité chimique l'une pour l'autre. Elles se combinent avec explosion et la formation d'un gramme de HCl s'accompagne d'un dégagement de chaleur de 600 calories. On en conclut que si la décomposition chimique de l'électrolyte était due au champ électrique, l'énergie du courant électrique aurait été dépensée, d'une part, pour produire la chaleur de Joule et, d'autre part, pour décomposer l'électrolyte. Or l'expérience montre que *les électrolytes vérifient de loi de Joule-Lenz selon laquelle toute l'énergie du courant électrique est dépensée en chaleur.*

4. C'est en se fondant sur ces considérations que Clausius avança, en 1857, une autre explication de l'apparition des ions dans les solutions électrolytiques. Selon la théorie cinétique des gaz dont l'un des fondateurs fut Clausius, les atomes sont animés à l'inté-

rieur des molécules de mouvements thermiques désordonnés. Généralement l'énergie d'agitation thermique est trop faible pour pouvoir surmonter les forces chimiques d'attraction mutuelle des parties de la molécule portant des charges de signes opposés. Mais en solution les forces d'affinité chimique se trouvent affaiblies par le solvant et les molécules peuvent, ne serait-ce que pour un temps bref, se dissocier en ions de signes opposés. Lorsqu'un ion positif rencontre un ion négatif ils peuvent s'unir et reformer une molécule neutre. D'autres molécules neutres peuvent au contraire se dissocier en ions. L'évolution continue des processus de dissociation et de recombinaison conduit à l'établissement d'un *équilibre statistique* caractérisé par ce que la part de molécules dissociées reste en moyenne invariable dans le temps. Lorsqu'on applique un champ électrique, les ions positifs et négatifs se précipitent en sens opposés, conformément aux idées de Grotthuss, ce qui se traduit par le passage d'un courant et par le dégagement des produits de décomposition sur les électrodes. Ainsi le champ électrique n'a aucun rapport à la décomposition chimique des molécules du soluté en ses constituants. *Le rôle du champ électrique consiste uniquement à séparer les ions positifs et négatifs préexistants et à les rassembler près des électrodes correspondantes.* C'est à cela que se ramène le phénomène d'électrolyse.

5. Svante Arrhenius (1859-1927) arriva à des conclusions analogues en se fondant sur des considérations très différentes. Arrhenius est considéré à juste titre comme le fondateur de la *théorie de la dissociation électrolytique.* L'expérience montre que les solutions aqueuses de sels, d'acides et de bases présentent des pressions osmotiques plus élevées que ne le laisse prévoir la loi de Van't Hoff. L'abaissement de la tension de vapeur saturée et de la température de congélation, ainsi que l'élévation du point d'ébullition sont pour les électrolytes plus grands que le laisse prévoir la loi de Raoult (cf. t. II, §§ 124 à 126). Arrhenius en conclut que les molécules du soluté se dissocient en ions dans les solutions aqueuses et justifia cette hypothèse par de nombreuses données expérimentales. Selon Arrhenius les ions qui ne se distinguent des atomes neutres que par l'existence d'une charge électrique possèdent des propriétés toutes différentes. Par exemple, l'hydrogène gazeux est très peu soluble dans l'eau, tandis que les ions hydrogène peuvent exister en solution dans l'eau à de très grandes concentrations. Les ions sodium ne réagissent pas avec l'eau tandis que le sodium réagit violemment avec l'eau en formant de la soude caustique. Le chlore possède une odeur et une couleur caractéristiques, tandis que les ions chlore se trouvant en solution n'ont ni odeur ni couleur. Tant que les ions SO_4^{--} portent des charges négatives, ils ne peuvent exister qu'en solution et on ne connaît pas de molécules neutres de cette formule.

6. Illustrons la dissociation des molécules se trouvant en solu-

tion en ions en prenant pour exemple les molécules NaCl. Cette molécule polaire se compose d'ions sodium Na^+ positivement chargés et d'ions chlore Cl^- portant chacun une charge négative. Les molécules d'eau sont elles aussi polaires et possèdent d'importants moments dipolaires. Lorsqu'une molécule de NaCl se trouve placée entre deux molécules d'eau, ces trois molécules polaires chercheront à s'orienter de telle sorte que leurs extrémités portant des charges de signes opposés soient en regard (fig. 230). Les molécules d'eau affaiblissent ainsi la liaison entre les ions Na^+ et Cl^- à un point tel que l'énergie du mouvement thermique devient suffisante pour dissocier la molécule NaCl en ions. Lorsque les ions Na^+ et Cl^- s'éloigneront à grande distance l'un de l'autre, l'eau qui se trouvera alors entre ces ions pourra être assimilée à un milieu continu affaiblissant la force d'interaction mutuelle de ces ions de ε fois. Cet affaiblissement des forces d'interaction diminue la probabilité de recombinaison des ions. On en conclut que ce sont les solvants ayant la plus grande permittivité diélectrique ε qui présenteront le plus grand pouvoir de dissociation. En premier lieu c'est l'eau pour laquelle $\varepsilon = 81$.

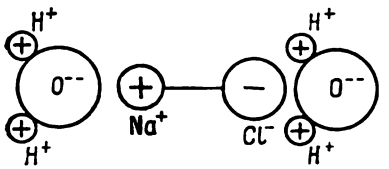


Fig. 230

7. On appelle *coefficient* (ou *degré*) *de dissociation* α le rapport du nombre de molécules dissociées au nombre total de molécules du soluté. La valeur de α dépend de la concentration de la substance dissoute. Le caractère général de cette dépendance peut être établi simplement à l'aide des considérations suivantes. Soit n le nombre de molécules de soluté contenues dans l'unité de volume de la solution. Un nombre $n\alpha$ de molécules sont dissociées et les autres $n(1-\alpha)$ molécules ne le sont pas. Les molécules dissociées peuvent se recombiner. Le nombre moyen d'actes de recombinaison par unité de volume et dans l'unité de temps est proportionnel à $(n\alpha)^2$ et peut être représenté sous la forme $A(n\alpha)^2$. Le nombre moyen d'actes inverses, i.e. de nouveaux actes de dissociation, est proportionnel au nombre de molécules non dissociées; représentons ce nombre par $Bn(1-\alpha)$. En régime permanent le nombre d'actes de recombinaison doit être égal en moyenne au nombre d'actes de dissociation, i.e. $A(n\alpha)^2 = Bn(1-\alpha)$. On en tire

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{B}{An} = \frac{K}{n}. \tag{92.1}$$

Les coefficients A et B et donc leur rapport $K = B/A$ varient avec la température et la pression de la solution. Si la concentration des molécules des corps dissous et donc celle des ions se trouvant en

solution sont petites, on peut considérer ces derniers comme des *particules indépendantes, sans interactions mutuelles*, donc comme des particules d'un gaz parfait. Dans ce cas le coefficient K ne dépend pas de la concentration n et le rapport $\frac{\alpha^2}{1-\alpha}$ varie en raison inverse de la concentration. Ce résultat est connu sous le nom de *loi de dilution d'Ostwald* (1853-1932). Lorsque $n \to 0$, on a $\frac{\alpha^2}{1-\alpha} \to \infty$ et par conséquent $\alpha \to 1$. Ainsi *dans les solutions infiniment diluées toutes les molécules du corps dissous sont dissociées.*

La loi de dilution d'Ostwald est vérifiée pour les *électrolytes faibles*, i.e. pour les électrolytes de faible degré de dissociation ($\alpha \ll 1$). Pour les *électrolytes forts* dont le degré de dissociation est proche de l'unité ($\alpha \sim 1$) la loi d'Ostwald ne cadre pas avec l'expérience, à l'exception du cas de solutions fortement diluées où cette loi conduit au résultat correct $\alpha = 1$. La théorie moderne des solutions admet que les molécules des électrolytes forts sont complètement dissociées et cherche à expliquer toutes les particularités de comportement des solutions par les interactions des ions entre eux et avec les molécules du solvant.

§ 93. Exemples d'électrolyse

1. Lorsqu'on dissout l'acide sulfurique H_2SO_4 dans de l'eau, ses molécules se dissocient suivant l'équation

$$H_2SO_4 \rightleftharpoons 2H^+ + SO_4^{--}.$$

Si on plonge dans la solution des électrodes de platine reliées aux bornes d'une batterie d'accumulateurs, les ions hydrogène positifs H^+ se déplacent vers la cathode et les ions négatifs SO_4^{--} vers l'anode. Les ions H^+ se déchargent en se recombinant avec les électrons cédés par la cathode et se transforment en atomes neutres et ensuite en molécules H_2. Les ions SO_4^{--} cèdent leurs électrons excédentaires à l'anode et se transforment en radicaux SO_4 qui réagissent aussitôt avec l'eau suivant l'équation

$$2SO_4 + 2H_2O = 2H_2SO_4 + O_2.$$

Ainsi la quantité d'acide sulfurique ne varie pas dans la solution, quoique de l'hydrogène se dégage à la cathode et de l'oxygène à l'anode. Le résultat final de l'électrolyse se réduit à la décomposition de l'eau en oxygène et en hydrogène.

2. Immergeons dans une solution aqueuse de $CuSO_4$ une anode en cuivre et une cathode en un matériau conducteur quelconque ne réagissant pas avec $CuSO_4$, en charbon par exemple. Les ions Cu^{++} se dirigent vers la cathode où se dégage le cuivre pur et les ions SO_4^{--} après neutralisation à l'anode réagissent avec celle-ci pour reformer $CuSO_4$: $Cu + SO_4 = CuSO_4$. Ainsi la quantité de sulfate de cuivre

en solution reste constante. On pourrait dire que l'électrolyse a pour résultat le transport du cuivre de l'anode à la cathode. Ce procédé est utilisé pour l'affinage du cuivre.

3. Considérons un troisième exemple, l'électrolyse d'une solution aqueuse de chlorure de sodium NaCl. Cette électrolyse présente la particularité que selon le matériau des électrodes on peut obtenir aussi bien les produits primaires que les produits secondaires de l'électrolyse. Avec une cathode en mercure le sodium métallique dégagé se dissout dans le mercure en formant un amalgame dont on peut extraire sans difficulté du sodium métallique. On obtient donc

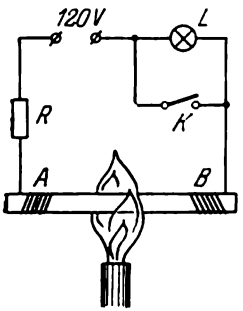


Fig. 231

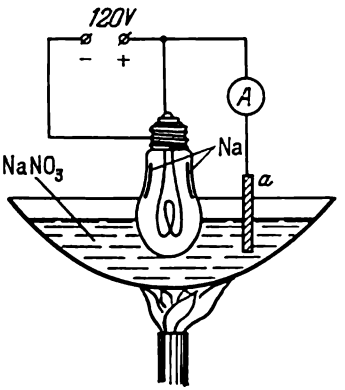


Fig. 232

ici le produit primaire de l'électrolyse. Si la cathode est en platine, le sodium qui s'y dégage réagira aussitôt avec l'eau avec formation de soude caustique, conformément à l'équation $2Na + 2H_2O = 2NaOH + H_2$; de l'hydrogène, qui est un produit secondaire de l'électrolyse, se dégagera sur la cathode.

4. Aux températures ordinaires le verre n'est pas conducteur d'électricité. Mais si on le porte à une température de plusieurs centaines de degrés, il présente une conductibilité notable. On le démontre à l'aide de l'expérience schématiquement représentée sur la figure 231. On branche dans le circuit alimenté par le réseau urbain un rhéostat *R* et une tige de verre sur les bouts de laquelle sont enroulées plusieurs spires de fil de cuivre. Comme à la température ordinaire la résistance de la tige de verre atteint plusieurs millions d'ohms, la fermeture de l'interrupteur ne fait passer dans le circuit qu'un courant négligeable (microampère) et la lampe d'éclairage *L* reste sombre. Mais si on chauffe la tige de verre *AB* à l'aide d'un bec de gaz à 300-400 °C, sa résistance tombe jusqu'à quelques dizaines d'ohms seulement et le fil de la lampe *L* devient incandescent.

Si on enlève maintenant le bec de gaz et si on court-circuite simultanément la lampe *L* en fermant l'interrupteur *K*, la résistance totale du circuit diminuera et le courant qui le traverse augmentera. La tige de verre sera échauffée au rouge par le courant qui la traverse, sa résistance diminuera et le courant augmentera encore. En fin de compte la tige de verre fondra.

Quelle est la cause de la conductibilité électrique du verre? Le verre est un liquide fortement surfondu possédant une très grande viscosité, c'est aussi un électrolyte contenant les ions sodium positifs Na^+. Lorsque le verre s'amollit à l'échauffement et que sa viscosité diminue fortement, les ions acquièrent une mobilité notable et deviennent des porteurs de courant. L'expérience de démonstration suivante permet d'en apporter la preuve. On verse dans un creuset chauffé par un bec de gaz (fig. 232) du salpêtre de Chili $NaNO_3$ fondu et on y fait plonger à un tiers de sa hauteur l'ampoule d'une lampe à incandescence à vide (une lampe à atmosphère gazeuse ne convient pas). Le fil de la lampe est porté à incandescence par un courant continu. Une électrode de carbone *a* connectée au pôle positif du fil d'incandescence est plongée dans le bain de salpêtre. Cette électrode se comporte comme anode dont le potentiel est plus grand que celui de n'importe quel point du fil d'incandescence. Le salpêtre fondu est partiellement dissocié en ions Na^+ et NO_3^-. Sous l'action de la différence de potentiel entre l'anode et le fil d'incandescence de la lampe, les ions Na^+ se déplacent dans le bain fondu de l'anode *a* vers l'ampoule de la lampe, puis passant à travers les parois de l'ampoule pénètrent à l'intérieur de celle-ci. Lorsque les ions arrivent sur les parois, ils y sont neutralisés par les électrons émis par le fil incandescent et se transforment en atomes neutres de sodium. Ces atomes Na se vaporisent et se déposent sur les parties plus froides de la paroi interne de la lampe en y formant un miroir de sodium.

§ 94. Les lois d'électrolyse de Faraday et la charge élémentaire

1. L'électrolyse fut observée pour la première fois en 1800 par Nicholson et Carlisle qui décomposèrent l'eau à l'aide d'une batterie voltaïque. Sept ans après, Davy (1778-1829) découvrit le sodium en le dégageant par électrolyse de morceaux humidifiés de soude caustique. Plus tard on observa l'électrolyse de nombreux électrolytes. C'est en 1833 que Faraday réussit à établir les lois quantitatives de l'électrolyse après avoir fait la distinction entre les produits et les réactions *primaires* et *secondaires*. Les *lois de Faraday* permettent de déterminer les quantités de produits primaires dégagées sur les électrodes pendant l'électrolyse. On les établit aisément par l'étude du mécanisme des phénomènes d'électrolyse.

Chaque ion porte un nombre entier de charges élémentaires e et par conséquent la charge de l'ion s'exprime en valeur absolue par une expression telle que νe, ν étant un nombre entier égal à la valence de l'élément ou du composé chimique considéré. Posons que n ions se dégagent sur une électrode. La valeur absolue de la charge totale de ces n ions est alors $n\nu e$. Si ces ions se dégagent sur la cathode, leurs charges sont neutralisées par les électrons arrivant à la cathode par les fils qui la relie à la source de courant. Si le dégagement des ions se produit sur l'anode, le même nombre d'électrons est cédé par les ions à l'anode et ces électrons sont évacués par les fils de connexion. Dans les deux cas le circuit est traversé par une quantité d'électricité $q = n\nu e$. Désignons par M la masse de substance dégagée sur une électrode et par m la masse de l'ion (de l'atome ou de la molécule). On a alors $n = M/m$ et $M = mq/(\nu e)$. En multipliant le numérateur et le dénominateur de ce rapport par le nombre d'Avogadro N, on obtient

$$M = \frac{A}{\nu}\frac{q}{F}, \tag{94.1}$$

$A = Nm$ est le poids atomique et F est une constante définie par l'expression

$$F = Ne \tag{94.2}$$

et appelée *nombre de Faraday*.

Pour mettre en évidence la signification physique du nombre de Faraday, introduisons la notion d'*équivalent-gramme*. C'est le quotient du poids atomique A (ou du poids moléculaire s'il s'agit d'un composé chimique) par sa valence ν. Si on pose $M = A/\nu$ dans la formule (94.1) on trouve $q = F$, ce qui signifie que le nombre de Faraday est la charge que transporte un équivalent-gramme d'ions lors de l'électrolyse.

La formule (94.1) exprime les deux lois de l'électrolyse découvertes par Faraday. Selon la première loi, *la masse de corps formée aux électrodes est proportionnelle à la quantité d'électricité qui traverse l'électrolyseur* (*ou voltamètre*). La seconde loi affirme que *cette masse est proportionnelle à l'équivalent chimique* A/ν.

2. En mesurant au cours d'une expérience M et q on peut calculer par la formule (94.1) le nombre de Faraday F. On a trouvé $F = 2{,}8926 \cdot 10^{14}$ un.C.G.S.E./mole $= 9{,}6487 \cdot 10^4$ C/mole. Connaissant F et le nombre d'Avogadro, la formule (94.2) permet de calculer la charge élémentaire e. C'est ainsi que le physicien irlandais Stoney évalua pour la première fois en 1874 la valeur de la charge élémentaire. Ce travail ne fut publié qu'en 1881 après que Helmholtz exposa dans un discours consacré à la mémoire de Faraday (5 avril 1881) des résultats identiques à ceux de Stoney et obtenus indépendamment par la même méthode. Dans ce discours Helmholtz a dit :

« Si nous admettons l'existence des atomes des éléments chimiques, nous ne pouvons éviter de faire le pas suivant et d'admettre que l'électricité, qu'elle soit positive ou négative, est divisée en quantités élémentaires bien déterminées qui se comportent comme des atomes d'électricité. »

§ 95. Vitesses des ions et conductibilité électrique des électrolytes

1. Lorsqu'un ion se déplace au sein d'un électrolyte il est soumis à une force de résistance qui, dans le cas d'un mouvement permanent, est proportionnelle à la vitesse de l'ion. On peut donc caractériser les ions de l'électrolyte par leur *mobilité* qui a été définie au § 42 par la formule (42.14). Pour nos besoins actuels il est plus commode d'utiliser la mobilité que nous y avons dénotée par la lettre b. Les ions positifs et négatifs ont des mobilités différentes que nous noterons b^+ et b^-; nous noterons $\boldsymbol{u}^+$ et $\boldsymbol{u}^-$ les vitesses permanentes des ions. Avec ces notations nous pouvons écrire

$$\boldsymbol{u}^+ = b^+\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{u}^- = -b^-\boldsymbol{E}. \tag{95.1}$$

Les concentrations des ions positifs et négatifs sont égales puisque les solutions d'électrolytes sont électriquement neutres (plus exactement quasi neutres); elles sont égales à αn, n étant la concentration des molécules neutres du soluté et α le degré de dissociation. La densité du courant traversant l'électrolyte est

$$\boldsymbol{j} = \alpha n\,(e^+\boldsymbol{u}^+ + e^-\boldsymbol{u}^-). \tag{95.2}$$

Comme la charge d'un ion est égale en valeur absolue à νe, e étant la charge élémentaire et ν la valence de l'ion, on a

$$\boldsymbol{j} = \alpha n\nu e\,(b^+ + b^-)\,\boldsymbol{E}. \tag{95.3}$$

La conductivité électrique de l'électrolyte est

$$\lambda = \alpha n\nu e\,(b^+ + b^-). \tag{95.4}$$

La concentration n est simultanément le nombre de molécules neutres de la substance dissoute et le nombre total d'ions d'un signe donné (libres et liés) dans l'unité de volume de la solution. Introduisons la notion de *concentration équivalente du soluté* η qui est le nombre d'équivalents-grammes d'ions d'un signe donné contenus dans l'unité de volume de la solution. Comme l'équivalent-gramme contient N/ν particules, on a

$$\eta = \frac{n}{N/\nu} = \frac{n\nu}{N}, \tag{95.5}$$

d'où $n\nu = N\eta$. D'autre part, d'après la formule (94.2), $e = F/N$. A l'aide de ces relations la formule (95.4) se laisse écrire

$$\lambda = \alpha\eta F\,(b^+ + b^-). \tag{95.6}$$

Le rapport de la conductivité électrique λ à la concentration équivalente η du soluté est appelé *conductivité équivalente*:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\eta} = \alpha F\,(b^+ + b^-). \tag{95.7}$$

La conductivité équivalente Λ_∞ d'une solution infiniment diluée s'obtient en posant $\alpha = 1$ dans (95.7) (cf. § 92, pt. 7)

$$\Lambda_\infty = F\,(b^+ + b^-)\ ^{*)}, \tag{95.8}$$

et par suite

$$\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty}. \tag{95.9}$$

Par mesure de la conductivité équivalente cette formule permet de calculer le degré de dissociation α de la substance dissoute. Les formules (95.7) et (95.8) permettent de calculer la somme des mobilités des ions positif et négatif.

2. Pour pouvoir déterminer les valeurs des mobilités b^+ et b^- on doit disposer en plus de (95.8) d'une autre équation encore. On établit cette équation en mesurant la variation de la concentration du soluté dans l'électrolyte pendant l'électrolyse. De telles mesures furent réalisées par Hittorf (1824-1914) dans les années cinquante du XIXe siècle. Hittorf utilisa des récipients de formes différentes dont le fond était constitué par des parois poreuses (papier parchemin, vessie animale ou plaque fine d'argile poreuse). Remplis d'électrolyte tous ces récipients étaient réunis en un récipient composé. On obtenait ainsi un récipient unique divisé en plusieurs sections par des parois poreuses. L'électrolyte contenu dans ce récipient composé était soumis à l'électrolyse dans des conditions où les ions pouvaient traverser les parois poreuses. Après électrolyse on démontait le récipient composé en ses parties et on mesurait la concentration du soluté dans chacune d'elles.

Supposons pour simplifier que le récipient composé ne comporte que trois compartiments identiques A, B, K (fig. 233) qui contenaient au début de l'expérience le même nombre N_0 de molécules du soluté. Supposons que, pendant l'électrolyse du compartiment A, ΔN^+ ions positifs soient passés à travers la paroi poreuse AB dans le compartiment B. La même quantité d'ions positifs passeront de B en K

*) En électrochimie, on entend, d'après Kohlrausch, par mobilité le produit Fb. La formule (95.8) signifie alors que *la conductivité équivalente d'un électrolyte infiniment dilué est égale à la somme des mobilités des ions positif et négatif (dans le sens de Kohlrausch)*.

à travers la paroi BK. Du fait de ces processus le nombre d'ions positifs contenus dans le compartiment B ne changera pas, le nombre d'ions positifs contenus dans A diminuera de ΔN^+ et le nombre de ces ions contenus dans K augmentera d'autant; les nombres des ions positifs contenus dans les compartiments A et K sont respectivement égaux à

$$N_A^+ = N_0 - \Delta N^+, \quad N_K^+ = N_0 + \Delta N^+.$$

D'autre part, dans le même temps, les parois KB et BA ont été traversées par ΔN^- ions négatifs. Le nombre des ions négatifs ne chan-

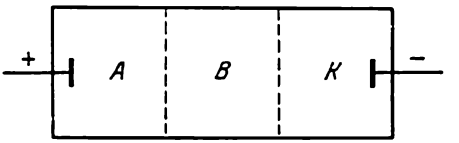


Fig. 233

geait pas dans le compartiment B et dans les compartiments A et K ils devenaient respectivement égaux à

$$N_A^- = N_0 + \Delta N^-, \quad N_K^- = N_0 - \Delta N^-.$$

Le compartiment A renfermait plus d'ions négatifs que d'ions positifs, la différence étant $N_A^- - N_A^+ = \Delta N^+ + \Delta N^-$. Dans le compartiment K le nombre des ions positifs est supérieur à celui des ions négatifs de $N_K^+ - N_K^- = \Delta N^+ + \Delta N^-$, c'est-à-dire que l'excédent est le même dans les deux cas. Jusqu'ici nous n'avons pas tenu compte de l'influence exercée par les électrodes. En fait les ions en excédent se dégagent sur les électrodes et y sont neutralisés par les charges de ces dernières. Le résultat en est que partout dans la solution les quantités d'ions positifs et négatifs sont les mêmes: dans le compartiment A il en reste $N_0 - \Delta N^+$, dans le compartiment K, $N_0 - \Delta N^-$ et dans le compartiment B il y a N_0 ions, i.e. le nombre d'ions reste inchangé. Les nombres des molécules neutres contenues dans ces compartiments sont les mêmes que ceux des ions. Dans le cas où $\Delta N^+ \neq \Delta N^-$ les concentrations de l'électrolyte dans les compartiments A et K seront différentes. Posons la concentration initiale égale à l'unité. Par suite de l'électrolyse les concentrations moyennes deviennent égales à

$$c_A = \frac{N_0 - \Delta N^+}{N_0} = 1 - \frac{\Delta N^+}{N_0} \text{ (dans le compartiment } A\text{)},$$

$$c_K = \frac{N_0 - \Delta N^-}{N_0} = 1 - \frac{\Delta N^-}{N_0} \text{ (dans le compartiment } K\text{)}.$$

Dans le compartiment B la concentration de l'électrolyte reste inchangée. Il découle de ces expressions que

$$\frac{1-c_A}{1-c_K}=\frac{\Delta N^+}{\Delta N^-}. \tag{95.10}$$

Exprimons maintenant le rapport $\Delta N^+/\Delta N^-$ en fonction des vitesses et des mobilités des ions positifs et négatifs. Considérons dans l'électrolyte une section arbitraire S. On pourra définir alors ΔN^+ comme le nombre des ions positifs et ΔN^- comme le nombre des ions négatifs ayant traversé la section S pendant l'électrolyse. Il est évident que ΔN^+ est proportionnel au flux des ions positifs et ΔN^- au flux des ions négatifs, i.e. à $\int n^+e^+u^+dS$ et à $\int n^-e^-u^-dS$ respectivement. Comme l'électrolyte est neutre ($|n^+e^+| = |n^-e^-|$) ces flux sont proportionnels aux vitesses u^+ et u^- des ions. Par conséquent

$$\frac{u^+}{u^-}=\frac{b^+}{b^-}=\frac{1-c_A}{1-c_K}. \tag{95.11}$$

Hittorf introduisit à la place du rapport des vitesses ou des mobilités les deux rapports suivant:

$$\begin{aligned} \varkappa^+ &= \frac{b^+}{b^++b^-}=\frac{1-c_A}{2-(c_A+c_K)}, \\ \varkappa^- &= \frac{b^-}{b^++b^-}=\frac{1-c_K}{2-(c_A+c_K)}, \end{aligned} \tag{95.12}$$

qu'il appela *nombres de transport des ions.* De toute évidence $\varkappa^+ + \varkappa^- = 1$.

3. En mesurant les concentrations des solutions avant et après électrolyse, Hittorf constata que dans l'acide chlorhydrique l'ion hydrogène se déplaçait presque 5 fois plus vite que l'ion chlore. La mesure de la conductibilité de l'électrolyte permet de calculer par la formule (95.8) la somme des mobilités $b^+ + b^-$, puis les valeurs de chacune de ces mobilités b^+ et b^-. Les expériences ont montré que *la mobilité de n'importe quel ion dans l'électrolyte était indépendante de la nature des autres ions se trouvant dans la solution.* Ce résultat expérimental est dû à Friedrich Kohlrausch (1840-1910) et s'appelle *loi de Kohlrausch de l'indépendance du mouvement des ions.* Cette loi peut être considérée comme une confirmation de l'hypothèse d'Arrhenius selon laquelle les ions se trouvant en solution ne sont plus liés les uns aux autres et sont si complètement dissociés qu'ils se déplacent indépendamment les uns des autres. La loi de Kohlrausch n'est vérifiée que pour des solutions diluées. Si les concentrations des ions en solution deviennent notables, leurs mobilités dépendent de la concentration et de la nature des autres ions se trouvant dans la solution. A mesure que la concentration croît, la mobilité des ions diminue, quoique assez modérément.

Le tableau 3 montre que les mobilités des ions sont généralement très petites. C'est l'ion H^+ qui présente la plus grande mobilité,

Tableau 3

Mobilités des ions dans des solutions aqueuses de faibles concentrations, à 18 °C

Ion	Mobilité, 10^{-3} cm²/(s·V)	Ion	Mobilité, 10^{-3} cm²/(s·V)
H^+	3,26	OH^-	1,80
Li^+	0,346	Cl^-	0,677
Na^+	0,450	NO_3^-	0,639
K^+	0,669	I^-	0,688

mais même cet ion ne se déplace que de 12 cm par heure dans un champ $E = 1$ V/cm. L'examen du tableau 3 laisserait supposer que le rayon de l'ion Li^+ est plus grand que celui de l'ion Na^+ et le rayon de ce dernier serait plus grand que celui de l'ion K^+. En réalité les rayons des atomes des métaux alcalins varient dans l'ordre inverse. Ce fait s'explique par ce qu'en solution les ions sont *hydratés*, i.e. sont entourés d'une couche de molécules d'eau qui les accompagne dans leurs déplacements (cf. t. II, § 122). Cette hydratation résulte des forces électriques que les ions exercent sur les molécules du milieu ambiant. Parmi les métaux alcalins c'est l'ion lithium qui crée le champ électrique le plus intense et c'est pour cela qu'il s'hydrate le plus fortement. Les mobilités des ions polyvalents portant des charges différentes, par exemple Fe^{++} et Fe^{+++}, ne sont cependant pas proportionnelles à leurs charges. Ce résultat s'explique par leur hydratation, les ions de plus grande électrovalence étant hydratés plus fortement.

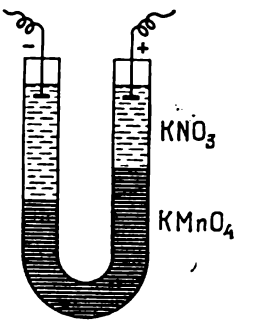


Fig. 234

4. Nernst (1864-1941) imagina une expérience qui montrait de visu le mouvement des ions colorant la solution. On verse dans la partie inférieure d'un tube en U (fig. 234) une solution de couleur violette de permanganate de potassium $KMnO_4$ d'une concentration $\eta \approx 0{,}003$ équivalent-gramme par cm³. Au-dessus de cette solution colorée on verse une couche d'une solution incolore de nitrate de potassium KNO_3 de même concentration équivalente. Ces opérations doivent être réalisées de façon très minutieuse afin que la frontière entre les deux solutions soit très nette. On utilise pour cela des artifices que nous ne décrivons pas ici. En solution le sel KNO_3

se dissocie en ions K^+ et NO_3^- et le sel $KMnO_4$ en ions K^+ et MnO_4^-. Lorsqu'on fait passer un courant électrique à travers la solution, les ions K^+ se déplacent dans les deux solutions vers la cathode. Lorsqu'ils arrivent à la cathode, ils s'y déchargent ; les atomes de potassium réagissent avec l'eau en dégageant de l'hydrogène. Comme ces ions ne sont pas colorés, nous ne pouvons pas observer leur mouvement. Les ions MnO_4^- colorent la solution en violet et se déplacent vers l'anode. On observe donc dans la partie coudée du tube côté cathode un abaissement de la frontière colorée, tandis que du côté anode la frontière se relève. La vitesse de déplacement de la frontière entre les deux solutions est égale à la vitesse des ions MnO_4^- et peut être directement mesurée. Si la hauteur du tube en U est égale à 10 cm et si la différence de potentiel appliquée aux électrodes est égale à 50 V, la frontière colorée se déplacera de 0,45 cm en 3 minutes dans chacune de deux parties du tube, de sorte que la différence de niveau sera de 1 cm environ.

PROBLÈMES

1. Calculer l'*équivalent électrochimique* de l'argent, i.e. la quantité d'argent libérée par électrolyse après passage d'une quantité d'électricité égale à un coulomb. Poids atomique de l'argent $A = 108$.

Réponse. $K = \frac{A}{F} = 1{,}18 \cdot 10^{-3}$ g/C.

2. Connaissant l'équivalent électrochimique de l'argent, calculer l'équivalent électrochimique du cuivre. Le poids atomique du cuivre est égal à 63,5.

Réponse. $K_{Cu} = \frac{\nu_{Ag} A_{Cu}}{\nu_{Cu} A_{Ag}} K_{Ag} = \frac{1}{2} \frac{A_{Cu}}{A_{Ag}} K_{Ag} = 0{,}328 \cdot 10^{-3}$ g/C.

3. En utilisant les données numériques du tableau 3 relatives aux mobilités des ions dans les électrolytes, calculer la conductivité équivalente Λ_∞ à 18 °C d'une solution infiniment diluée de sel de cuisine NaCl.

Réponse. $\Lambda_\infty = F(b^+ + b^-) = 109$ cm²/(ohms·éq.-g).

4. La résistivité électrique d'une solution à 10 % de NaCl (0,1 g de NaCl dans 1 cm³ de solution) à la température ambiante est $\rho = 8{,}35$ ohms·cm. Calculer la concentration équivalente η, la conductivité équivalente Λ et le degré de dissociation α de cette solution. Les poids atomiques de Na et de Cl sont respectivement $A_{Na} = 23$, $A_{Cl} = 35{,}5$.

Réponse.

$$\eta = \frac{m}{A_{Na} + A_{Cl}} = 1{,}71 \cdot 10^{-3} \text{ g/(éq.-g·cm}^3\text{)},$$

$$\Lambda = \frac{1}{\rho\eta} = 70 \text{ cm}^2\text{/(ohms·éq.-g)},$$

$$\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty} = 0{,}64$$

($m = 0{,}1$ g est la masse de sel contenue dans 1 cm³ de solution).

5. L'eau la plus pure possède à 18 °C une conductivité électrique $\lambda = 3{,}8 \cdot 10^{-2}$ ohm^{-1}·cm^{-1}. En admettant que la conductibilité de l'eau est due à la dissociation des molécules H_2O en ions H^+ et $(OH)^-$, calculer le degré de dissociation de l'eau à cette température.

Solution. Dans le cas d'une dissociation complète de l'eau la conductivité équivalente serait $\Lambda_\infty = F(b^+ + b^-) = 488$ cm²/(ohms·éq.-g). La

concentration équivalente $\eta = m/M$, où $m = 1$ g est la masse d'un cm³ d'eau, $M = 18$ est le poids moléculaire de l'eau. La conductivité équivalente réelle de l'eau est $\Lambda = \lambda/\eta = 6{,}8 \cdot 10^{-7}$ cm²/(ohm·éq.-g). Le degré de dissociation $\alpha = \frac{\Lambda}{\Lambda_\infty} = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$. Un degré de dissociation si petit ne permet pas de décomposer l'eau pure par électrolyse, aussi l'additionne-t-on d'acide sulfurique, par exemple, pour augmenter sa conductivité.

§ 96. Piles galvaniques et accumulateurs

1. Nous avons exposé au § 43 la théorie d'une pile de concentration où le courant électrique apparaît du fait de l'existence d'un gradient de concentration dans la solution. Nous y avons montré que la force électromotrice d'une pile de concentration était très petite, de sorte que ces piles ne présentent aucun intérêt pour la pratique. Néanmoins la théorie de cette pile présente un intérêt de principe car les processus qui y évoluent sont tellement simples qu'il est facile de comprendre comment un courant électrique apparaît dans les éléments galvaniques, de bien assimiler la notion de forces d'origine non électrique et de généraliser la loi d'Ohm au cas où ces forces sont présentes. Dans ce qui suit nous nous proposons de décrire brièvement les processus qui déterminent le fonctionnement des éléments galvaniques utilisés en pratique.

2. Si on plonge un morceau d'un métal quelconque, de zinc par exemple, dans de l'eau, au premier instant ce système ne sera pas en équilibre. Le réseau cristallin du zinc est constitué par des ions positifs Zn^{++}. Les ions zinc arrachés du réseau cristallin sous l'action des molécules d'eau fortement polaires commencent à passer dans la couche d'eau baignant la surface du morceau de zinc. Perdant des ions positifs, le morceau de zinc acquiert une charge négative, tandis que l'eau acquiert une charge positive. A la frontière du métal et de l'eau apparaît une *double couche électrique* à l'intérieur de laquelle règne un champ électrique orienté dans le sens allant de l'eau vers le métal. Ce champ s'opposera donc au passage de nouveaux ions métalliques dans l'eau et favorisera leur retour dans le métal. Il s'établit un équilibre statistique caractérisé par ce qu'en moyenne le nombre d'ions passant du métal dans l'eau est égal au nombre d'ions allant en sens inverse. Le même chose se produira si on plonge un métal dans une solution aqueuse de l'un de ses sels, par exemple le zinc dans une solution de sulfate de zinc $ZnSO_4$. En solution $ZnSO_4$ se dissocie en ions Zn^{++} et SO_4^{--}. Les ions Zn^{++} qui existent en solution du fait de la dissociation électrolytique du sel ne diffèrent naturellement pas des ions provenant du métal. L'augmentation de la concentration d'ions Zn^{++} dans la solution favorise évidemment leur passage dans le métal et rend plus difficile le processus inverse. Par conséquent le zinc immergé dans une solution de $ZnSO_4$, quoique acquérant une charge négative, aura une charge plus petite que lorsqu'il se trou-

vait dans de l'eau pure. La différence de potentiel qui s'établit lorsque se trouve réalisé l'équilibre entre le métal et la solution dépend de la température, de la pression et de la concentration de la solution. Cependant pour une concentration donnée des ions du métal considéré dans la solution cette différence de potentiel ne dépend pas de la présence dans la solution d'ions étrangers à moins que ceux-ci ne se déposent sur le métal, ce qui supposerait leur participation aux processus d'échange d'ions entre le métal et la solution. Si on plonge, par exemple, un morceau de zinc d'abord dans une solution de $ZnSO_4$, puis dans une solution de $ZnCl_2$, on obtiendra dans les deux cas la même différence de potentiel entre le zinc et la solution, à condition que la concentration d'ions Zn^{++} soit la même dans les deux solutions.

Lorsqu'on plonge un métal dans une solution de l'un de ses sels, il ne prend pas toujours une charge négative. Si on plonge, par exemple, un morceau de cuivre dans une solution de sulfate de cuivre $CuSO_4$, les ions Cu^{++} commencent aussitôt à se décharger sur le cuivre en lui communiquant une charge positive. La double couche électrique qui se forme à l'interface cuivre-solution est maintenant telle que ses charges positives pointent vers le cuivre et les charges négatives vers la solution. Le champ électrique correspondant est donc orienté dans le sens allant du cuivre vers la solution. A l'état permanent le morceau de cuivre est chargé positivement et la solution est chargée négativement.

Ainsi *lorsqu'on plonge un métal dans l'eau ou dans une solution aqueuse contenant des ions de ce même métal, une double couche électrique apparaît à l'interface métal-solution et donne naissance à une différence de potentiel entre le métal et la solution.* La valeur de cette différence de potentiel dépend de la nature du métal, de la concentration des ions de ce métal dans la solution et ne dépend qu'assez faiblement de la température et de la pression.

3. Lorsqu'on cherche à mesurer la différence de potentiel entre une électrode métallique et l'électrolyte où elle plonge, on se heurte à la difficulté suivante. Pour pouvoir brancher un voltmètre entre l'électrode à l'étude et l'électrolyte, on doit le connecter à une seconde électrode plongeant dans le même électrolyte. Or entre cette seconde électrode et l'électrolyte apparaît aussi une différence de potentiel, de sorte que le voltmètre indiquera non pas la différence de potentiel qui nous intéresse, mais la différence de potentiel entre deux électrodes différentes plongeant dans le même électrolyte. Pour calculer la force électromotrice d'un élément galvanique, il suffit de connaître les différences de potentiel entre ses électrodes. Comme ces différences de potentiel ne dépendent pas du corps par rapport auquel on détermine les potentiels des électrodes elles-mêmes, on peut adopter les valeurs des potentiels mesurés par rapport à un corps quelconque adopté comme électrode de référence. Le plus souvent on utilise l'*électrode à hydrogène normale*, constituée par une électrode en platine

platiné *) plongeant dans une solution normale contenant les ions hydrogène (par exemple, solution d'acide sulfurique) et entourée d'un flux d'hydrogène gazeux à la pression atmosphérique ; l'électrode à hydrogène et l'électrode à laquelle elle est accouplée doivent se trouver à la même température. (On appelle *solution normale* ou *solution de concentration normale* toute solution contenant un équivalent-gramme d'ions métalliques ou d'ions hydrogène par litre de solution.) Le potentiel de l'électrode à l'étude rapporté au potentiel de l'électrode à hydrogène normale est appelé *potentiel d'électrode.* Si la solution dans laquelle plonge l'électrode à l'étude est normale, le potentiel d'électrode est dit *normal* ; on le dénote par V_n. Dans le tableau 4 on indique les valeurs de V_n pour différentes

Tableau 4

Valeurs des potentiels d'électrode normaux à 25 °C

Electrode	V_n, V	Electrode	V_n, V	Electrode	V_n, V
L^+/L	—3,045	Fe^{++}/Fe	—0,440	H^+/H_2	0,0000
K^+/K	—2,925	Cd^{++}/Cd	—0,403	Cu^{++}/Cu	+0,337
Na^+/Na	—2,714	Co^{++}/Co	—0,277	Cu^+/Cu	+0,521
Mg^{++}/Mg	—2,37	Ni^{++}/Ni	—0,250	Hg^+/Hg	+0,798
Al^{+++}/Al	—1,66	Sn^{++}/Sn	—0,136	Ag^+/Ag	+0,799
Zn^{++}/Zn	—0,763	Pb^{++}/Pb	—0,126	Au^{+++}/Au	+1,50

électrodes. On y indique aussi les ions qu'échange l'électrode avec la solution où elle plonge. Cette dernière indication est nécessaire car le potentiel d'électrode normal dépend non seulement de la nature du métal mais aussi de la valeur de la charge de ses ions se trouvant dans la solution (par exemple Cu^+ et Cu^{++}).

A l'aide de ces données on peut également calculer de façon approchée le potentiel d'électrode V_c dans le cas où la concentration de l'électrolyte diffère de la concentration normale. On a en effet $V_c = V_n + (V_c - V_n)$. La différence de potentiel $(V_c - V_n)$ se laisse calculer à l'aide de la théorie des éléments à gradient de concentration, à condition que les concentrations ne soient pas trop grandes. Il suffit pour cela de poser dans la formule (44.13) que l'une des mobilités B^+ ou B^- est nulle (puisque la différence de potentiel d'équilibre $V_c - V_n$ est maintenant due à des ions de même signe). On trouve ainsi $V_c - V_n = kT \ln c/(\nu e)$, où νe désigne la charge de l'ion (e est la charge élémentaire et ν un nombre entier ; pour les ions positifs

*) C'est une électrode en platine lisse recouverte par électrolyse de noir de platine, i. e. de platine finement dispersé.

$\nu > 0$ et pour les ions négatifs $\nu < 0$). On prend pour unité de concentration c la concentration d'une solution normale. Par conséquent

$$V_c = V_n + \frac{kT}{\nu e} \ln c = V_n + \frac{RT}{\nu F} \ln c. \qquad (96.1)$$

4. Une électrode plongeant dans une solution d'électrolyte constitue ce qu'on appelle un *demi-élément*. L'association de deux demi-éléments constitue un *élément galvanique*. A titre d'exemple on peut citer la *pile Daniell* qui se compose d'une électrode de zinc plongeant dans une solution de $ZnSO_4$ et d'une électrode de cuivre plongeant dans une solution de $CuSO_4$. Un vase poreux en argile non cuite sépare les deux électrolytes. Les parois du vase n'empêchent pas le déplacement des ions mais s'opposent au mélange des électrolytes.

La différence de potentiel mesurée entre les électrodes en circuit ouvert est appelée *force électromotrice* de la pile (cf. § 44). Elle est approximativement égale à la différence des potentiels d'électrode des électrodes positive et négative. Supposons par exemple que les deux solutions de $CuSO_4$ et de $ZnSO_4$ soient de concentrations normales. Dans le tableau des potentiels d'électrode nous trouvons que le potentiel d'électrode du zinc est égal à — 0,763 V et celui de cuivre à + 0,337 V. La f.é.m. de la pile Daniell est donc égale à $\mathscr{E} = 0{,}337 - (-0{,}763) = 1{,}10$ V. Nous avons négligé dans ce calcul la différence de potentiel de diffusion qui apparaît à la frontière des deux électrolytes, car elle est petite, généralement inférieure à 0,03 V (cf. problème 2 au § 44).

Dans la *pile de Volta* (1745-1827) les deux électrodes, l'une en cuivre et l'autre en zinc, plongent dans une même solution d'acide sulfurique H_2SO_4. A l'instant initial cet électrolyte ne contient ni ions cuivre ni ions zinc, mais par la suite ces deux espèces d'ions y font leur apparition, de sorte que ce cas ne diffère pas en principe du précédent.

Lorsqu'on réunit les électrodes d'une pile Daniell par un fil conducteur, celui-ci sera traversé par des électrons allant de l'électrode négative (zinc) vers l'électrode positive (cuivre), ce qui entraîne une diminution en valeur absolue de leurs charges. L'équilibre entre les électrodes et les électrolytes se trouvera rompu. Etant moins fortement attirés par l'électrode négative (zinc) les ions Zn^{++} commenceront à passer en solution et s'y déplaceront vers l'électrode positive (cuivre). L'électrode positive (cuivre) repoussera moins énergiquement les ions Cu^{++} qui s'y déchargeront et s'y déposeront à l'état de cuivre. En ce qui concerne les ions SO_4^{--}, près de l'électrode négative ils seront en déficit et près de l'électrode positive ils seront en excédent. Bref, un courant électrique circulera dans le circuit extérieur allant du cuivre vers le zinc et dans l'électrolyte ce courant ira du zinc vers le cuivre. De ce fait le zinc se dissoudra et le cuivre se déposera sur l'électrode positive. Le nombre total d'ions SO_4^{--} se

trouvant en solution restera constant, leur concentration étant plus grande près de l'électrode de zinc et plus petite près de l'électrode de cuivre.

5. Le passage du courant électrique à travers les éléments galvaniques peut donner lieu à la formation de produits secondaires se dégageant sur les électrodes ainsi qu'à l'apparition de gradients de concentration dans l'électrolyte. Ces effets secondaires font apparaître une force électromotrice supplémentaire qui s'exerce à l'encontre de la force électromotrice de l'élément et l'affaiblit. Cet effet est appelé *polarisation électrolytique* ou *polarisation des éléments galvaniques*. Prenons pour exemple la pile de Volta (électrodes en zinc et en cuivre dans une solution d'acide sulfurique). Lorsqu'on ferme le circuit de la pile les ions positifs H^+ se déplacent vers l'électrode de cuivre et s'y déposent. Après une longue période de fonctionnement, tout se passe comme si l'électrode de cuivre avait été remplacée par une électrode à hydrogène qui jouit de la propriété d'émettre des ions H^+ dans la solution et de créer ainsi une f.é.m. supplémentaire dirigée à l'encontre de la f.é.m. de la pile. Le potentiel d'électrode de l'hydrogène est de 0,337 V plus petit que le potentiel d'électrode du cuivre (cf. tabl. 4). C'est environ de cette quantité que diminue la f.é.m. de la pile. En outre la couche d'hydrogène qui s'accumule sur l'électrode de cuivre fait croître la résistance interne de la pile. Ces facteurs déterminent une diminution de l'intensité de courant dans le circuit, i.e. la polarisation de la pile.

Pour éliminer l'influence nocive de la polarisation des piles, on pourrait expulser l'hydrogène et les autres produits nocifs se déposant sur les électrodes par un brassage mécanique de l'électrolyte. Ce procédé ne saurait être efficace que si la polarisation résultait de gradients de concentration des électrolytes. Dans tous les autres cas il est inopérant. Il existe deux autres procédés de *dépolarisation des piles* que l'on utilise en pratique. Le premier de ces procédés consiste à choisir des électrolytes liquides tels que durant le fonctionnement de la pile la composition des électrodes ne soit pas altérée. C'est ce procédé que l'on utilise dans la *pile Daniell*. Comme le cuivre se dépose sur l'électrode de cuivre, cette électrode conserve ses propriétés pendant le fonctionnement de la pile. L'électrode de zinc ne fait que se dissoudre et ne change donc pas.

Le deuxième procédé de dépolarisation des piles galvaniques est un procédé *chimique*. On ajoute à l'électrolyte des substances susceptibles de réagir énergiquement avec les produits déterminant la polarisation. Ainsi pour réduire l'influence nocive de l'hydrogène qui se dégage sur la cathode on utilise comme *dépolarisants* diverses *substances oxydantes* et pour combattre l'influence nocive de l'oxygène se dégageant sur l'anode on utilise des *réducteurs*. Le procédé de dépolarisation chimique est utilisé par exemple dans la *pile Leclanché*. L'électrode positive est constituée par une tige de charbon

entourée par une masse compressée de bioxyde de manganèse MnO_2 et de graphite (ce dernier est ajouté pour augmenter la conductibilité électrique). Cette masse est entourée d'une feuille de zinc qui joue le rôle d'électrode négative. L'ensemble plonge dans une solution aqueuse de chlorure d'ammonium NH_4Cl. La f.é.m. de la pile Leclanché est voisine de 1,5 V. A l'électrode de zinc le zinc passe dans la solution sous forme d'ions Zn^{++} et cette électrode se charge négativement. Les ions NH_4^+ se déchargent sur l'autre électrode qui prend une charge positive et s'y accumulent. Ensuite se produisent les réactions secondaires :

$$2NH_4 = 2NH_3 + 2H,$$
$$2H + MnO_2 = H_2O + MnO,$$
$$2NH_3 + 2H_2O = 2NH_4(OH).$$

Etant un oxydant puissant, le bioxyde de manganèse MnO_2 oxyde l'hydrogène libéré avec formation d'eau (deuxième réaction ci-dessus). La pile Leclanché est fabriquée sous forme de *pile sèche* ; la solution d'électrolyte est immobilisée en gelée par les *agents épaississants* tels que la fécule ou la gélose. Pour empêcher l'évaporation de l'eau on recouvre l'élément d'une couche de cire.

6. La polarisation électrolytique se manifeste non seulement dans les piles galvaniques mais aussi dans les voltamètres. Par exemple, si on immerge dans une solution d'acide sulfurique deux électrodes de platine reliées à une source de courant, pendant l'électrolyse de l'hydrogène sera libéré à la cathode et de l'oxygène sera libéré à l'anode (cf. § 93). A mesure que ces gaz s'accumulent leurs pressions partielles augmentent. Lorsque ces pressions deviendront égales à la pression atmosphérique, des bulles d'hydrogène et d'oxygène monteront le long des électrodes. Si on débranche le voltamètre on constate que l'une des électrodes est recouverte d'oxygène et l'autre d'hydrogène. Les électrodes sont polarisées, l'hydrogène étant chargé positivement et l'oxygène négativement. Si on relie les électrodes par un fil conducteur, l'électrolyte sera traversé par un courant électrique, de sens inverse à celui qui passait pendant l'électrolyse, l'hydrogène et l'oxygène retournant dans l'électrolyte sous forme d'ions. Lorsque les gaz accumulés seront dépensés, la f.é.m. deviendra nulle et aucun courant ne circulera plus dans le circuit.

Dans certains cas particuliers il n'y aura pas de f.é.m. de polarisation, par exemple dans le cas où deux électrodes de cuivre plongent dans une solution de $CuSO_4$. Pendant l'électrolyse l'une des électrodes se dissout, tandis que l'autre se recouvre de cuivre. Comme la composition des électrodes ne change pas, elles ne se polarisent pas, à cela près qu'une polarisation déterminée par la variation des concentrations de l'électrolyte apparaît près des électrodes ; mais la f.é.m. qui en résulte est très petite.

Voyons l'influence que la f.é.m. de polarisation exerce sur l'électrolyse. Supposons, par exemple, qu'on soumette à électrolyse de l'acide chlorhydrique HCl avec des électrodes de platine auxquelles on applique une tension V faible, par exemple $V = 0{,}5$ V. A mesure que l'hydrogène et le chlore s'accumulent sur les électrodes, la f.é.m. de polarisation augmente. Lorsqu'elle devient égale à 0,5 V le courant cesse de passer. Faisons croître lentement la tension appliquée. La quantité de gaz se dégageant sur les électrodes augmentera et lorsque les pressions partielles des gaz deviendront égales à une atmosphère, ils se dégageront sous forme de bulles. A partir de ce moment la composition des électrodes ne changera plus et la f.é.m. de polarisation atteindra sa valeur limite V_0 égale à la différence des potentiels d'équilibre entre le chlore et l'hydrogène : $V_0 = 1{,}36$ V. Le courant $\mathcal{J}$ traversant l'électrolyte est déterminé par la différence de potentiel efficace $V - V_0$. Il est égal à

$$\mathcal{J} = \frac{V - V_0}{R},$$

où R est la résistance de l'électrolyte compris entre les électrodes. Afin que l'électrolyse se poursuive de façon continue il faut appliquer au voltamètre une tension extérieure V supérieure à la tension de seuil V_0. Cette valeur de seuil est la *tension de décomposition de l'électrolyte.*

En réalité, en fonction de la nature des réactions électrochimiques évoluant sur les électrodes la tension de décomposition de l'électrolyte est généralement supérieure à la f.é.m. de polarisation. Cet effet est appelé *effet de surtension.* Par exemple, le potentiel d'électrode de l'oxygène par rapport à l'hydrogène est égal à +1,23 V. On pourrait donc s'attendre à ce que la tension de décomposition de l'acide sulfurique soit égale à 1,23 V ; or l'expérience fournit la valeur 1,64 V.

7. Une variété importante des éléments galvaniques sont les *accumulateurs* ou *éléments galvaniques secondaires.* Les substances qui sont consommées lors du passage du courant sont produites dans les accumulateurs par électrolyse. Ce sont les *accumulateurs au plomb* qui sont les plus répandus. Cet accumulateur est composé de deux plaques de plomb comportant des alvéoles remplies d'une pâte constituée par PbO et de l'eau, plongeant dans de l'acide sulfurique à 30 % (densité 1,2 g/cm³). Par suite de la réaction $PbO + H_2SO_4 = PbSO_4 + H_2O$ les plaques se recouvrent d'une couche de $PbSO_4$ peu soluble. Pour que l'accumulateur puisse fonctionner en générateur de courant on doit procéder à sa charge ; pour cela on y fait passer un courant électrique. Les ions H^+ se déplacent vers la cathode, s'y déchargent et assurent l'évolution de la réaction $PbSO_4 + 2H = Pb + H_2SO_4$. Les ions SO_4^{--} se déchargent sur l'anode et réagissent suivant l'équation $PbSO_4 + SO_4 = Pb(SO_4)_2$; la réaction réversible $Pb(SO_4)_2 + 2H_2O \rightleftarrows 2PbO_2 + 2H_2SO_4$ se produit aussitôt. Après

charge la cathode de l'accumulateur se transforme en une masse spongieuse de plomb métallique, tandis que l'anode se transforme en bioxyde de plomb PbO_2. Pendant la charge la concentration de H_2SO_4 augmente. Lorsqu'on débranche la source de courant extérieure, on obtient un élément galvanique à anode de PbO_2 et à cathode de plomb. Si on laisse cet élément en circuit ouvert, il peut subsister à l'état chargé pendant longtemps. Lorsqu'on ferme le circuit d'un accumulateur chargé par un conducteur, le circuit sera parcouru par un courant de sens opposé à celui du courant de charge, et l'accumulateur commencera à se décharger. Les ions négatifs SO_4^{--} de la solution se déchargent sur la cathode de plomb et réagissent suivant l'équation : $Pb + SO_4 = PbSO_4$. Sur l'anode évolue la réaction réversible $PbO_2 + 2H_2SO_4 \rightleftharpoons Pb(SO_4)_2 + 2H_2O$. Les ions positifs H^+ de la solution se déchargent sur l'anode de PbO_2 et réagissent suivant l'équation $Pb(SO_4)_2 + 2H = PbSO_4 + H_2SO_4$. Du fait de ces réactions la concentration d'acide sulfurique diminue. Finalement l'accumulateur revient à son état initial : les deux plaques se composent de $PbSO_4$ et la concentration de H_2SO_4 reprend sa valeur initiale. Pour que l'accumulateur puisse débiter de nouveau un courant on doit le recharger.

A la fin de la charge la f.é.m. de l'accumulateur au plomb peut atteindre 2,7 V. Elle diminue pendant la décharge d'abord rapidement jusqu'à 2,2 V environ, puis très lentement jusqu'à 1,85 V. On doit alors arrêter la décharge pour éviter que les plaques ne se recouvrent d'une couche de $PbSO_4$ peu soluble, ce qui détériore l'accumulateur.

On appelle *capacité* d'un accumulateur la charge électrique maximale qu'il peut restituer pendant la décharge ; on la mesure généralement en *ampères-heures*. La capacité est d'autant plus grande que la surface des électrodes est grande. C'est pour cette raison que les plaques sont fabriquées non en plomb massif mais en formes de grilles à alvéoles.

Actuellement on utilise de plus en plus largement différents types d'*accumulateurs alcalins*. Une des électrodes est en fer, l'autre en nickel. L'électrolyte est une solution à 20 % de KOH. A l'état chargé l'anode se compose d'hydroxyde de nickel $Ni(OH)_3$ et la cathode de fer métallique. La f.é.m. des accumulateurs alcalins $\sim$ 1,3 V. A poids égal leur capacité est plus grande que celle des accumulateurs au plomb.

CHAPITRE VII

COURANTS ÉLECTRIQUES DANS LES MÉTAUX, LES SEMICONDUCTEURS ET DANS LE VIDE

§ 97. Inertie des électrons dans les métaux

1. Nous avons déjà maintes fois indiqué que dans les métaux les porteurs de courant étaient les *électrons libres*, i.e. des électrons faiblement attachés aux ions du réseau cristallin du métal. Dans les métaux les ions ne participent pas au transport d'électricité. S'il n'en était pas ainsi, le passage du courant électrique donnerait lieu à électrolyse et à un transport de matière, choses que l'on n'observe pas. Riecket (1845-1915) fit passer pendant un an un courant électrique à travers trois cylindres superposés, respectivement de cuivre, d'aluminium et de cuivre. Quoique la charge totale ayant traversé les cylindres pendant cette période ait été d'environ $3{,}5 \cdot 10^6$ coulombs, on n'observa aucune interpénétration des métaux et le poids des cylindres resta constant à $\pm$ 0,03 mg près.

2. On arrive à tirer des conclusions encore plus décisives sur la nature des porteurs de courant dans les métaux d'expériences où le courant est excité uniquement par des *forces d'inertie*. Pour se faire une idée du principe de ces expériences, considérons un anneau en fil fin tournant autour de son axe géométrique d'un mouvement varié. Pendant l'accélération du mouvement de rotation les électrons libres prennent du retard sur les ions du réseau cristallin du métal et pendant la décélération ils prennent de l'avance. Puisque les électrons sont alors en mouvement par rapport au réseau cristallin, ils assurent le passage d'un *courant électrique*. Pour pouvoir en donner une description quantitative, il convient d'utiliser un référentiel tournant avec l'anneau. Dans ce référentiel apparaît une force d'inertie F_{in} s'exerçant sur chaque électron libre. En divisant cette force par la charge de l'électron e nous obtenons le champ électrique d'origine étrangère $E^{\text{étr}} = F_{\text{in}}/e$ qui excite le courant électrique. Comme le courant excité est alternatif, on doit écrire la loi d'Ohm sous la forme (42.6) ou

$$j + \tau_{\text{in}} \frac{dj}{dt} = \lambda (E^{\text{étr}} + E), \tag{97.1}$$

où E est le champ électrique résultant du déplacement des électrons par rapport aux ions du réseau. En utilisant le procédé connu (cf.

§ 44) on met cette équation sous la forme intégrale:

$$R\left(\mathcal{J}+\tau_{\text{in}}\frac{d\mathcal{J}}{dt}\right)=\oint(E^{\text{étr}}+E)\,dl,$$

où R est la résistance de l'anneau; on intègre sur le contour de l'anneau. La première intégrale $\oint E^{\text{étr}}\,dl$ représente la force électromotrice $\mathscr{E}$ des forces étrangères s'exerçant dans le contour. La deuxième intégrale $\oint E dl$ est égale à $-Ld\mathcal{J}/dt$. Ainsi

$$(L+R\tau_{\text{in}})\frac{d\mathcal{J}}{dt}+R\mathcal{J}=\mathscr{E}. \tag{97.2}$$

Dans le cas considéré la force électromotrice $\mathscr{E}$ est due aux forces d'inertie. Les forces d'inertie qui sont orthogonales à l'axe du fil ne modifient pas l'intensité du courant $\mathcal{J}$ car seule importe la force d'inertie dirigée suivant l'axe. Cette dernière résulte des variations de la vitesse de rotation et est égale à $F_{\text{in}}=-m\dot{v}$, où m est la masse de l'électron et $\dot{v}$ la vitesse linéaire de rotation de l'anneau. Compte tenu de ces remarques, l'équation précédente s'écrit

$$(L+R\tau_{\text{in}})\frac{d\mathcal{J}}{dt}+R\mathcal{J}=-\frac{m}{e}\,l\dot{v},$$

l étant la longueur de l'anneau. En intégrant cette équation par rapport au temps entre $t=t_1$ et $t=t_2$, on trouve

$$(L+R\tau_{\text{in}})(\mathcal{J}_2-\mathcal{J}_1)+Rq=\frac{m}{e}\,l(v_1-v_2),$$

où $q=\int\mathcal{J}dt$ est la quantité d'électricité ayant traversé le contour, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, v_1, v_2 sont respectivement les valeurs de l'intensité du courant $\mathcal{J}$ et de la vitesse v aux instants t_1 et t_2. Supposons que jusqu'à l'instant t_1 l'anneau était animé d'un mouvement de rotation uniforme avec la vitesse $v_1=v$, qu'à l'instant $t=t_2$ la vitesse v devient nulle et que le processus d'établissement d'un courant permanent a pris fin à cet instant. On a alors $\mathcal{J}_1=\mathcal{J}_2=0$ et par conséquent

$$q=\frac{mlv}{eR}. \tag{97.3}$$

Ayant mesuré à l'aide d'un galvanomètre balistique la quantité d'électricité q on peut calculer à l'aide de (97.3) la charge spécifique e/m et juger du signe de la charge e d'après le sens de déviation du galvanomètre.

L'idée de ces expériences fut suggérée en 1913 par les physiciens russes L. I. Mandelstam (1879-1944) et N. D. Papalexi (1880-1947). Ils réalisèrent des expériences qualitatives qui ont montré que dans

le cas d'oscillations de torsion d'une bobine de fil autour de son axe géométrique on voit apparaître un courant alternatif (voir problème n° 3 du § 132). L'approche de la première guerre mondiale (les expériences étaient effectuées à Strasbourg) ne permit pas à ces chercheurs de parachever leurs travaux. Cette même expérience fut conçue par H. A. Lorentz et réalisée en 1916 par Tolman (1881-1948) et Stewart.

Dans les expériences de Tolman et Stewart une bobine en fil métallique était mise en rotation rapide autour de son axe géométrique (la vitesse linéaire de rotation atteignait 300 m/s). Les extrémités du fil étaient connectées à un galvanomètre balistique très sensible à l'aide de fils souples qui se tordaient en torsade pendant la rotation de la bobine. A l'aide de bobines fixes parcourues par des courants on compensait le champ magnétique terrestre d'une façon tellement exacte que lors de la rotation uniforme de la bobine le galvanomètre ne décelait aucun courant induit. Rassurés sur ce point, les expérimentateurs ralentissaient brusquement la rotation de la bobine et observaient à ce moment une déviation du galvanomètre. A ces conditions expérimentales s'applique l'équation (97.3) où l désignerait la longueur totale du fil bobiné (dans les expériences de Tolman l atteignait 500 mètres) et R la résistance totale du circuit, y compris celle du galvanomètre et des fils de connexion. Les bobines étaient réalisées en fils de cuivre, d'aluminium et d'argent. Le sens de déviation du galvanomètre témoignait que dans ces métaux les porteurs de courant étaient des charges négatives. La charge spécifique e/m avait, à la précision des mesures près, la même valeur que celle déterminée pour les électrons dans les expériences avec les rayons cathodiques.

3. En 1944, Kettering et Scott réalisèrent une expérience inverse à celle de Tolman et Stewart. Ils observaient la variation du moment cinétique d'une bobine de fil lorsqu'on faisait varier l'intensité du courant qui y circulait. La bobine parcourue par un courant continu était suspendue à un fil et exécutait des oscillations de torsion par rapport à son axe géométrique $\varphi = a \sin \omega t$. Si le courant est déterminé par le mouvement des électrons l'intensité de courant $\mathcal{J}$ sera $\mathcal{J} = Sneu$, où S est l'aire de la section droite du fil, n le nombre d'électrons libres par unité de volume du métal et u la vitesse moyenne du mouvement ordonné des électrons par rapport au fil. A ce courant est lié un moment cinétique par rapport à l'axe de la bobine $L_{\text{é}} = lSnmur$, où l est la longueur du fil et r le rayon d'une spire. Ainsi $L_{\text{é}} = \frac{m}{e} lr\mathcal{J}$. Si on fait varier de $\Delta\mathcal{J}$ l'intensité du courant $\mathcal{J}$, le moment cinétique lié au mouvement des électrons doit varier de $\Delta L_{\text{é}} = \frac{m}{e} lr\Delta\mathcal{J}$. Le moment cinétique du système tout entier — réseau cristallin et électrons, doit rester constant. En

effet, puisque le courant varie sous l'action d'un champ électrique, celui-ci s'exerce aussi bien sur les électrons que sur les ions et comme le système est électriquement neutre, le moment cinétique des électrons doit être égal et de signe opposé au moment cinétique des ions du réseau cristallin. On en conclut qu'à la suite d'une variation de l'intensité de courant $\mathcal{J}$ le réseau acquiert un moment cinétique $\Delta L_r = -\Delta L_é = -\frac{m}{e} lr\Delta\mathcal{J}$. Si on fait varier le courant à un taux suffisant pour que la bobine ne tourne que d'un angle petit pendant la durée d'une oscillation, on peut poser que la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ du réseau pendant les oscillations de torsion varie selon l'équation $\Theta\Delta\dot{\varphi} = \Delta L_r$, où Θ est le moment d'inertie de la bobine par rapport à son axe géométrique. Supposons que l'on ait fait varier le courant à l'instant où la bobine passait par sa position d'équilibre. A cet instant $\dot{\varphi} \equiv \omega a \cos \omega t = \omega a$. L'amplitude a des oscillations reçoit alors un accroissement défini par l'équation $\Theta\omega\Delta a = \Delta L_r$. Comme dans les expériences réelles on inversait le sens du courant, $\Delta\mathcal{J} = -2\mathcal{J}$ et par suite

$$\Delta a = \frac{\Delta L_r}{\Theta\omega} = \frac{2mlr}{e\Theta\omega}\mathcal{J} = \frac{mlrT}{\pi e\Theta}\mathcal{J}, \tag{97.4}$$

où $T = 2\pi/\omega$ est la période des oscillations de torsion de la bobine. Dans les expériences on mesurait la grandeur Δa à l'aide d'un appareil spécial très sensible que nous ne décrirons pas.

Etant donné la petitesse de l'effet et la nécessité de soustraire l'appareil aux perturbations supérieures à l'effet lui-même, les expériences sont de réalisation très difficile. Elles ont été cependant menées à bonne fin grâce à des équipements modernes dont l'utilisation rationnelle a permis d'obtenir des résultats reproductibles. Les expériences ont été réalisées dans un laboratoire spécialement équipé situé à l'écart des voies de transport. La partie sensible de l'appareil se trouvait dans une cave, dans une obscurité complète, où la température était maintenue rigoureusement constante et aucun courant d'air ne pouvait apparaître. C'est dans cette cave qu'étaient disposés trois systèmes de bobines mutuellement rectangulaires de centre commun que l'on utilisait pour compenser et contrôler les différentes composantes du champ magnétique terrestre. L'observateur se trouvait à l'étage au-dessus et notait les indications des appareils de mesure à distance. Les bobines étaient en fils de cuivre et d'aluminium. La valeur mesurée moyenne de la charge spécifique e/m ne différait de la valeur universellement adoptée que de 0,2 %.

§ 98. L'effet Hall

1. En se fondant sur le modèle des électrons libres (cf. § 42) la densité du courant électrique peut être exprimée en termes de leur concentration n et de leur mobilité :

$$j = enbE. \tag{98.1}$$

Cette formule resterait valable si les porteurs de courant portaient des charges positives ($e > 0$). Dans ce dernier cas le courant j serait dirigé dans le sens du champ E ; dans le cas où $e < 0$ le courant est dirigé en sens inverse du champ E. Pour pouvoir déterminer les grandeurs n et b on doit disposer d'une deuxième équation. Pour l'obtenir on peut mettre à profit l'*effet Hall* (1855-1938).

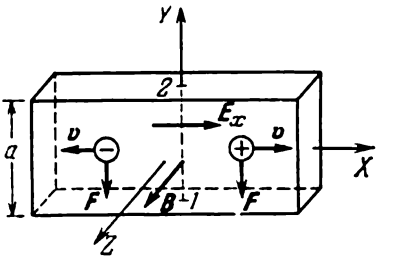


Fig. 235

Soit une plaque métallique de faible épaisseur et de grande longueur parcourue par un courant continu de densité j. Prenons la direction du courant pour axe X (fig. 235). Appliquons un champ magnétique permanent uniforme B perpendiculairement au plan de la plaque et dirigé suivant l'axe Z. Si les porteurs de courant sont des particules positives, elles se déplaceront dans le sens du courant, i.e. de gauche à droite, et la force de Lorentz $\frac{e}{c}[vB]$ les fera dévier suivant la verticale descendante. Le bord inférieur de la plaque acquiert ainsi une charge positive et le bord supérieur une charge négative. Le champ électrique E_y qui en résulte s'opposera aux déviations des trajectoires déterminées par le champ magnétique. L'accumulation des charges sur les bords supérieur et inférieur de la plaque se poursuivra jusqu'à ce que cesse l'écoulement transversal des charges. A partir de cet instant, il apparaît transversalement à la plaque, entre les points 1 et 2, une différence de potentiel positive $V_1 - V_2$. Si les porteurs de courant étaient des particules négatives, elles se déplaceraient avec le courant de droite à gauche. La force de Lorentz $F = \frac{e}{c}[vB]$ fera dévier ces particules suivant la verticale descendante, mais le bord inférieur de la plaque acquerra maintenant une charge négative et le bord supérieur une charge positive. La différence de potentiel transversale $V_1 - V_2$ sera dans ce cas négative. L'apparition d'une différence de potentiel transversale en présence d'un champ magnétique a été observée par Hall en 1879 et cet effet est connu sous le nom d'*effet Hall*.

2. Faisons un calcul approché de la différence de potentiel $V_1 - V_2$ en se fondant sur le modèle des électrons libres. Entre les colli-

sions successives l'équation de mouvement des particules est

$$m\dot{v} = e\left(E + \frac{1}{c}[vB]\right),$$

et sous forme analytique

$$m\dot{v}_x = e\left(E_x + \frac{1}{c}v_yB\right),$$

$$m\dot{v}_y = e\left(E_y - \frac{1}{c}v_xB\right),$$

$$m\dot{v}_z = 0.$$

Posons que le champ magnétique B est faible. On peut alors considérer que le champ électrique transversal E_y et tous les termes contenant le champ magnétique B figurant dans les équations ci-dessus sont de petites corrections à la force principale eE_x. La résolution des équations se fait commodément par la méthode des approximations successives. Dans l'approximation d'ordre zéro nous ne conserverons que le terme principal eE_x, ce qui donne

$$v_x = v_{0x} + \frac{e}{m}E_xt,$$

où v_0 est la vitesse de la particule immédiatement après sa dernière collision. En portant cette expression dans la deuxième équation, nous obtenons l'équation de première approximation

$$m\dot{v}_y = e\left(E_y - \frac{v_{0x}}{c}B - \frac{eB}{mc}E_xt\right),$$

d'où

$$v_y = \frac{e}{m}\left(E_yt - \frac{v_{0x}}{c}Bt - \frac{eB}{2mc}E_xt^2\right).$$

En notant τ la durée de libre parcours, la valeur moyenne de v_y entre deux collisions successives est donnée par

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau v_y\,dt = \frac{e}{2m}\left(E_y\tau - \frac{v_{0x}B}{c}\tau - \frac{eBE_x}{3mc}\overline{\tau^2}\right).$$

On doit soumettre cette expression à un deuxième moyennage par rapport à toutes les collisions, ou ce qui revient au même, par rapport à toutes les particules. En reprenant l'hypothèse déjà utilisée au § 42, selon laquelle après chaque collision toutes les directions de v_0 sont équiprobables, le moyennage rend nulle la quantité $v_{0x}\tau$, de sorte que la valeur moyenne de la vitesse v_y sur toutes les particules sera égale à

$$\overline{v}_y = \frac{e}{2m}\left(E_y\overline{\tau} - \frac{eB}{3mc}E_x\overline{\tau^2}\right).$$

En régime permanent $\bar{v}_y = 0$ et par suite

$$E_y = \frac{eB}{3mc} \frac{\overline{\tau^2}}{\bar{\tau}} E_x.$$

Eliminons $E_x \overline{\tau^2}/\bar{\tau}$ en utilisant la formule (cf. § 42)

$$j = \frac{ne^2}{2m} \frac{\overline{\tau^2}}{\bar{\tau}} E_x.$$

On obtient alors

$$E_y = RjB, \tag{98.2}$$

où

$$R = \frac{2}{3} \frac{1}{nec} \tag{98.3}$$

est le *coefficient de Hall.*

Comme les hypothèses que nous avons utilisées pour arriver à ces formules ne sont pas tout à fait correctes, on peut rejeter le facteur 2/3. On obtient ainsi une formule d'estimation simple

$$R = \frac{1}{nec} \text{*)}. \tag{98.4}$$

La différence de potentiel transversale $V_1 - V_2$ due à l'application du champ magnétique est donnée par

$$V_1 - V_2 = RjBa, \tag{98.6}$$

où a est la largeur de la plaque. C'est une dépendance de ce type que trouva Hall.

La condition d'un champ magnétique faible, que nous avons utilisée dans nos calculs, se ramène à exiger que le champ électrique transversal E_y soit petit devant le champ longitudinal E_x, i.e. $RjB \ll E_x$. A l'aide des expressions de R et de j, cette condition s'écrit

$$\Omega\bar{\tau} \ll 1, \tag{98.7}$$

où $\Omega = |eB/(mc)|$ est la fréquence de cyclotron. On en déduit que le temps $\bar{\tau}$ doit être petit devant la période de cyclotron $T = 2\pi/\Omega$.

3. On procède généralement à la mesure du coefficient de Hall par une *méthode de compensation.* On applique deux contacts aux points *1* et *2* de la plaque en matériau étudié parcourue par un

---

*) Des calculs plus corrects fondés sur l'équation cinétique de Boltzmann et la statistique classique conduisent à la formule

$$R = \frac{3\pi}{8nec} \tag{98.5}$$

qui ne diffère que fort peu de (98.3) et (98.4). Si on applique aux électrons dans le métal la statistique de Fermi-Dirac, on retrouve la formule (98.4).

courant électrique (fig. 236). On branche en série un galvanomètre et un compensateur C qui crée une tension opposée à la tension de Hall. En faisant varier cette tension, on cherche à annuler le courant passant par le galvanomètre et on détermine la différence de potentiel de Hall entre les points *1* et *2* par lecture de la tension indiquée par le compensateur.

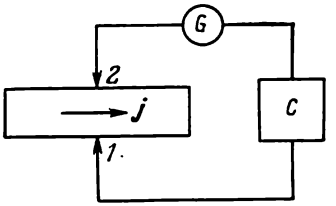


Fig. 236

Dans la plupart des tableaux on indique au lieu de la valeur de R celle de c^2R (c'est la valeur du coefficient de Hall dans le système électromagnétique d'unités de mesure).

A l'aide des données du tableau 5 on démontre facilement que la tension de Hall $V_1 - V_2$ est très petite. Prenons par exemple une bande d'or d'épaisseur $h = 0{,}1$ mm parcourue par un courant $\mathcal{J} = 10$ A. Si $B = 10^4$ G, la formule (98.6) donne

$$V_1 - V_2 = R\frac{\mathcal{J}}{ah}Ba = \frac{R\mathcal{J}B}{h} = \frac{c^2RB\mathcal{J}/c}{hc}.$$

Pour obtenir le résultat en unités pratiques il suffit de le multiplier par 300:

$$V_1 - V_2 = \frac{c^2RB\mathcal{J}/c}{10^8h} = -\frac{0{,}736\cdot10^{-3}\cdot10^4\cdot1}{10^8\cdot10^{-2}} \approx 7\mu\text{V}.$$

Connaissant R on peut calculer la concentration n des électrons de conduction, ainsi que le nombre z de ces électrons revenant à un atome du métal considéré. Le nombre d'atomes par unité de volume est donné par $n_{\text{at}} = N\rho/A$, où N est le nombre d'Avogadro, ρ la densité du métal et A son poids atomique. On trouve z en divisant la concentration n par n_{at}. Compte tenu de (98.5) on trouve

$$z = \frac{A}{Rc\rho F} = \frac{A}{Rc^2\rho F/c}, \tag{98.8}$$

où F est le nombre de Faraday donné dans le système gaussien. En le divisant par c on trouve sa valeur dans le système électromagné-

Tableau 5

Valeurs de c^2R pour certains métaux données dans le système gaussien

Métal	$c^2R\cdot10^3$	A	ρ	z selon (98.8)	Métal	$c^2R\cdot10^3$	A	ρ	z selon (98.8)
Li	—1,70	7	0,53	0,83	Au	—0,736	197	19,3	1,43
Na	—2,50	23	0,97	0,98	Al	—0,343	27	2,7	3,0
Cu	—0,609	63,6	8,9	1,2	Pt	—0,230	195	21,5	4,1
Ag	—0,944	108	10,5	1,13					

tique: $F/c = 9650$. Les valeurs indiquées dans la dernière colonne du tableau 5 ont été obtenues à l'aide de la formule (98.8). Connaissant n et la conductivité électrique du métal, on peut calculer par la formule (98.1) la mobilité b. Pour les métaux dits normaux la valeur de b est comprise entre $\sim$ 5 et 50 $cm^2/(s \cdot V)$. Des valeurs aussi petites témoignent de ce que dans les métaux les électrons subissent un grand nombre de collisions avec le réseau cristallin.

Pour les éléments du premier groupe du système périodique z est approximativement égal à 1, i.e. au nombre d'électrons de valence. On retrouve ce même résultat pour l'aluminium ($z \approx 3$). Outre les métaux normaux dont le coefficient de Hall est négatif, avec $c^2R \sim \sim 10^{-3}$ à 10^{-4}, on connaît des métaux présentant des *propriétés anomales*. Le coefficient de Hall du bismuth et de tous les métaux du cinquième groupe du système périodique est anomalement grand (pour le bismuth il est environ 10^4 fois plus grand que pour les métaux normaux) et varie fortement avec la température. Le coefficient de Hall des ferromagnétiques est 10 à 100 fois plus grand que chez les métaux normaux et dépend de l'intensité du champ magnétique. Ce qui est surtout remarquable c'est que le coefficient de Hall peut être positif et négatif. Il est négatif pour les métaux alcalins, Cu, Ag, Au, Mg, Ca, Hg, Al, Ga, In, Ti, Mn, Ni, Sn, Pd, Bi, Pt, et positif pour Be, Zn, Cd, Tl, V, Cr, Fe, Co, Pb, Mo, Ru, As, Sb, Ta, W, Re, Ir. Dans ce dernier cas tout se passe comme si les porteurs de courant étaient des particules positives ($e > 0$) et non pas négatives ($e < 0$). Cette conclusion ne se trouve cependant pas confirmée par nos connaissances sur la nature des métaux. Ce fait constitua pendant longtemps une des difficultés majeures de la théorie électronique des métaux qui ne fut levée que par la théorie quantique (cf. § 100).

§ 99. Application aux métaux de la statistique de Fermi-Dirac

1. Nous avons signalé au § 42 que la théorie de Drude qui traitait les électrons dans les métaux comme des particules d'un gaz parfait s'est heurtée à des difficultés dans la question de la capacité calorifique du gaz électronique. Ces difficultés furent levées en 1928 par Sommerfeld (1868-1951) qui tout en conservant le modèle des électrons libres, leur appliqua à la place de la statistique classique la statistique de Fermi-Dirac (cf. t. II, § 82).

A la différence de la statistique classique, la statistique quantique tient compte de ce qu'une particule ou un système de particules exécutant des mouvements finis dans un champ de forces donné, ne peut se trouver que dans des *états quantiques* bien déterminés auxquels correspondent des valeurs déterminées de l'énergie. Ces valeurs sont appelées *niveaux d'énergie* du système. Pour des mouvements finis, les niveaux d'énergie sont discrets, i.e. sont séparés les

uns des autres par des intervalles finis. Dans le modèle du gaz électronique parfait le caractère fini et la quantification du mouvement résultent de grandes forces de répulsion s'exerçant sur les électrons près de la surface du corps. Ces forces jouent le rôle de *parois imperméables* vis-à-vis du gaz électronique qui ne peut s'échapper du volume qu'il occupe. En l'absence de ces « parois », le mouvement des électrons aurait été infini et non quantifié.

Lorsqu'on utilise la statistique de Fermi-Dirac qui régit le comportement du gaz électronique, on doit tenir compte du *principe de Pauli* selon lequel chaque état quantique ne peut être occupé que

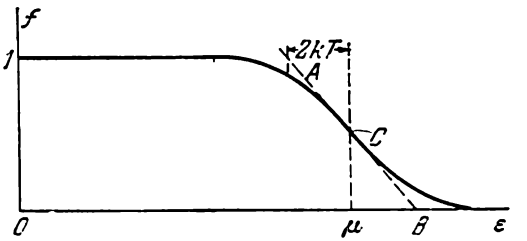


Fig. 237

par un seul électron. Le fait que le principe de Pauli soit vérifié signifie que des interactions se manifestent même entre des électrons « libres », de sorte qu'ils ne sont pas absolument indépendants. Mais ces interactions ne sont pas dues à des forces et c'est un effet purement quantique, totalement étranger aux conceptions classiques.

Compte tenu de ces différentes remarques, le nombre moyen f d'électrons occupant un état quantique est donné par l'expression

$$f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}, \tag{99.1}$$

où ε est l'énergie cinétique de l'électron dans l'état quantique considéré et μ une constante (potentiel chimique de l'électron). L'allure de la fonction f est représentée en trait plein sur la figure 237.

2. Pour pouvoir appliquer la formule (99.1) à des cas concrets, il faut connaître le nombre d'états quantiques pouvant être occupés par l'électron. La réponse à cette question est donnée par la mécanique quantique. Nous l'exposerons ici sans aucune justification. Introduisons d'abord l'*espace des phases* de l'électron, i.e. un espace à six dimensions où on porte sur les axes de coordonnées les coordonnées spatiales rectangulaires x, y, z et les projections correspondantes p_x, p_y, p_z des impulsions de l'électron. L'impulsion de l'électron est liée à son énergie cinétique ε par la relation $\varepsilon = p^2/(2m)$. Soit V

le volume qu'occupe le gaz électronique ; posons que l'impulsion de l'électron peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et p. Le volume de l'espace des phases correspondant est défini par l'expression $\Omega = \frac{4\pi}{3} p^2 V$. Introduisons encore des cellules de phase ayant chacune un volume de phase égal à h^3. Dans la région considérée de l'espace des phases il y aura Ω/h^3 cellules de phase. Si l'électron ne possédait pas de spin, selon la mécanique quantique le nombre d'états quantiques de l'électron aurait été donné par cette même expression. Mais comme l'électron est doué de spin, on doit multiplier par deux cette expression chaque cellule pouvant contenir deux électrons de spins opposés. Dans ce qui suit nous poserons $V = 1$ et le nombre d'états quantiques d'impulsions comprises entre 0 et p sera donné par l'expression

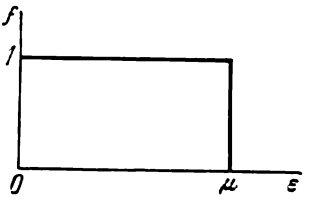


Fig. 238

$$Z = 2\frac{\Omega}{h^3} = \frac{8\pi}{3h^3} p^3. \tag{99.2}$$

Le nombre d'états quantiques dont les impulsions sont comprises entre p et $p + dp$ est

$$dZ = \frac{8\pi p^2}{h^3} dp, \tag{99.3}$$

et le nombre d'états dont l'énergie cinétique est comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ est

$$dZ = \frac{4\pi}{h^3} (2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon. \tag{99.4}$$

3. Les calculs fondés sur la formule (99.1) sont laborieux quoique simples en principe. Le cas qui présente le plus d'intérêt est celui du gaz électronique *dégénéré*, i.e. se trouvant à une température proche du zéro absolu. Considérons d'abord le cas d'une dégénérescence complète à $T = 0$. Dans ce cas la fonction de distribution (99.1) devient

$$f = \begin{cases} 1, & \text{pour } \varepsilon < \mu, \\ 1/2, & \text{pour } \varepsilon = \mu, \\ 0, & \text{pour } \varepsilon > \mu. \end{cases}$$

Cette fonction est représentée sur la figure 238. La plus grande énergie que peut posséder un électron est $\varepsilon_{max} = \mu$ et sa plus grande impulsion est $p_{max} = \sqrt{2m\mu}$. La grandeur μ est appelée *énergie* ou *niveau de Fermi*. Le nombre d'électrons contenus dans l'unité de volume

étant

$$n = Z_{\max} \frac{8\pi}{3h^3} p^3_{\max} = \frac{8\pi}{3h^3} (2m\mu)^{3/2}, \tag{99.5}$$

on en tire

$$\mu = \varepsilon_{\max} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}. \tag{99.6}$$

L'énergie totale du gaz électronique est

$$\mathscr{E} = \int \varepsilon \, dZ = \frac{3n}{2} \mu^{-3/2} \int_0^\mu \varepsilon^{3/2} \, d\varepsilon = \frac{3}{5} \mu n,$$

et l'énergie moyenne revenant à un électron est

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{5} \mu = \frac{3h^2}{4m} \left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}. \tag{99.7}$$

La grandeur

$$T_g = \frac{\bar{\varepsilon}}{k} = \frac{3h^2}{40mk} \left(\frac{3h}{\pi}\right)^{2/3} \tag{99.8}$$

a les dimensions de la température et s'appelle *température de dégénérescence du gaz électronique*. Le gaz électronique est considéré comme dégénéré si sa température $T < T_g$. La dégénérescence est forte si $T \ll T_g$.

La pression du gaz électronique est

$$\mathscr{P} = \frac{2}{3} n\bar{\varepsilon} = \frac{h^2 n}{20m} \left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}. \tag{99.9}$$

En posant pour le cuivre (cf. tabl. 5. p. 462) $n = 10^{22}$ cm^{-3} ces formules donnent: $T_g \approx 5 \cdot 10^4$ K, $\mathscr{P} \approx 5 \cdot 10^4$ atm. Pour tous les métaux la température de dégénérescence T_g est beaucoup plus grande que la température de fusion. Les valeurs numériques obtenues témoignent de la petitesse de l'énergie cinétique du mouvement thermique des électrons d'un métal devant l'énergie de zéro, i.e. l'énergie que possèdent les électrons au zéro absolu. Pratiquement tous les électrons de conduction de tous les métaux sont dans un état de forte dégénérescence.

4. Passons du cas d'un gaz électronique totalement dégénéré à celui d'un gaz *fortement dégénéré*. Dans ce cas presque tous les états quantiques se trouvant au-dessous du niveau de Fermi pour lesquels $\mu - \varepsilon \gg kT$ sont occupés par des électrons, comme c'est le cas au zéro absolu. Les états quantiques adjacents au niveau de Fermi font exception et la répartition de Fermi en forme de « marche » caractéristique du comportement au zéro absolu est perturbée par l'agitation thermique des électrons pour lesquels $\varepsilon - \mu \sim kT$. Ces électrons peuvent aller se loger de part et d'autre du niveau de Fermi et à l'état d'équilibre statistique les nombres moyens de transitions directes et inverses sont égaux. Seuls ces électrons parti-

cipent aux mouvements d'agitation thermique et ce sont ces électrons qui déterminent la capacité calorifique du gaz électronique des métaux.

Exprimons la concentration et l'énergie cinétique du gaz électronique en fonction de l'énergie de Fermi μ. Pour ce faire, on doit calculer les deux intégrales:

$$n = \int f dZ \text{ et } \mathscr{E} = \int \varepsilon f dZ,$$

l'intégration étant étendue à toutes les valeurs de l'impulsion p ou de l'énergie ε. Comme le calcul exact de ces deux intégrales est très laborieux et fait appel à des artifices de calcul, nous simplifierons le problème de la façon suivante. Faisons passer par le point C une tangente AB à la courbe de distribution (cf. fig. 237) et remplaçons par cette tangente une partie de la courbe. Cela signifie que nous approximons la distribution de Fermi par la fonction

$$f = \begin{cases} 1, & \text{pour } \varepsilon < \mu - 2kT, \\ \frac{1}{2} + \frac{\mu - \varepsilon}{4kT}, & \text{pour } \mu - 2kT < \varepsilon < \mu + 2kT, \\ 0, & \text{pour } \mu + 2kT < \varepsilon. \end{cases}$$

On aura alors

$$n = \frac{3}{2} Z_{\max} \mu^{-3/2} \int_0^{\mu - 2kT} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon + \\ + \frac{3}{2} Z_{\max} \mu^{-3/2} \int_{\mu - 2kT}^{\mu + 2kT} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu - \varepsilon}{4kT} \right) \varepsilon^{1/2} d\varepsilon,$$

où $Z_{\max}$ est défini par (99.5). En prenant la première intégrale et en remarquant que $kT \ll \mu$, on développe le résultat obtenu à l'aide de la formule du binôme. En arrêtant le développement aux termes de la puissance deux en kT/μ, on trouve

$$\int \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \frac{2}{3} \mu^{3/2} \left(1 - \frac{2kT}{\mu}\right)^{3/2} \approx \frac{2}{3} \mu^{3/2} \left(1 - \frac{3kT}{\mu} + \frac{3}{2} \frac{k^2T^2}{\mu^2}\right).$$

Dans la deuxième intégrale on procède à un changement de variable: $(\varepsilon - \mu)/(2kT) = x$, ce qui donne

$$\varepsilon^{1/2} = \mu^{1/2} \left(1 + \frac{2kTx}{\mu}\right)^{1/2} = \mu^{1/2} \left(1 + \frac{kTx}{\mu}\right),$$

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu - \varepsilon}{4kT}\right) \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \\ = kT\mu^{1/2} \int_{-1}^{+1} (1 - x) \left(1 + \frac{kT}{\mu} x\right) dx = 2kT\mu^{1/2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{kT}{\mu}\right).$$

On obtient ainsi

$$n = Z_{\max}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{k^2T^2}{\mu^2}\right). \tag{99.10}$$

On trouve par le même procédé

$$\mathscr{E} = \frac{3}{5}\mu Z_{\max}\left(1 + \frac{5}{2}\frac{k^2T^2}{\mu^2}\right). \tag{99.11}$$

L'énergie moyenne revenant à un électron est

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\mathscr{E}}{n} = \frac{3}{5}\mu\left(1 + 2\frac{k^2T^2}{\mu^2}\right), \tag{99.12}$$

la capacité calorifique est

$$c_v = \frac{\partial\bar{\varepsilon}}{\partial T} = \frac{12}{5}\frac{k^2}{\mu}T. \tag{99.13}$$

Comme pour tous les métaux aux températures inférieures aux points de fusion $kT/\mu \ll 1$, on trouve une valeur de c_v petite devant k. Ainsi se trouvent levées les difficultés auxquelles s'était heurtée la théorie classique dans la question de la capacité calorifique des électrons dans les métaux.

5. Utilisons maintenant la théorie de Sommerfeld pour établir la loi de Wiedemann et Franz. Nous ferons appel à la formule (42.24) en remarquant que dans les métaux le transport de chaleur est assuré uniquement par les électrons se trouvant près du niveau de Fermi et dont l'énergie cinétique moyenne est $1/2\ m\bar{v}^2 = \mu$. En portant (99.13) dans (42.26) nous obtenons

$$\frac{\gamma}{\lambda} = \frac{16}{5}\left(\frac{k}{e}\right)^2 T. \tag{99.14}$$

Le facteur numérique $16/5 = 3{,}2$ est pratiquement égal au facteur $^1/_3\pi^2 = 3{,}29$ que Sommerfeld trouva par des calculs rigoureux et très proche du facteur 3 de la théorie classique élémentaire de Drude. La théorie classique qui aboutissait à un résultat final pratiquement correct (42.27) l'interprétait improprement. Elle affirmait que χ/λ était proportionnel à T parce que l'énergie cinétique moyenne de l'électron étant égale à $3/2\ kT$ était proportionnelle à la température absolue. En réalité la loi de Wiedemann-Franz (99.14) se justifie par le fait que c'est la *capacité calorifique de l'électron* qui est proportionnelle à la température absolue. La théorie classique attribuant à la capacité calorifique du gaz électronique une valeur trop grande était en erreur, mais cette erreur était fortuitement compensée par une autre. La vitesse des électrons transportant la chaleur est définie par l'énergie cinétique qu'ils possèdent *à proximité du niveau de*

Fermi, tandis que la théorie classique posait que cette vitesse était de l'ordre de la vitesse classique moyenne du mouvement thermique $\sqrt{kT/m}$. Ainsi cette théorie adoptait pour la vitesse une valeur trop petite et c'est ainsi que le résultat final (42.27) se trouvait être correct.

6. Malgré tous ses succès, la théorie de Sommerfeld comportait des imperfections notables. Dans cette théorie on tenait compte des interactions des électrons avec les ions du réseau cristallin de la même façon qu'en théorie classique, i.e. à l'aide de la longueur de libre parcours de l'électron $\bar{l}$ introduite de façon purement *formelle*. La théorie de Sommerfeld ne cherchait pas à savoir quelle était l'origine de la longueur $\bar{l}$ et comment elle variait avec la température T. La théorie classique posait, sans raisons valables d'ailleurs, que les processus de collision des électrons avec les ions du réseau étaient analogues aux chocs de billes rigides et $\bar{l}$ était alors indépendant de la température. En vertu de la formule (42.25) on pourrait donc s'attendre à ce que $\lambda \sim \frac{1}{T}$. Si on postulait dans la théorie de Sommerfeld que $\bar{l}$ serait indépendant de T, on devrait en conclure que λ serait indépendant de T. En réalité ces conclusions ne sont pas confirmées par l'expérience. Pour la majorité des métaux purs, aux températures pas trop basses λ varie en raison inverse de T : $\lambda \sim 1/T$.

On n'arrive à trancher cette question qu'en étudiant, à l'aide des équations de la mécanique quantique, le mouvement de l'électron, *compte tenu de ses interactions avec le réseau cristallin*. Le principal résultat d'une telle étude se laisse interpréter qualitativement sans faire de calculs. Selon la mécanique quantique le mouvement de l'électron est assimilé à la propagation d'une certaine onde dans l'espace. Dans un milieu parfaitement transparent et homogène par exemple, une onde lumineuse se propage sans subir d'affaiblissement et de dispersion. Une onde électronique se comporterait de même si elle se propageait dans un réseau cristallin idéal. Dans ce cas le métal n'opposerait aucune résistance au passage du courant électrique. En fait tout réseau cristallin réel comporte des impuretés et est le siège de fluctuations thermiques qui perturbent le réseau idéal. En conséquence une onde électronique se propage dans le réseau cristallin non seulement suivant une direction rectiligne, mais subit des dispersions en tous sens, comme une onde lumineuse se propageant dans un milieu trouble. L'intensité de l'onde s'affaiblit suivant une loi exponentielle, i.e. $\sim \exp(-x/\bar{l})$, où $\bar{l}$ est une constante jouant le rôle de longueur de libre parcours de l'électron (cf. t. II, § 88). On peut exprimer la longueur totale de libre parcours de l'électron $\bar{l}$ par la formule

$$\frac{1}{\bar{l}} = \frac{1}{\bar{l}_{\text{fl}}} + \frac{1}{\bar{l}_{\text{imp}}}, \tag{99.15}$$

où le premier terme à droite tient compte des fluctuations thermiques et le second de la présence d'impuretés. La quantité $\overline{l}_{\text{imp}}$ ne dépend pas de la température, tandis que pour $\overline{l}_{fl}$ le calcul donne pour les températures ordinaires $\overline{l}_{fl} \sim T^{-1}$. En conséquence de ce résultat et de la formule (42.25) on obtient pour la résistivité la relation suivante:

$$\rho \equiv \frac{1}{\lambda} = \alpha T + \rho_0, \tag{99.16}$$

où α et ρ_0 sont des constantes. Pour des métaux purs $\rho_0 = 0$, $\rho \sim T$. Aux basses températures (supérieures cependant aux températures critiques de transition à l'état supraconducteur) la théorie fournit pour des métaux purs $\rho \sim T^5$, résultat conforme aux données expérimentales.

7. Pour conclure ce paragraphe il nous reste à considérer le paramagnétisme du gaz électronique (cf. § 77, pt. 9) dont la théorie est due à Pauli. Supposons que le gaz électronique soit complètement dégénéré. Dans un champ magnétique extérieur le spin de l'électron peut s'orienter suivant le champ ou en sens opposé. A ces deux orientations correspondent deux valeurs différentes de l'énergie totale de l'électron: $\varepsilon - \mathfrak{M}H$ et $\varepsilon + \mathfrak{M}H$, où $\mathfrak{M} = eh/(4\pi mc)$ est le magnéton de Bohr et ε l'énergie cinétique de l'électron. La première orientation est la plus favorable puisqu'elle correspond à une énergie totale plus petite. La totalité du gaz électronique peut être considérée comme un mélange de deux gaz indépendants se distinguant l'un de l'autre par l'orientation des spins électroniques. Dans la distribution de Fermi on doit remplacer l'énergie cinétique ε par l'énergie totale $\varepsilon \mp \mathfrak{M}H$, ce qui conduit à remplacer la variable $\varepsilon - \mu$ par $\varepsilon - (\mu \mp \mathfrak{M}H)$. Par conséquent l'influence du champ magnétique se traduit par un déplacement du niveau de Fermi. Pour un gaz d'électrons dont tous les spins sont parallèles le niveau de Fermi est $\mu_1 = \mu + \mathfrak{M}H$ et pour une orientation antiparallèle des spins le niveau de Fermi est $\mu_2 = \mu - \mathfrak{M}H$. D'autre part, pour chacun de ces gaz on doit réduire de moitié le nombre d'états donnés par (99.2), i.e. remplacer Z par $Z/2$, puisque dans chacun de ces gaz il ne subsiste qu'une seule orientation des spins. Compte tenu de ces circonstances, la différence des concentrations des gaz s'exprime par

$$n_1 - n_2 = \frac{Z}{2}(\mu + \mathfrak{M}H) - \frac{Z}{2}(\mu - \mathfrak{M}H),$$

où l'indice 1 se rapporte à l'orientation parallèle et l'indice 2 à l'orientation antiparallèle des spins. En posant $\mathfrak{M}H \ll \mu$ on écrira

$$n_1 - n_2 = \mathfrak{M}H \frac{\partial Z}{\partial \mu}.$$

Le moment magnétique de l'unité de volume du gaz électronique est donc

$$I = \mathfrak{M}(n_1 - n_2) = \mathfrak{M}^2 \frac{\partial Z}{\partial \mu} H,$$

et sa susceptibilité magnétique est

$$\varkappa = \mathfrak{M}^2 \frac{\partial Z}{\partial \mu} = \mathfrak{M}^2 \frac{\partial n}{\partial \mu}.$$

D'après la formule (99.5) $n \sim \mu^{3/2}$ et par suite $dn/n = 3/2\, d\mu/\mu$. Par conséquent

$$\varkappa = \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{M}^2 n}{\mu}. \tag{99.17}$$

En y substituant l'expression de $\mathfrak{M}$ et en utilisant la formule (99.6) on obtient finalement

$$\varkappa = \left(\frac{3n}{\pi^4}\right)^{1/3} \frac{e^2}{4mc^2}. \tag{99.18}$$

Cette formule a été établie pour $T = 0$. L'influence de la température sur la susceptibilité magnétique du gaz électronique fortement dégénéré ne se traduit que par l'adjonction d'un petit terme correctif de l'ordre de $(kT/\mu)^2$ à l'effet principal exprimé par la formule (99.18). On peut donc dire que le paramagnétisme du gaz électronique est indépendant de la température. Dans la démonstration il n'a pas été tenu compte de l'influence que le champ magnétique exerce sur le mouvement des électrons. Si on en tient compte par les méthodes de la mécanique quantique, comme le fit L. D. Landau, la formule (99.18) doit être diminuée d'un tiers et sous cette forme elle cadre convenablement avec les données expérimentales obtenues avec les métaux alcalins sodium et potassium.

§ 100. Métaux et semiconducteurs

1. A la température ordinaire la conductivité λ des métaux est comprise entre $6 \cdot 10^3$ et $6 \cdot 10^5$ $\text{ohm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ environ. Les substances solides dont la conductivité est comprise entre 10^4 et 10^{-10} $\text{ohm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$ environ sont classées dans le groupe des *semiconducteurs*, et celles dont la conductivité est encore plus petite (de 10^{-10} à 10^{-20} $\text{ohm}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$) sont classées dans le groupe des *diélectriques* ou *isolants*. Dans les semiconducteurs et les diélectriques les porteurs de courant sont des électrons ou des ions. Dans ce dernier cas on dit qu'il s'agit d'électrolytes solides, car le passage du courant s'accompagne alors d'électrolyse. Il a été établi que la conduction électrolytique est caractéristique de nombreux sels anhydres ($NaNO_3$, KNO_3, $AgNO_3$, LiH, NaCl, CsCl, etc.) solides et fondus. Actuellement on ne considère comme semiconducteurs que les substances

dont la conduction est assurée par les *électrons*. Seuls ces semiconducteurs trouvent des applications techniques.

Sont des semiconducteurs de nombreux corps simples (carbone sous forme de graphite, bore, silicium, germanium, phosphore, arsenic, sélénium, étain gris, tellure, iode, etc.) et un très grand nombre d'alliages et de composés chimiques. Presque toutes les substances inorganiques qui nous entourent sont des semiconducteurs. En se plaçant à un point de vue purement empirique, la distinction qualitative entre métaux et semiconducteurs se traduit par une dépendance différente de leur conductivité avec la température. A mesure que la température baisse, la conductivité des métaux augmente et pour les métaux purs elle tend à devenir infinie à l'approche du zéro absolu. Par contre la conductivité des semiconducteurs diminue avec la température et à l'approche du zéro absolu les semiconducteurs deviennent pratiquement des isolants. A haute température la conductivité des semiconducteurs tend vers celle des métaux. Une telle allure de variation de la conductivité des métaux s'explique par ce que la concentration des porteurs de courant (électrons de conduction) y est pratiquement indépendante de la température, tandis que dans les semiconducteurs les porteurs de courant résultent de l'agitation thermique.

2. Tant qu'on se fonde sur le modèle du gaz d'électrons libres, on ne peut expliquer pourquoi certaines substances sont des métaux, d'autres des semiconducteurs ou des isolants. Pour donner une explication valable il est indispensable de tenir compte des interactions des atomes entre eux et avec les électrons. Imaginons que le réseau cristallin d'un métal ou d'un semiconducteur se forme par rapprochement mutuel des atomes isolés. Les électrons de la couche extérieure des atomes du métal dits électrons *de valence* sont attachés assez faiblement aux noyaux atomiques, tandis que les électrons de valence d'un semiconducteur y sont attachés beaucoup plus fortement. Lorsqu'on rapproche les atomes les uns des autres, ils entrent en interaction mutuelle, ce qui provoque la libération des électrons de valence qui, se détachant des atomes, deviennent des *électrons libres* pouvant se déplacer dans tout le corps métallique ; selon une expression imagée de Y. I. Frenkel, ces électrons sont *collectivisés*. La situation est tout autre dans les semiconducteurs où la liaison des électrons de valence avec les noyaux atomiques est beaucoup plus forte. Pour arracher un électron à un atome et le transformer en électron de conduction il faut lui communiquer une certaine énergie appelée *énergie d'ionisation*. Cette énergie est fournie par les vibrations thermiques des atomes du réseau ou par une autre source d'énergie, par exemple en irradiant le semiconducteur par des ondes électromagnétiques courtes ou par un flux de particules rapides, en le soumettant à un intense champ électrique, etc. Pour différents semiconducteurs l'énergie d'ionisation de l'électron de valence est com-

prise entre 0,1 et 2 eV, valeurs notablement plus grandes que celle de l'énergie cinétique moyenne du mouvement thermique des atomes, qui vaut $3/2\ kT \approx 0{,}04$ eV. Néanmoins l'agitation thermique suffit pour provoquer l'ionisation des atomes car du fait du caractère désordonné des mouvements thermiques, l'énergie cinétique instantanée d'un atome peut être plusieurs fois plus grande que sa valeur moyenne. Comme le nombre d'atomes possédant une énergie égale ou supérieure à l'énergie d'ionisation est relativement très petit, la concentration d'électrons libres résultant de l'ionisation des atomes du semiconducteur est petite. A mesure que la température du semiconducteur augmente, cette concentration croît, ce qui fait croître sa conductivité électrique. Il est évident que les processus d'*ionisation* s'accompagnent de processus inverses de *recombinaison* des électrons avec les atomes ionisés. A l'état d'équilibre les nombres moyens d'actes d'ionisation et de recombinaison sont égaux ; par suite la concentration d'*équilibre* des électrons libres prend une valeur bien déterminée dépendant de la température du semiconducteur.

3. Pour procéder à une étude plus poussée des processus qui se produisent dans les métaux et dans les semiconducteurs, il est nécessaire de connaître la structure des niveaux d'énergie pouvant être occupés par les électrons de valence. La figure 239, *a* représente de façon schématique les niveaux d'énergie de l'un des électrons de valence d'un atome isolé. Pour simplifier nous admettrons qu'ils sont *simples*, i.e. *non dégénérés*. Le niveau le plus bas ayant la plus petite énergie ε_1 est le niveau *fondamental* ou niveau *non excité*. Tous les autres niveaux sont des niveaux *excités*. Considérons N atomes identiques séparés par des distances suffisamment grandes pour pouvoir négliger complètement leurs interactions mutuelles. On obtient le système de niveaux d'énergie du même électron de valence que ci-dessus d'un système de N atomes n'interagissant pas entre eux, en reproduisant N fois le schéma de la figure 239, *a*, i.e. autant de fois qu'il y a d'atomes (fig. 239, *b*). Chaque niveau simple est alors transformé en un niveau de multiplicité N. Rapprochons les atomes les uns des autres jusqu'à ce qu'ils forment un réseau cristallin. Du fait des interactions mutuelles des atomes chacun des niveaux multiples se décompose en N niveaux simples (fig. 240). L'ensemble des niveaux résultant de l'éclatement d'un niveau multiple constituent une *bande d'énergie* du cristal. La bande qui résulte de l'éclatement du niveau fondamental dégénéré du multiplicité N est appelée *bande fondamentale* et toutes les autres bandes sont des *bandes de niveaux excités*. Comme N est très grand, les distances entre les niveaux d'une même bande sont très petites, de sorte qu'il suffit d'une très faible énergie pour faire passer l'électron d'un niveau à un niveau voisin d'une bande donnée. En ce sens les niveaux d'énergie de chaque bande se comportent pratiquement comme s'ils étaient

continus. Mais en règle générale les bandes adjacentes sont séparées les unes des autres par des intervalles d'énergie finis que l'on appelle *bandes interdites* pour la raison que l'énergie de l'électron ne peut prendre ces valeurs correspondant aux énergies de ces bandes. Les bandes correspondant aux valeurs de l'énergie que peuvent avoir les

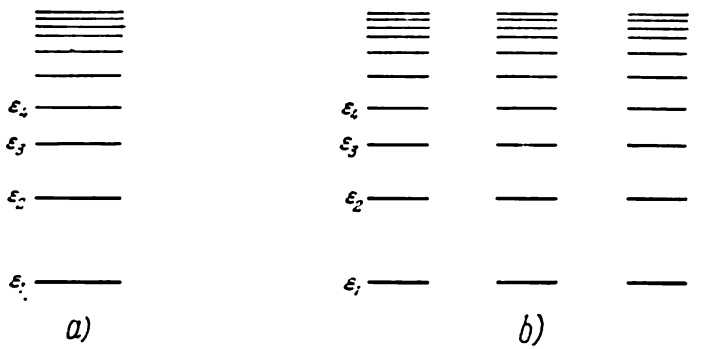


Fig. 239

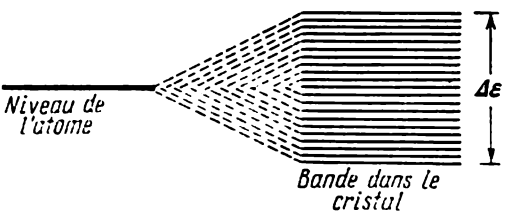


Fig. 240

électrons sont appelées *bandes permises.* Bien entendu on ne doit pas confondre les bandes d'énergie avec les bandes spatiales, i.e. les zones ou les régions de l'espace où l'électron peut se trouver.

Pour arriver à une interprétation correcte de ces considérations une remarque s'impose. On ne peut arriver à tenir compte d'une façon conséquente des interactions mutuelles des électrons et de leurs interactions avec les ions du réseau cristallin qu'en résolvant le « *problème de plusieurs corps* » pour des systèmes comportant un nombre énorme de particules. (Un centimètre cube de cuivre contient $\sim 10^{22}$ électrons de conduction!) En toute rigueur ce problème est insoluble. Pour arriver à une solution approchée on le simplifie grandement pour le ramener au « problème d'un seul corps ». La théorie du solide qui utilise cette approche simplifiée est appelée théorie des bandes. Dans cette théorie on admet que l'électron se meut dans un champ électrique continu créé par les ions et tous les

autres électrons. On pose que les ions sont fixes du fait de leurs masses relativement grandes et on ne tient compte que de l'ensemble des électrons. Tout se passe comme si on les remplaçait par un fluide électronique négativement chargé remplissant uniformément tout l'espace compris entre les ions. Dans ce modèle le rôle des électrons se réduit à assurer la compensation des charges positives des ions du réseau qui de ce fait devient *électriquement neutre*. Dans ce modèle le champ électrique est spatialement périodique, la période étant égale à la *période spatiale* du réseau cristallin. On aboutit ainsi au problème du mouvement d'un *seul* électron dans un champ électrique continu périodique. La résolution de ce problème par les méthodes de la mécanique quantique conduit à la même structure des bandes d'énergie que celle que nous avons décrite plus haut. Cette structure des bandes caractérise les états énergétiques d'*un seul électron* soumis à l'action du champ électrique périodique et continu du réseau cristallin.

4. Plaçons un corps dans un champ électrique continu dont l'intensité est très petite devant celle des champs intra-atomiques et intramoléculaires. Ce champ appliqué ne modifie pas le caractère général de la structure de bande. Le nombre de niveaux d'énergie dans une bande restera le même mais les niveaux changent de position puisque à l'énergie d'interaction de l'électron avec le réseau vient s'ajouter l'énergie potentielle de l'électron dans le champ électrique extérieur. Les électrons de la bande se comporteront différemment suivant qu'ils occupent la totalité des niveaux disponibles ou qu'il subsiste des niveaux vacants. Nous étudierons ces cas en supposant d'abord que le corps se trouve à la température du zéro absolu.

Considérons d'abord le cas où tous les niveaux d'énergie de la bande sont *occupés par des électrons*. Si l'occupation est complète en l'absence de champ extérieur, il en sera de même en présence d'un champ faible. En mécanique quantique on considère le mouvement de l'électron comme une *transition d'un état quantique dans un autre*. Cette transition n'est possible que si l'état quantique final est *vacant*, i.e. n'est pas occupé par un électron. Or, par hypothèse, tous les états quantiques de la bande sont occupés et aucune transition quantique ne peut avoir lieu. Par conséquent les électrons de la bande *ne peuvent* se comporter comme des porteurs de courant électrique.

Dans le second cas une *partie seulement* des niveaux disponibles sont *occupés par des électrons* et les autres niveaux sont vacants. En l'absence d'agitation thermique ou d'autres sources d'énergie pour les électrons ne seront occupés que les niveaux *de plus petite énergie*. Les niveaux de plus grandes énergies seront vacants. La même structure subsistera si on applique un champ électrique continu $\boldsymbol{E}$, mais il se produira un *déplacement* de tous les niveaux d'énergie. Les niveaux qui étaient les plus bas en l'absence de champ électrique peuvent ne plus l'être après application du champ et il apparaîtra

un nouveau système de niveaux inférieurs. Aussitôt les électrons qui occupaient les anciens niveaux commenceront à passer sur les nouveaux niveaux. Ces transitions s'accompagnent d'un déplacement spatial des électrons dans un sens contraire à celui du champ extérieur. Si les électrons ne peuvent s'échapper du corps, ce processus cessera bientôt, car les charges d'espace qui apparaissent créeront un champ qui, à l'intérieur du corps, compensera le champ extérieur. Mais si on évacue constamment les électrons déplacés (le corps fait partie d'un circuit fermé), les transitions quantiques se poursuivront

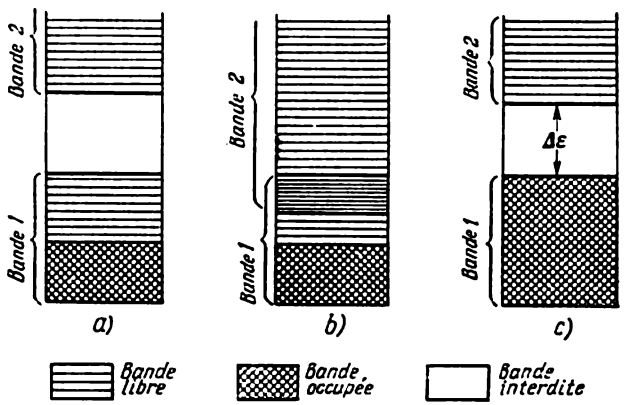


Fig. 241

sans discontinuer tant que le générateur de champ électrique fonctionnera dans le circuit. Ce sont ces transitions quantiques qui déterminent le passage d'un courant électrique dans le circuit. Ainsi, *pour qu'un courant électrique puisse circuler il faut que la bande d'énergie ne soit que partiellement occupée par des électrons.*

5. Dans les métaux la bande d'énergie fondamentale des électrons de valence peut être séparée de la bande supérieure des niveaux excités par une bande interdite de largeur finie (fig. 241, *a*). Dans d'autres cas la largeur de la bande interdite peut être nulle et la bande fondamentale est directement adjacente à la bande des états excités ou même la recouvre partiellement (fig. 241, *b*). Ce dernier cas se ramène au cas précédent puisque ces deux bandes peuvent être considérées comme une seule bande qui sera alors la bande fondamentale. Le caractère distinctif des métaux est que *la bande fondamentale est toujours partiellement occupée.* C'est pour cela que les métaux sont conducteurs d'électricité.

Dans les semiconducteurs la bande fondamentale est séparée de la bande des niveaux excités par un intervalle fini d'énergie $\Delta\varepsilon$ (fig. 241, *c*). Il est d'usage de désigner la bande fondamentale des semiconducteurs

sous le nom de *bande de valence* et la bande des niveaux excités sous celui de *bande de conduction. Au zéro absolu de température la bande de valence est totalement occupée par les électrons et la bande de conduction est totalement vide.* Par suite au zéro absolu les semiconducteurs ne sont pas conducteurs de courant électrique et se comportent donc comme des *isolants. Les isolants ne se distinguent des semiconducteurs que par une plus grande largeur de la bande interdite* $\Delta\varepsilon$. Tout conventionnellement on classe parmi les isolants tous les semiconducteurs ayant une largeur de bande interdite $\Delta\varepsilon$ supérieure à 2 eV environ. Il n'y a aucune distinction qualitative entre les semiconducteurs et les isolants ; la distinction entre ces deux groupes de solides est uniquement quantitative.

Lorsque la température du semiconducteur croît, les électrons commencent à échanger de l'énergie avec les ions du réseau cristallin. De ce fait tout électron peut acquérir une énergie cinétique supplémentaire de l'ordre de kT. Cette énergie peut être suffisante pour faire passer certains électrons de la bande de valence dans la bande de conduction. Dès qu'ils parviennent dans la bande de conduction, ces électrons assurent la conduction électrique. Mais il existe une autre cause encore de la conductibilité électrique. Les électrons excités dans la bande de conduction laissent derrière eux des états quantiques vacants que l'on appelle *trous*, dénomination regrettable d'ailleurs. Les trous sont aussi des porteurs de courant.

Lorsqu'un semiconducteur renferme des trous, ceux-ci peuvent recombiner avec les électrons, ce qui correspond à des transitions entre certains états quantiques et les états vacants, i.e. les trous. Les états quantiques qui avant transition étaient occupés deviennent vacants, i.e. se transforment en trous. Ces nouveaux trous peuvent à leur tour recombiner avec d'autres électrons en donnant naissance à de nouveaux trous, etc. Ces processus conduisent à une *concentration d'équilibre* bien déterminée des trous qui en l'absence de champ électrique sera la même dans tout le volume du semiconducteur. En présence d'un champ électrique extérieur la distribution des trous ne sera plus uniforme. Toute transition quantique d'un électron donnant lieu à son déplacement à l'encontre du champ électrique diminue l'énergie potentielle du système et toute transition qui donne lieu au déplacement de l'électron dans le sens du champ augmente l'énergie potentielle du système. Les transitions du premier type seront donc prédominantes et le semiconducteur sera parcouru par un courant électrique allant dans le sens du champ électrique appliqué E. Dans le cas d'un semiconducteur en circuit ouvert, le courant ne circule que jusqu'à ce que le champ électrique lié au déplacement des porteurs de courant compense exactement le champ extérieur E. Mais si on évacue continuellement les électrons en mouvement (semiconducteur en circuit fermé) le courant circule sans discontinuer. Le résultat final est le même comme si la conducti-

bilité était assurée non par des électrons mais par des trous qui sont des particules chargées positivement. Dans le cas des semiconducteurs on distingue la *conduction par électrons* et la *conduction par trous*.

Il est évident que dans les métaux et les semiconducteurs les *vrais porteurs de courant* sont toujours des *électrons réels* et non pas des trous que l'on a introduits dans la théorie tout formellement. En réalité il n'existe pas de particules chargées positivement que l'on appelle trous, mais la notion de trou est utile pour les raisons suivantes. On ne peut utiliser les lois classiques de mouvement des électrons que si leur concentration dans la bande considérée est *petite*. Les électrons de la bande de conduction satisfont à cette condition. Mais dans la bande de valence la situation est inverse, puisque là presque tous les états sont occupés et la concentration des trous y est petite. On ne peut donc appliquer aux électrons les lois classiques de mouvement. En appliquant aux électrons les conceptions de la mécanique quantique et en tenant compte que la *concentration des trous est petite*, on arrive à un résultat particulièrement simple. *En présence d'un champ électrique extérieur les trous se déplacent comme le feraient, selon les conceptions classiques, des particules chargées positivement* et ayant une masse déterminée. C'est ce résultat qui justifie pleinement l'introduction de la notion de trou. Remarquons encore que du fait que les concentrations sont petites *on peut appliquer la statistique de Boltzmann aux électrons de la bande de conduction et aux trous de la bande de valence.*

6. La conductibilité électrique des semiconducteurs assurée par les électrons et les trous, dont il a été question jusqu'ici, n'est pas liée à la présence d'impuretés dans le semiconducteur. Aussi l'appelle-t-on *conductibilité intrinsèque* pour la distinguer de la *conductibilité par impuretés* qui est directement liée à la présence d'atomes d'autres éléments chimiques dans un semiconducteur donné. La présence de très faibles quantités d'impuretés suffit pour augmenter très fortement la conductibilité du semiconducteur. Ainsi, en incorporant dans un cristal de silicium pur 0,001 de pour cent atomique de phosphore, on augmente la conductibilité de plus de cent mille fois. Dans les métaux la situation est inverse : l'addition d'impuretés provoque une diminution de la conductibilité électrique.

Ce comportement du semiconducteur tient à ce qu'en présence des impuretés des *niveaux d'énergie supplémentaires* apparaissent dans la bande interdite du semiconducteur. La figure 242, *a* donne une représentation schématique des bandes d'énergie d'un semiconducteur pur. Supposons que les impuretés font apparaître dans la bande interdite des niveaux supplémentaires près du bord inférieur de la bande de conduction (fig. 242, *b*). Les électrons occupant ces niveaux peuvent passer dans la bande de conduction. Si l'intervalle d'énergie $\Delta\varepsilon_1$ qui sépare ces niveaux de la bande de conduction est petit devant la largeur de la bande interdite $\Delta\varepsilon$, le nombre d'électrons

dans la bande de conduction et donc la conductibilité du cristal peuvent s'accroître de plusieurs ordres de grandeur. Les impuretés qui fournissent des électrons à la bande de conduction sont appelées *donneurs* et les niveaux supplémentaires qu'elles créent dans la bande interdite sont appelés *niveaux donneurs*.

Par exemple, les atomes d'arsenic incorporés dans le réseau cristallin du silicium se comportent comme des donneurs. Le silicium est un élément quadrivalent et l'arsenic est un élément pentavalent,

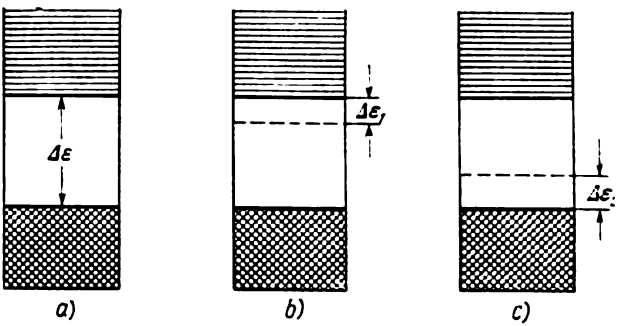


Fig. 242

ce qui signifie que la couche électronique extérieure de l'atome de silicium contient quatre électrons et celle de l'atome d'arsenic en contient cinq. Le cinquième électron de l'atome d'arsenic peut s'en détacher sous l'action de l'agitation thermique et l'ion arsenic chargé positivement peut alors se substituer à un atome de silicium du réseau cristallin. Ainsi un électron de conduction se trouve intercalé entre les nœuds du réseau.

Considérons maintenant le cas où l'incorporation d'atomes d'impuretés fait apparaître des niveaux supplémentaires dans la bande interdite près du bord supérieur de la bande de valence (fig. 242, *c*). Les électrons de la bande de valence peuvent alors venir occuper ces niveaux supplémentaires en laissant derrière eux des trous dans la bande de valence ; l'apparition de ces trous fait apparaître une conduction par trous. Ces impuretés sont appelées *accepteurs* et les niveaux qu'elles créent dans la bande interdite sont des *niveaux accepteurs*.

Par exemple, les atomes de bore ou d'un autre élément du groupe III du système périodique incorporés dans le réseau du silicium se comportent comme des accepteurs. La couche électronique périphérique de l'atome de bore ne comporte que trois électrons. L'atome de bore peut capter un quatrième électron en le ravissant à un atome de silicium occupant l'un des sites voisins. Dans ce site apparaît un

trou et l'ion bore négatif peut se substituer à un atome de silicium dans le réseau cristallin de ce dernier. C'est ainsi qu'apparaît dans le silicium une conductibilité par trous.

Pour savoir si un semiconducteur présente une conductibilité électronique ou par trous on aura recours à la détermination du signe de l'effet Hall. Les semiconducteurs dopés par un donneur sont appelés *semiconducteurs électroniques* ou *semiconducteurs de type n* (du mot négatif) et les semiconducteurs dopés par un accepteur sont appelés *semiconducteurs de type p* (du mot positif). On peut se trouver en présence de *semiconducteurs à conductibilité mixte* lorsqu'on y trouve comme porteurs de courant aussi bien des électrons que des trous. Les porteurs qui contribuent le plus au courant sont dits *majoritaires* et les autres sont dits *minoritaires*.

PROBLÈME

L'hydrogène solide est un diélectrique dont la densité à pression normale est égale à 0,076 g/cm³. Evaluer la densité de l'hydrogène solide pour laquelle il présenterait des propriétés métalliques. L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène est $\varepsilon_{\text{ion}} = 13{,}6$ eV $= 2{,}18 \cdot 10^{-11}$ erg.

Solution. La compression d'une substance provoque le relèvement du niveau de Fermi qui définit, pour une densité donnée de la substance, l'énergie cinétique maximale d'un électron libre. Lorsque l'énergie de Fermi μ devient égale à l'énergie d'ionisation ε_{ion} de l'atome, les atomes d'hydrogène s'ionisent. Les couches électroniques extérieures des atomes se décomposent, les électrons de valence se trouvent collectivisés et le diélectrique se métallise. Ainsi la concentration n des atomes de diélectrique pour laquelle ce dernier se métallise est donnée par la condition $\mu \sim \varepsilon_{\text{ion}}$. En déterminant n par la formule (99.6) et en multipliant le résultat par la masse m_{H} de l'atome d'hydrogène on obtient

$$\rho \approx \frac{\pi m_{\text{H}}}{3h^3} (8m\varepsilon_{\text{ion}})^{3/2} \approx 0{,}38 \text{ g/cm}^3.$$

§ 101. L'émission thermoïonique

1. Le fait que les « électrons libres » sont retenus à l'intérieur du métal témoigne de ce qu'il existe dans sa couche superficielle un champ électrique qui s'oppose à la sortie des électrons dans le vide ambiant. Pour pouvoir s'échapper du métal l'électron doit fournir un certain travail appelé *travail d'extraction*. Une des causes déterminant la production de ce travail est la suivante. Si à la suite de ses mouvements d'agitation thermique un électron s'échappait du métal, il induirait sur sa surface des charges de signe opposé, ce qui ferait apparaître des forces d'attraction entre l'électron et la surface du métal (c'est la *force d'image électrique*, cf. § 23) qui tendront à faire revenir l'électron dans le métal. Pour que l'électron puisse surmonter ces forces il faut fournir du travail. Une autre cause réside en ce que les électrons, à la faveur de leurs mouvement thermiques, peuvent traverser la surface du métal et s'en éloigner à très petite distance (de l'ordre de distances atomiques). Au-dessus de la surface

du métal s'établit une atmosphère d'électrons dont la densité diminue rapidement avec la distance. Au-dessous de cette atmosphère électronique il reste sur la surface du métal une couche d'ions positifs. Il se forme ainsi une *double couche électrique* qui se comporte à l'instar d'un condensateur, i.e. ne crée pas de champ électrique à l'extérieur. Mais pour surmonter le champ électrique à l'intérieur de la double couche il faut fournir du travail. Il existe probablement d'autres causes encore de l'existence du travail d'extraction, mais nous

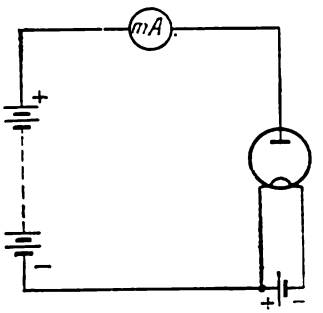


Fig. 243

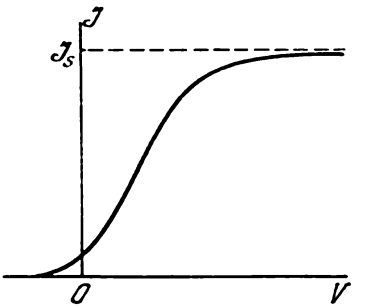


Fig. 244

n'approfondirons pas cette question et nous nous limiterons à tenir compte du travail d'extraction de façon phénoménologique.

2. Lorsque la température du métal augmente, l'énergie cinétique du mouvement thermique des électrons augmente près de la surface de Fermi et peut devenir tellement grande que certains électrons arriveront à surmonter le potentiel électrique de blocage à la surface du métal et s'échapper du métal. Si dans le vide ambiant il existe un champ électrique dirigé vers la surface du métal, ce champ entraînera les électrons sortants et le vide sera le siège d'un courant électrique. Ce courant est le courant thermoïonique et l'effet correspondant est l'effet d'*émission thermoïonique* qui fut découvert en 1883 par Edison (1847-1931).

On observe commodément l'émission thermoïonique à l'aide d'un tube à vide comportant deux électrodes que l'on appelle *diode à vide*. La cathode est constituée par un fil en métal réfractaire (tungstène, molybdène, etc.) qui est porté à incandescence par passage d'un courant électrique. L'anode est généralement un cylindre métallique entourant la cathode. Lorsqu'on branche la diode dans le circuit représenté sur la figure 243. aucun courant ne traversera le circuit tant que la cathode est froide. Mais si on porte la cathode à incandescence, le milliampèremètre enregistrera le passage d'un courant électrique. Si on inverse la polarité de la source de courant, aucun courant ne passera plus. Ce résultat démontre que dans le vide les porteurs de

courant sont des *particules chargées négativement*, notamment des *électrons*, puisque le passage du courant thermoïonique ne donne lieu à aucune transformation chimique à proximité des électrodes.

Si on fait varier la tension appliquée V entre l'anode et la cathode, tout en maintenant constante la température de la cathode incandescente, on constatera que le courant thermoïonique augmente (fig. 244), mais que cet accroissement du courant n'est pas proportionnel à V, ce qui signifie que la loi d'Ohm ne s'applique pas à la diode à vide. Lorsque la tension V atteint une certaine valeur, l'intensité du courant thermoïonique cesse de croître. On dit que le courant thermoïonique est arrivé à saturation ; la valeur limite $\mathcal{J}_s$ est le *courant de saturation*. L'existence d'un courant de saturation s'explique très simplement. Sa valeur est déterminée par le nombre d'électrons pouvant être émis dans l'unité de temps par la surface de la cathode. Si le champ électrique appliqué est tellement intense qu'il accélère tous les électrons émis, un nouvel accroissement de son intensité ne pourra plus augmenter l'intensité du courant thermoïonique. C'est ce qui explique l'existence du courant de saturation. La densité j_s du courant de saturation caractérise le *pouvoir émissif* du matériau de la cathode, i.e. le nombre maximal d'électrons pouvant être émis dans l'unité de temps par l'unité de surface de la cathode.

3. La densité du courant thermoïonique de saturation dépend du matériau de la cathode et croît avec la température. Pour calculer cette densité de courant nous utiliserons le modèle du gaz électronique parfait et nous lui appliquerons la statistique de Fermi-Dirac. Dans l'unité de volume de métal le nombre d'états quantiques d'impulsions électroniques $dp_x dp_y dp_z$ compris dans un élément de volume de l'espace des impulsions centré en (p_x, p_y, p_z) est $dZ = \frac{2}{h^3} dp_x dp_y dp_z$, où le facteur 2 tient compte des spins électroniques. La concentration moyenne d'électrons possédant ces valeurs de l'impulsion est

$$dn = \frac{2}{h^3} \frac{dp_x\, dp_y\, dp_z}{\exp\left\{\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right\} + 1}. \qquad (101.1)$$

Précisons la nature du travail d'extraction. Convenons de désigner par ce terme le travail b qu'il faut fournir à un électron appartenant au *niveau de Fermi* dans le matériau pour l'amener à l'état de repos dans le vide. L'énergie cinétique minimale que doit posséder l'électron sur le niveau de Fermi est : $\varepsilon_{\min} = \mu + b$. Seuls les électrons dont l'énergie cinétique sur le niveau de Fermi est plus grande que $\varepsilon_{\min}$, i.e. $\varepsilon > \mu + b$ pourront quitter le métal. Seuls ces électrons doivent être pris en compte dans le calcul du courant de saturation. Dans les calculs qui suivent nous ne considérerons que ces électrons-là.

Pour que le réseau cristallin ne se désagrège pas pendant l'émission d'électrons, seule une partie négligeable des électrons doit s'échapper du métal. Selon la formule (101.1) cela implique que $\varepsilon - \mu \gg kT$, i.e. $b \gg kT$. Pour ces électrons on peut négliger l'unité figurant dans le dénominateur de (101.1) et cette formule s'écrit alors

$$dn = \left(\frac{2}{h^3}\exp\left\{\frac{\mu}{kT}\right\}\right)\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{kT}\right\}dp_x\,dp_y\,dp_z. \qquad (101.2)$$

Calculons le nombre dn_z d'électrons dont la composante z de l'impulsion est comprise entre p_z et $p_z + dp_z$. Il suffit pour cela d'intégrer (101.2) sur p_x et p_y dans l'intervalle $-\infty$, $+\infty$. Comme $\varepsilon = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$, le résultat de l'intégration est

$$dn_z = \frac{4}{h^3}\pi mkT\exp\left\{-\frac{p_z^2/(2m)-\mu}{kT}\right\}dp_z. \qquad (101.3)$$

Le départ d'électrons du métal par émission thermoïonique perturbe dans une certaine mesure leur distribution d'équilibre en vitesses. Dans l'approximation d'ordre zéro on peut cependant ne pas en tenir compte. Le nombre d'électrons appartenant au groupe que nous venons de définir et tombant dans l'unité de temps sur l'unité de surface du métal est donné par l'intégrale $\int v_z dn_z = \frac{1}{m}\int p_z dn_z$ étendue à tous les électrons pour lesquels $p_z^2/(2m) \geqslant \mu + b$. Si nous posons que tous ces électrons s'échappent du métal, la densité du courant thermoïonique de saturation j_s s'obtient en multipliant l'intégrale précédente par la charge e de l'électron. Introduisons une nouvelle variable d'intégration

$$x = p_z^2/(2m) - \mu.$$

On aura alors

$$j_s = \frac{4\pi em}{h^3}(kT)^2\int_{b/(kT)}^{\infty} e^{-x}\,dx, \qquad (101.4)$$

et après intégration

$$j_s = AT^2e^{-b/(kT)}, \qquad (101.5)$$

la constante A étant définie par

$$A = \frac{4\pi mek^2}{h^3} = 120\ \mathrm{A/(cm^2\cdot K)}, \qquad (101.6)$$

donc *la même pour tous les métaux*. Ce dernier résultat tient à ce que nous avons fondé nos calculs sur le modèle du gaz électronique parfait. Dans ce modèle les propriétés individuelles des métaux sont caractérisées par deux paramètres seulement: le travail d'extraction b et l'énergie de Fermi μ. Or comme cette dernière ne figure

dans la formule (101.4) que comme terme additionnel de la variable d'intégration x, le résultat ne dépend pas de μ, n'étant déterminé que par le travail d'extraction b et la température T du métal.

En mesurant la densité j_s du courant thermoïonique on peut calculer par la formule (101.5) la valeur de la constante A et le travail d'extraction b.

4. La formule (101.5) fut initialement établie par Richardson (1879-1959) sur la base de considérations de thermodynamique et de certaines données empiriques. Une autre démonstration de cette formule où fut établi le caractère universel de la constante A est due à Dushman. C'est pour cela que la formule (101.5) est appelée *formule de Richardson-Dushman*. Comme à l'époque (1923) Dushman ne pouvait tenir compte du spin électronique, la valeur de sa constante universelle A est deux fois plus petite qu'il ne convient puisque l'existence du spin double le nombre d'états quantiques permis pour l'électron. Le résultat de Dushman fut confirmé à quelques pour cent près par des expériences où on utilisait des métaux réfractaires, molybdène et tungstène, particulièrement bien adaptés à la vérification expérimentale de la formule (101.5). Il est curieux de constater que la prise en compte du spin électronique rendait moins bon l'accord entre théorie et expérience. Ce fait peut être déjà interprété dans le cadre du modèle du gaz électronique parfait par une étude quanto-mécanique conséquente. Selon la mécanique quantique les électrons vérifiant la condition $\varepsilon > \mu + b$ ne quittent pas nécessairement le métal. Une partie de ces électrons peut être *réfléchie* par la « *barrière de potentiel* » existant à la frontière du métal et qui doit être surmontée pour que les électrons puissent s'échapper dans le vide. Nous ne pouvons entrer ici dans les détails de cette question.

5. Notons que dès 1901 Richardson avait établi une autre formule de la densité du courant thermoïonique de saturation. Il appliqua au gaz électronique du métal la statistique classique de Boltzmann. Nous pouvons déduire le résultat de Richardson de nos formules sans faire de nouveaux calculs. Il suffit de remplacer la formule (101.3) par l'expression correspondante déduite de la loi de distribution des vitesses de Maxwell (cf. t. II, § 72):

$$dn_z = n\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{p_z^2}{2mkT}\right\} dp_z,$$

où n est le nombre d'électrons libres contenus dans l'unité de volume du métal. Cette formule diffère surtout de la formule (101.3) en ce que $\sqrt{T}$ y figure au dénominateur tandis que dans (101.3) la température T figure à la puissance un au numérateur. Pour obtenir la première formule de Richardson il suffit de réaliser la substitution suivante:

$$\frac{4}{h^3}\pi mkT \longrightarrow n\left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{1/2}.$$

On obtient ainsi

$$j_s = A'T^{1/2}e^{-b/(kT)}, \tag{101.7}$$

où

$$A' = ne\sqrt{\frac{k}{2\pi m}}. \tag{101.8}$$

La formule (101.7) s'interprète simplement en l'écrivant sous la forme

$$j_s = \frac{1}{4}\, ne\bar{v}e^{-b/(kT)},$$

où $\bar{v}$ est la vitesse thermique moyenne de l'électron dans la théorie classique. La quantité $^1/_4 n\bar{v}$ représente le nombre d'électrons tombant par seconde sur l'unité de surface du métal (cf. t. II, § 75). Parmi ces électrons il faut choisir ceux qui sont en mesure de surmonter la barrière de potentiel à la surface du métal. Pour cela on multiplie le flux d'électrons par le facteur exponentiel $e^{-b/(kT)}$.

Les deux formules (101.5) et (101.7) fournissent pratiquement le même résultat car la variation du courant j_s avec la température est surtout déterminée par le facteur exponentiel qui varie avec la température plus fortement que T^2 et $T^{1/2}$. En prenant les logarithmes des deux membres de (101.5) nous constatons que j_s varie avec la température conformément à la formule

$$\frac{\Delta j_s}{j_s} = 2\frac{\Delta T}{T} + \frac{b\Delta T}{kT^2}.$$

Le rapport du premier terme au deuxième dans le second membre de cette formule est égal à $2kT/b$. Pour le tungstène $b = 4{,}5$ eV. En posant $T = 2500$ K, ce rapport vaut $\sim 0{,}10$. Avec la formule (101.7) ce rapport est plus petit $\sim 0{,}025$. On écrit souvent la formule (101.5) sous la forme simplifiée:

$$\ln j_s = \text{const} - \frac{b}{kT}. \tag{101.9}$$

6. Nous voyons ainsi que la densité du courant thermoïonique de saturation j est déterminée par le rapport $b/(kT)$. Pour les métaux réfractaires W, Mo, Pt le travail de sortie est relativement grand et vaut respectivement 4,52, 4,37 et 4,8 eV. On ne peut obtenir des courants thermoïoniques de grande intensité avec des cathodes en ces matériaux qu'à des températures très élevées. Or en pratique il importe beaucoup de pouvoir abaisser la température de la cathode, afin de réduire la consommation d'énergie utilisée pour porter la cathode à incandescence et d'accroître la durée d'exploitation des tubes électroniques. Les cathodes dites *composées* où on réalise un abaissement notable du travail de sortie satisfont à ces desiderata. Un des types les plus répandus est la *cathode à oxydes*. Elle est constituée par un support métallique sur lequel on dépose une couche de carbonate d'un métal alcalino-terreux ($BaCO_3$, $SrCO_3$, $CaCO_3$). Ces sels se décomposent par calcination (selon l'équation $BaCO_3 \rightleftharpoons BaO + CO_2$, etc.) et le support se trouve recouvert d'une couche d'oxyde (BaO, SrO, CaO) ou d'un mélange d'oxydes. On *active* ensuite la cathode, opération qui consiste à lui faire émettre un courant thermoïonique à une température de 1000 °C environ. Après cette opération il se forme à la surface de la cathode une *couche monoatomique* d'ions des métaux alcalino-terreux dont la présence diminue

fortement le travail d'extraction et augmente donc le pouvoir émissif de la cathode. Le chauffage de la cathode peut s'effectuer soit en faisant passer le courant de chauffage à travers le support métallique (cathode à chauffage direct) soit en chauffant un filament auxiliaire (cathode à chauffage indirect). La température de fonctionnement des cathodes à oxydes modernes est de 800 à 900 °C. Le pouvoir émissif normal atteint 1 A/cm^2 et dans le cas de brèves impulsions de courant (10^{-6} à 10^{-5} s) le pouvoir émissif peut atteindre 100 A/cm^2 et au-delà. Indiquons à titre de comparaison que la température de fonctionnement des cathodes en tungstène est 2200 °C et les courants d'émission ne dépassent pratiquement pas 0,1 A/cm^2.

7. Si tous les électrons émis par la cathode parvenaient jusqu'à l'anode, l'intensité $\mathcal{J}$ du courant thermoïonique aurait été indépendante de la tension appliquée V. En réalité il n'en est pas ainsi et à mesure que l'on fait croître V le courant $\mathcal{J}$ croît (cf. fig. 244). Cela tient à ce qu'une charge d'espace négative apparaît dans l'espace compris entre la cathode et l'anode et que cette charge d'espace crée un champ électrique opposé au champ appliqué. La théorie de cette question fut faite en 1913 par Langmuir (1881-1957). Supposons que les électrodes de la diode soient planes. On peut admettre qu'elles sont infiniment grandes. Maintenons constante la température T de la cathode. Plaçons l'origine des coordonnées sur la surface de la cathode et orientons l'axe X normalement à la surface de la cathode dans le sens allant vers l'anode. Le potentiel φ du champ électrique n'est fonction que de la coordonnée x et vérifie l'équation de Poisson

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho = 4\pi ne, \tag{101.10}$$

où e est la valeur absolue de la charge de l'électron. En valeur absolue la densité de courant est $j = nev$. Si le vide dans le tube est suffisamment poussé on peut négliger les chocs des électrons et définir la vitesse des électrons par l'équation $^1/_2mv^2 = e\varphi$. Nous posons que le potentiel de la cathode est nul et nous négligeons les vitesses thermiques que possèdent les électrons s'échappant de la cathode. En éliminant entre ces équations la concentration n des électrons et la vitesse v, on obtient l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{a^2}{\sqrt{\varphi}}, \tag{101.11}$$

où

$$a^2 = 4\pi j\sqrt{\frac{m}{2e}}. \tag{101.12}$$

De toute évidence la grandeur a est constante puisque le courant j ne dépend pas de la coordonnée x.

En comparant les équations (101.11) et (101.10) on voit que la densité volumique ρ de l'électricité sur la surface de la cathode tend vers l'infini. Le point $x = 0$ est un point singulier de l'équation (101.11) où cette équation devient absurde. Ce défaut de la théorie est une conséquence de l'idéalisation adoptée selon laquelle on néglige totalement la dispersion des vitesses thermiques des électrons quittant la cathode. Cependant la densité superficielle des charges doit non seulement rester finie sur la cathode, mais encore s'annuler près de la surface de la cathode tout comme l'intensité du champ électrique. S'il n'en était pas ainsi tous les électrons émis seraient entraînés par le champ électrique vers l'anode et le courant thermoïonique arriverait à saturation quelle que soit la tension appliquée au tube. L'équation (101.11) doit être complétée par les conditions aux limites:

$$\lim_{x\to 0} \varphi = \lim_{x\to 0} \frac{d\varphi}{dx} = 0. \tag{101.13}$$

Pour trouver la solution de l'équation (101.10) on la multiplie d'abord par la dérivée $d\varphi/dx$ puis on l'intègre en tenant compte des conditions aux limites (101.13). On obtient ainsi

$$(d\varphi/dx)^2 = 4a^2\varphi^{1/2}.$$

En calculant la racine carrée on ne doit garder que le signe « plus », puisque le potentiel φ doit croître de la cathode à l'anode et doit donc être positif dans l'espace interélectrode. Après séparation des variables on arrive à l'équation

$$d\varphi/\varphi^{1/4} = 2a\, dx.$$

Après une deuxième intégration on obtient

$$\frac{4}{3}\varphi^{3/4} = 2ax \tag{101.14}$$

et après substitution de l'expression de a:

$$j = \frac{1}{9\pi x^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}\,\varphi^{3/2}. \tag{101.15}$$

En désignant par V la tension et par l la distance entre les électrodes on a

$$j = CV^{3/2}, \tag{101.16}$$

où la constante C est définie par

$$C = \frac{1}{9\pi l^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}. \tag{101.17}$$

La formule (101.16) est désignée sous le nom de *loi de Langmuir* (ou *loi de la puissance* 3/2). Elle est vérifiée quelle que soit la configuration des électrodes puisque celle-ci ne se reflète que dans

l'expression du facteur numérique C. Langmuir résolut le problème relatif à des électrodes cylindriques coaxiales, la cathode étant le cylindre intérieur et l'anode le cylindre extérieur. Le même problème a été résolu par Bogouslavski (1883-1923) qui étudia en plus le cas où la cathode se trouve à l'extérieur et l'anode à l'intérieur. Langmuir étudia aussi le cas d'électrodes sphériques. Dans tous les cas la loi de Langmuir était vérifiée.

Pour des tensions faibles la loi de Langmuir donne pour le courant thermoïonique des valeurs trop faibles puisque cette loi ne tient pas compte de la dispersion des vitesses thermiques des électrons. Pour les grandes tensions la loi de Langmuir serait absolument exacte si le pouvoir émissif était infiniment grand. Mais comme ce n'est pas le cas on observe des écarts même pour de grandes tensions. A mesure que l'on fait croître la tension, on arrive finalement à la saturation et la loi de Longmuir cesse d'être vérifiée.

§ 102. Les tubes électroniques et leurs applications

1. Dans la diode à vide les électrons émis par la cathode se déplacent vers l'anode. Si l'anode est portée à un potentiel positif, un courant traverse la diode, mais si l'anode est portée à un potentiel négatif, aucun courant ne passera plus. C'est ce comportement qui détermine l'utilisation de la diode à vide pour le *redressement des courants alternatifs*. Le schéma d'un redresseur à diode à une alternance est représenté sur la figure 245, *a*. Si la tension d'entrée est de la forme représentée sur la figure 245, *b*, en l'absence de condensateur C la tension de sortie serait de la forme représentée sur la figure 245, *c*, i.e. serait composée d'impulsions de tension se succédant toutes les demi-périodes $T/2$. La courbe représentant le courant $\mathcal{J}$ traversant une *résistance de charge* R aurait la même forme. C'est pour obtenir un courant $\mathcal{J}$ continu et égaliser ses pulsations qu'on introduit un condensateur C dans le circuit. En présence du condensateur, le courant traversant la diode à chaque demi-période traverse d'une part la résistance R et d'autre part charge le condensateur C. Pendant les autres demi-périodes où la diode ne laisse pas passer le courant, le condensateur se décharge sur la résistance R. Les pulsations sont d'autant plus petites que le temps $\tau = RC$ caractérisant la vitesse de décharge du condensateur est grand (cf. § 48). Le principal défaut du montage décrit est que le redresseur n'est traversé par le courant que pendant une demi-période $T/2$ et pendant l'autre demi-période il n'y a pas de courant dans la diode. La figure 246 représente le schéma d'un autre montage redresseur à deux alternances qui élimine cet inconvénient.

2. L'introduction d'électrodes supplémentaires dans le tube électronique simple permet de contrôler le courant électronique. Ces électrodes supplémentaires sont appelées *grilles* vu qu'elles

sont fabriquées en forme de grilles ou de spirales entourant la cathode. Le tube à grille le plus simple est la *triode*; l'unique grille qu'elle comporte est appelée *grille de commande*. Comme elle est disposée plus près de la cathode que l'anode, la variation de la tension de grille (i.e. la différence de potentiel entre la grille et la cathode) modifie plus fortement le champ électrique régnant à proximité de la cathode, que ne le ferait la même variation de la tension anodique (i.e. la différence de potentiel entre l'anode et la cathode), ce qui entraîne une variation du courant électronique. Lorsque la tension

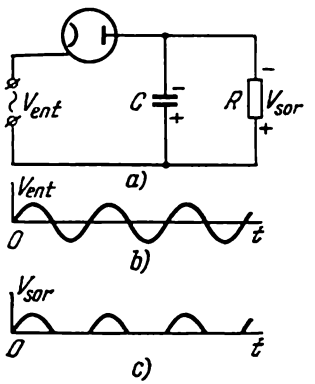


Fig. 245

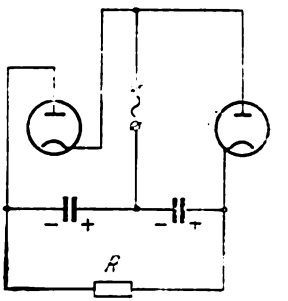


Fig. 246

de grille est nulle, la grille n'affecte pratiquement pas l'intensité du courant électronique. Lorsque la grille est portée à un potentiel positif, l'intensité de courant augmente et lorsqu'on la porte à un potentiel négatif, le courant traversant le tube diminue et peut même devenir nul. On peut donc contrôler l'intensité du courant électronique en faisant varier le potentiel de la grille. La masse de l'électron étant infime, l'inertie de la triode est très petite et l'action de commande subsiste lorsque les variations de la tension de grille sont très rapides.

Une partie des électrons issus de la cathode sont captés par la grille, de sorte qu'un courant $\mathcal{J}$ circule dans le circuit de la grille; ce courant est le *courant de grille*. Le courant total $\mathcal{J}$ traversant la triode se compose du courant anodique $\mathcal{J}_a$ et du courant de grille $\mathcal{J}_g$: $\mathcal{J} = \mathcal{J}_a + \mathcal{J}_g$. L'apparition d'un courant de grille important est généralement nuisible car il entraîne une dissipation inutile de l'énergie dans son circuit. En fait, dans la majorité des cas, le flux d'électrons passe au travers de la grille, de sorte que le courant de grille est petit devant le courant anodique. On peut donc négliger le courant de grille $\mathcal{J}_g$ et poser $\mathcal{J} = \mathcal{J}_a$.

Le courant anodique $\mathcal{J}_a$ dépend des tensions appliquées à la grille V_g et à l'anode V_a : $\mathcal{J}_a = \mathcal{J}_a (V_g, V_a)$. En pratique on caractérise cette fonction par deux familles de courbes appelées *caractéristiques de grille et d'anode*. La caractéristique grille-anode (ou réseau de transfert) $\mathcal{J}_a = \mathcal{J}_a (V_g)$ représente la variation du courant anodique $\mathcal{J}_a$ en fonction de la tension de grille V_g à condition que la tension anodique et la tension de chauffage de la cathode soient maintenues constantes. La caractéristique anodique (réseau de Kellog) est la courbe représentant la variation du courant anodique en fonction de la tension anodique, la tension de grille et la tension de chauffage de la cathode restant constantes. Ces deux réseaux

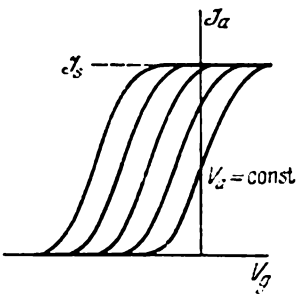


Fig. 247

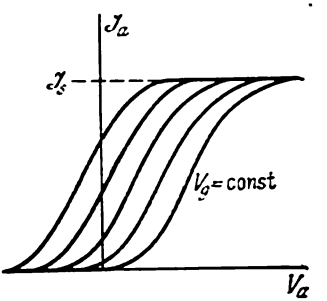


Fig. 248

de courbes sont représentés sur les figures 247 et 248. Les courbes du réseau de transfert ont une pente plus forte que les courbes du réseau de Kellog. Lorsque le paramètre V_a augmente les courbes $\mathcal{J}_g (V_g)$ se déplacent de droite à gauche. Les courbes $\mathcal{J}_a (V_a)$ se déplacent dans le même sens lorsque V_g augmente. Si on fait croître la température de la cathode, le courant de saturation augmente et les courbes des deux familles montent.

La variation du courant anodique $\mathcal{J}_a$ en fonction de V_g ou de V_a n'est pas linéaire. Ce n'est que dans la partie montante que ces courbes sont presque linéaires et la loi d'Ohm y est approximativement vérifiée. Sur ces parties rectilignes des courbes les dérivées

$$S = \left(\frac{\partial \mathcal{J}_a}{\partial V_g}\right)_{V_a} \quad \text{et} \quad R_i = \left(\frac{\partial V_a}{\partial \mathcal{J}_a}\right)_{V_g} \tag{102.1}$$

sont pratiquement constantes. La dérivée S est appelée *pente du réseau de transfert* et la dérivée R_i est appelée *résistance interne* ou *différentielle du tube*.

La figure 247 montre que la forme des courbes du réseau de transfert ne change pratiquement pas lorsqu'on fait varier V_a, mais la caractéristique se déplace vers la gauche (pour un accroissement de V_a) ou vers la droite (pour une diminution de V_a). A accroisse-

ment égal de V_a la courbe se déplace de la même distance. On en conclut que le courant anodique $\mathcal{J}_a$ ne dépend pas des tensions V_g et V_a prises séparément mais seulement de leur combinaison $V_c = V_g + DV_a$, où D est une constante positive appelée *transparence de grille*. Cette constante est inférieure à l'unité puisque les variations de la tension de grille affectent beaucoup plus fortement le courant anodique que ne le font les variations de la tension anodique. Par suite la fonction de deux variables $\mathcal{J}_a = \mathcal{J}_a(V_g, V_a)$ se réduit en fait à une fonction d'une seule variable $V_c = V_g + DV_a$. C'est pour cette raison que la grandeur V_c est appelée *tension de commande*. En différentiant $\mathcal{J}_a = \mathcal{J}_a(V_c) = \mathcal{J}_a(V_g + DV_a)$ on obtient

$$S = \left(\frac{\partial \mathcal{J}_a}{\partial V_g}\right)_{V_a} = \frac{d\mathcal{J}_a}{dV_c},$$

$$\frac{1}{R_i} = \left(\frac{\partial \mathcal{J}_a}{\partial V_a}\right)_{V_g} = \frac{d\mathcal{J}_a}{dV_c}\left(\frac{\partial V_c}{\partial V_a}\right)_{V_g} = SD.$$

Par suite les paramètres du tube S, D et R_i sont liés par la relation

$$SDR_i = 1. \qquad (102.2)$$

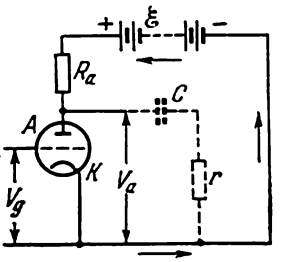


Fig. 249

3. Le tube triode peut servir à l'*amplification des signaux électriques et des courants alternatifs*. La figure 249 représente le schéma de principe du circuit d'amplification à triode. Le circuit anodique contient une source de courant de force électromotrice $\mathcal{E}$ et une résistance de charge R_a. La tension à amplifier est appliquée entre la grille et la cathode. En considérant le courant anodique comme une fonction de la tension de commande V_c nous pouvons écrire

$$\Delta \mathcal{J}_a = S\Delta V_c = S(\Delta V_g + D\Delta V_a).$$

En appliquant la loi d'Ohm à la partie extérieure $K\mathcal{E}A$ du circuit et en négligeant la résistance interne de la batterie et la résistance des fils de connexion nous avons

$$V_a = \mathcal{E} - R_a \mathcal{J}_a.$$

Comme $\mathcal{E}$ est une quantité constante

$$\Delta V_a = -R_a \Delta \mathcal{J}_a = -R_a S(\Delta V_g + D\Delta V_a),$$

et par conséquent

$$\frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} = -\frac{R_a S}{1 + SDR_a}.$$

A l'aide de (102.2) cette relation se ramène à la forme

$$\frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} = -\frac{R_a}{R_a + R_i}\frac{1}{D}. \qquad (102.3)$$

Cette formule établit une relation entre les amplitudes des oscillations des tensions anodique et de grille. Dans le cas particulier où $R_i \ll R_a$ (102.3) s'écrit

$$\frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} = -\frac{1}{D}. \tag{102.4}$$

La grandeur $K = 1/D$ est appelée *facteur d'amplification du tube triode*. Dans l'autre cas limite où $R_i \gg R_a$

$$\frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} = -\frac{R_a}{R_i D} = -SR_a. \tag{102.5}$$

Dans ce cas l'amplification est d'autant plus forte que la pente de la caractéristique S est grande. Le signe moins dans les formules (102.3) à (102.5) signifie que les phases des oscillations des tensions de grille et d'anode sont opposées.

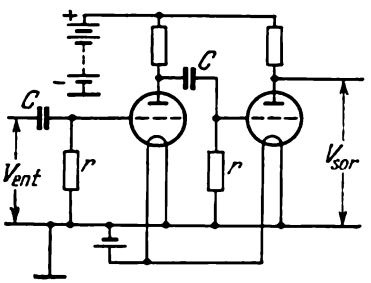


Fig. 250

On peut amplifier un signal électrique maintes fois de suite. La tension amplifiée par un premier tube est appliquée à la grille d'une deuxième triode, la tension amplifiée par celle-ci est appliquée à la grille d'une troisième triode, etc. Un schéma de montage d'un *amplificateur à plusieurs étages* est représenté sur la figure 250. La tension est appliquée aux grilles des différentes triodes à travers des *condensateurs de coupure C* qui, laissant passer le signal alternatif à amplifier, empêchent que la haute tension continue fournie par la batterie d'anode soit appliquée à la grille. Entre grille et cathode de chaque triode on insère une résistance r (résistance de fuite de la grille) qui empêche que la triode soit *bloquée*. Il s'agit en l'occurrence des périodes de temps pendant lesquelles le potentiel de la grille est positif, ce qui lui permet de capter les électrons. S'il n'y avait pas de résistance de fuite, des charges négatives se seraient accumulées sur la grille en quantité suffisante pour s'opposer au passage du courant à travers la triode. Par un choix convenable du condensateur C et de la résistance r on assure que les oscillations de la tension appliquée à la grille soient centrées sur une valeur donnée pour laquelle la grille assume ses fonctions de commande, le courant de grille étant très petit.

4. Pour nombre d'applications il importe que le courant anodique dépende du courant *de grille* et ne dépende pratiquement pas de la tension anodique. On y arrive en disposant entre l'anode et la grille de commande une *grille supplémentaire* portée à un potentiel positif par rapport à la cathode, un peu plus petit que le potentiel d'anode.

C'est la *grille-écran* et le tube *à quatre électrodes* est la *tétrode*. L'introduction de la grille-écran affaiblit le champ électrique à proximité de l'anode et réduit ainsi l'influence que le potentiel d'anode exerce sur le courant anodique. La grille-écran exerce la même action que celle qui résulterait d'une diminution de la transparence D de la grille de commande. Ainsi, à conditions égales, le facteur d'amplification de la tétrode est beaucoup plus grand que pour une triode. Cependant l'introduction de la grille-écran peut avoir des conséquences indésirables. Les électrons qui traversent la grille-écran bombardent l'anode qui émet des électrons secondaires (*effet dynatron*). Cet effet se produit aussi dans les tubes triodes, mais dans les conditions de fonctionnement normales de la triode les électrons secondaires reviennent vers l'anode sous l'action du champ électrique. Comme la grille-écran de la tétrode est toujours portée à un potentiel positif et comme pendant les fortes oscillations de la tension anodique le potentiel d'anode peut être à certains instants plus faible que le potentiel de la grille-écran, les électrons secondaires sont attirés par cette dernière et peuvent passer au travers. Le courant électronique résultant se retranche du courant anodique dû aux électrons primaires; on voit alors apparaître des creux sur la caractéristique du tube, ce qui affecte ses propriétés. Pour supprimer l'effet dynatron on introduit une troisième grille dite *grille d'arrêt* que l'on dispose entre la grille-écran et l'anode (fig. 251). Cette grille d'arrêt est connectée à la cathode (souvent à l'intérieur du tube). Se trouvant ainsi sous potentiel de la cathode, elle freine les électrons secondaires et empêche leur arrivée sur la grille-écran. Par ailleurs elle n'exerce qu'une action insignifiante sur le déplacement du flux d'électrons primaires. Les tubes à cinq électrodes appelés *pentodes* présentent un grand facteur d'amplification. Leurs caractéristiques sont lisses, sans creux, aussi les pentodes sont-elles plus largement utilisées que les tétrodes.

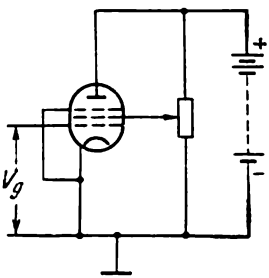


Fig. 251

Nous décrirons au § 133 les applications des tubes électroniques à la génération d'oscillations électriques.

§ 103. Emission secondaire et auto-émission

1. Lorsqu'on soumet la surface de métaux, de semiconducteurs ou de diélectriques à un bombardement par un faisceau d'électrons, on observe l'émission d'*électrons secondaires*. C'est l'effet *d'émission secondaire* (lorsqu'il se manifeste dans les tubes électroniques on l'appelle *effet dynatron*, voir le paragraphe précédent). Dans le fais-

ceau des électrons émis par les surfaces bombardées on distingue trois groupes d'électrons: 1) les électrons élastiquement réfléchis par la surface de l'émetteur. 2) les électrons réfléchis de façon non élastique; 3) les électrons secondaires, i.e. les électrons extraits de la cible par les électrons incidents. Pour arriver à une description quantitative de l'effet on introduit le *facteur d'émission secondaire*; c'est le rapport σ du nombre total N d'électrons émis par la surface de l'émetteur au nombre N_0 d'électrons primaires incidents:

$$\sigma = N/N_0.$$

Le facteur d'émission secondaire dépend de la nature, du mode de préparation et de l'état de la surface du corps bombardé, ainsi que de la vitesse des électrons incidents et de leur angle d'incidence. Le facteur σ ne dépend pas de l'intensité du faisceau d'électrons primaires tant que cette intensité ne provoque pas la vaporisation ou la destruction de la surface du corps. L'énergie cinétique initiale de la plupart des électrons secondaires émis est de quelques eV et pour une large part ne dépend pas de l'énergie des électrons primaires. En pénétrant à l'intérieur de la substance bombardée, ceux-ci excitent sur leur passage des électrons de l'émetteur. Le nombre d'électrons excités par unité de longueur du trajet de l'électron primaire augmente vers la fin du trajet. C'est à la fin du trajet que sont excités la majorité des électrons secondaires qui, dans des conditions favorables, arrivent à s'échapper hors de l'émetteur. Plus la vitesse v des électrons primaires est grande, plus leur profondeur de pénétration est grande et plus ils excitent d'électrons secondaires. Mais comme ces électrons sont libérés à une profondeur plus grande du corps bombardé, la probabilité de leur sortie diminue. C'est ce qui explique que le facteur d'émission secondaire augmente d'abord avec la vitesse v des électrons primaires jusqu'à un maximum étalé, puis diminue lorsque la vitesse v augmente encore. L'accroissement du facteur σ avec l'angle d'incidence des électrons primaires s'interprète de façon semblable: sous incidence rasante des électrons primaires les électrons secondaires sont créés en moyenne plus près de la surface que sous incidence normale. Pour observer cet effet il importe naturellement que la surface de l'émetteur soit suffisamment lisse.

L'émission secondaire est plus grande avec les couches métalliques épaisses qu'avec des couches minces déposées sur du verre. L'émission augmente avec l'épaisseur de la couche jusqu'à une certaine limite, et au-delà de cette limite elle devient égale à l'émission obtenue avec des couches épaisses. C'est pour cette raison que dans les études des couches minces on arrive à estimer l'épaisseur de la couche superficielle métallique où sont générés les électrons secondaires. On a trouvé ainsi que pour les métaux cette épaisseur était inférieure à $\sim 5 \cdot 10^{-6}$ cm.

La sortie des électrons secondaires générés à l'intérieur d'un émetteur dépend largement de sa nature. Dans les métaux où la concentration des électrons de conduction est grande, les électrons secondaires entrent souvent en collision avec les électrons de conduction et dissipent ainsi leur énergie. Dans ces conditions la probabilité de sortie des électrons secondaires est petite. Dans les semiconducteurs et les diélectriques la concentration des électrons de conduction est petite ; les collisions sont donc beaucoup moins fréquentes et la probabilité de sortie des électrons secondaires est par suite plusieurs fois plus grande. C'est pour cette raison qu'il n'existe pas de métaux ayant un grand facteur σ et les émetteurs efficaces

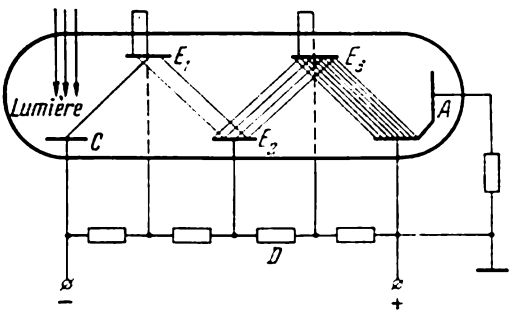


Fig. 252

sont toujours des semiconducteurs ou des diélectriques. Pour les métaux purs le maximum de σ est toujours voisin de 2 et pour certains il est inférieur à 1. Ainsi σ_{max} vaut pour le cuivre 1,29, pour le nickel 1,25, pour l'argent 1,47, pour le platine 1,78, pour le béryllium 0,53 et pour l'aluminium 0,97. Pour les semiconducteurs σ_{max} peut atteindre une valeur égale ou supérieure à 10. En pratique, lorsqu'il s'agit d'obtenir une forte émission secondaire, on utilise des *cathodes composées* (émetteurs) constituées par un support métallique recouvert par une couche de semiconducteur déposée par un procédé chimique suivi d'un traitement spécial. Tels sont, par exemple, les *émetteurs à antimoine-césium* préparés en traitant l'antimoine dans les vapeurs de césium ou les *émetteurs à argent-césium* préparés par oxydation de l'argent suivie d'un traitement par les vapeurs de césium. Pour ces émetteurs $\sigma_{max} \sim 10$.

2. L'émission d'électrons secondaires est mise à profit dans les *multiplicateurs d'électrons photoélectriques* destinés à amplifier de faibles courants électriques. Ce dispositif est un tube à vide comportant une cathode C et une anode A entre lesquelles se trouvent disposées plusieurs électrodes émettant des électrons secondaires (fig. 252). A l'aide du diviseur D on applique à ces électrodes des

tensions convenables. Le rayonnement électromagnétique incident arrache des électrons de la surface de la cathode. Le faible faisceau d'électrons primaires est accéléré par le champ électrique et tombe sur l'émetteur E_1 qui émet des électrons secondaires. Ces électrons secondaires tombent sur le deuxième émetteur E_2 qui assure une nouvelle amplification du faisceau électronique. En fin de compte on obtient à la sortie un courant photoélectrique amplifié (avec un facteur d'amplification de 10^5 à 10^9) qui est capté à la sortie de l'anode A.

3. Une émission d'électrons secondaires apparaît aussi si on bombarde l'émetteur avec des particules lourdes, i.e. avec des ions positifs et négatifs. Le facteur d'émission secondaire, i.e. le nombre moyen d'électrons arrachés par une particule primaire incidente, est dans ce cas plus petit que dans celui d'un bombardement par électrons. Des électrons sont également émis lorsqu'on irradie la surface d'un corps par la lumière ou d'autres ondes électromagnétiques courtes (*effet photoélectrique*). Cet effet sera décrit dans le tome V de notre cours.

4. Des électrons peuvent être émis par les surfaces métalliques sous l'action d'un champ électrique *fort* qui arrache les électrons du métal. Cet effet est l'*auto-émission* ou *émission froide*. On l'observe en utilisant un tube à vide bien évacué dont la cathode est constituée par une pointe métallique et dont l'anode est plane. Lorsqu'on applique au tube une tension électrique, un champ électrique intense est créé près de la surface de la cathode. Pour estimer l'intensité de ce champ on peut assimiler la cathode à une petite bille et poser que l'anode se trouve à l'infini. En notant a le rayon de la bille et V la tension appliquée au tube, la charge de la bille est $q = Va$ et l'intensité du champ électrique à une distance r du centre de la bille est $E = q/r^2 = Va/r^2$. Sur la surface de la bille $E = V/a$. Si le rayon de courbure de l'extrémité de la pointe $a = 10^{-2}$ mm et si $V = 1000$ V, à proximité de la pointe le champ $E \sim 10^6$ V/cm. Si on augmente progressivement la tension appliquée au tube jusqu'à ce que le champ E près de la surface de la cathode devienne égal à $\sim 10^5$ à 10^6 V/cm, un faible courant dû à l'auto-émission de la cathode commence à passer à travers le tube. L'intensité de ce courant augmente rapidement lorsqu'on fait croître la tension appliquée. Le courant passe même si la cathode est froide, d'où le terme d'émission froide. Si on fait encore croître la tension appliquée, la cathode s'échauffe et se vaporise et une décharge gazeuse se produit dans le tube. Une explication du mécanisme de l'auto-émission doit nécessairement être fondée sur la mécanique quantique. C'est pourquoi nous en différons l'étude jusqu'au tome V de ce cours.

CHAPITRE VIII

LES EFFETS ÉLECTRIQUES AUX CONTACTS

§ 104. Différence de potentiel de contact

1. Lorsqu'on met deux métaux en contact une différence de potentiel appelée *différence de potentiel de contact* apparaît entre ces métaux. Cet effet fut découvert en 1797 par Volta. Après avoir étudié différents métaux Volta les disposa dans l'ordre suivant: Al, Zn, Sn, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd. Il trouva que si on met en contact mutuel les métaux disposés dans cet ordre, chaque métal se trouvant plus près du début de la série acquiert un potentiel plus élevé que celui qui le suit dans la série. Volta établit aussi que si on mettait plusieurs métaux (1, 2, . . . , n) en contact

Fig. 253

les uns avec les autres (fig. 253) la différence de potentiel $\varphi_n - \varphi_1$ entre les métaux extrêmes ne dépendait pas de la nature des métaux intermédiaires. Ce résultat est appelé *loi des contacts de Volta*. Pour que cette loi soit vérifiée il importe que tous les métaux en contact se trouvent *à la même température*. Si on met en contact mutuel les métaux extrêmes de la série ci-dessus de façon à constituer un circuit fermé (fig. 254), la loi des contacts implique que la force électromotrice y sera nulle et qu'aucun courant ne circulera dans le circuit, à condition que tous les métaux soient à la même température. S'il n'en était pas ainsi la loi de la conservation de l'énergie aurait été mise en défaut. On peut donc considérer la loi de Volta comme un *corollaire de la loi de la conservation de l'énergie*. Ces considérations cessent d'être valables si le circuit comporte des électrolytes où des réactions chimiques peuvent se produire et fournir une énergie susceptible d'engendrer un courant électrique. La loi des contacts ne s'applique pas à cette situation. Exprimée en volts, la différence de potentiel de contact varie pour différentes couples de métaux de quelques dixièmes à quelques unités. Tout comme le travail de

sortie des électrons, elle change fortement si les surfaces de contact des métaux sont contaminées, oxydées, etc. Ainsi, pour obtenir des valeurs exactes des différences de potentiel de contact, il est nécessaire d'utiliser des surfaces métalliques très propres et de réaliser les mesures sous vide.

2. Pour donner une explication de l'origine de la différence de potentiel de contact, nous utiliserons le *modèle des électrons libres*. Supposons que le métal se trouve à 0 K. Au zéro absolu tous les niveaux d'énergie jusqu'au niveau de Fermi μ sont occupés par des électrons. La valeur de μ est liée à la concentration n des électrons

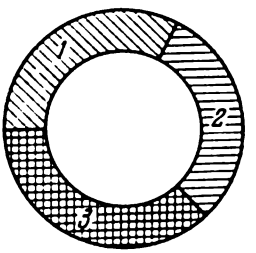


Fig. 254

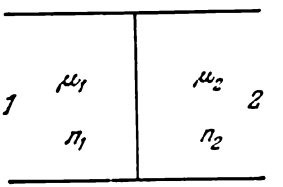


Fig. 255

de conduction par la relation (99.6). Amenons les métaux *1* et *2* en contact direct (fig. 255). Comme les énergies de Fermi μ_1 et μ_2 de métaux différents sont différentes, les concentrations n_1 et n_2 des électrons de conduction y sont différentes. Posons pour fixer les idées que $\mu_2 > \mu_1$ et par suite $n_2 > n_1$. Dès que les métaux sont amenés en contact commence une diffusion d'électrons, ceux-ci passant du métal *2* dans le métal *1* puisque dans le métal *2* on trouve des niveaux occupés se trouvant dans l'échelle des énergies plus haut que le niveau de Fermi μ_1 du premier métal. Les électrons peuvent quitter ces niveaux pour venir occuper les niveaux vacants supérieurs à μ_1 dans le métal *1*. Le passage inverse du métal *1* dans le métal *2* est exclu, puisque dans le métal *2* tous les niveaux d'énergie μ_1 et d'énergies inférieures sont occupés par des électrons. Du fait de cette diffusion d'électrons le métal *2* acquerra une charge positive et le métal *1* une charge négative. Ainsi le potentiel du métal *2* s'accroît et celui du métal *1* s'abaisse. Le niveau de Fermi μ_2 s'abaisse et le niveau μ_1 monte. En notant φ_{i1} et φ_{i2} les potentiels des métaux *1* et *2*, les énergies de Fermi seront respectivement égales à $\mu_1 + e\varphi_{i1}$ et $\mu_2 + e\varphi_{i2}$. A l'interface des deux métaux apparaît un *saut de potentiel*, ou ce qui revient au même, un champ électrique s'opposant à la diffusion. Lorsque la différence de potentiel $\varphi_{i2} - \varphi_{i1}$ atteint une certaine valeur, la diffusion ne se produira plus. Cette situation apparaît lorsque les positions des niveaux de

Fermi s'égalisent ; le métal *1* ne dispose alors plus de niveaux vacants qui pourraient être occupés par les électrons du métal *2* et dans ce dernier les niveaux sur lesquels pourraient venir se placer les électrons du métal *1* ne sont pas encore libérés. Ainsi à l'état d'équilibre on a

$$\mu_1 + e\varphi_{i1} = \mu_2 + e\varphi_{i2}. \tag{104.1}$$

On en tire

$$\varphi_{i2} - \varphi_{i1} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{e}. \tag{104.2}$$

Comme $e < 0$, pour $\mu_2 > \mu_1$ on a $\varphi_{i2} > \varphi_{i1}$, qui est le résultat correct.

Nous avons supposé ci-dessus que les métaux se trouvaient à la température du zéro absolu, néanmoins le résultat (104.2) est vérifié à d'autres températures. En effet μ et en présence d'un champ électrique interne $\mu + e\varphi$ représentent le *potentiel chimique* du gaz électronique rapporté à un seul électron ; or à l'équilibre les potentiels chimiques des gaz électroniques des deux métaux sont égaux (cf. t. II, §§ 82, 83). Il faut cependant tenir compte de ce que pour $T \neq 0$ le potentiel chimique μ dépend non seulement de la concentration des électrons, mais aussi de la température du métal.

La formule (104.2) suppose que le point *1* se trouve à l'intérieur du métal *1* et le point *2* à l'intérieur du métal *2*, ce qu'indique l'indice *i*. Par suite la différence de potentiel $\varphi_{i2} - \varphi_{i1}$ est appelée *différence de potentiel de contact interne*. Il résulte de la formule (104.2) que cette différence de potentiel se conforme à la loi de Volta. Pour évaluer cette différence de potentiel exprimons à l'aide de la formule (99.6) les énergies de Fermi μ_1 et μ_2 en fonction des concentrations n_1 et n_2 des électrons de conduction. On obtient

$$\varphi_{i2} - \varphi_{i1} = \frac{\hbar^2}{8me}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}(n_1^{2/3} - n_2^{2/3}). \tag{104.3}$$

En y substituant les valeurs numériques on trouve

$$\varphi_{i2} - \varphi_{i1} = -3{,}66 \cdot 10^{-15}(n_1^{2/3} - n_2^{2/3}) \quad \text{(en volts)}.$$

En admettant que chaque atome du métal fournit un électron de conduction on trouve pour le cuivre $\varphi_{i2} - \varphi_{i1} = 3{,}66 \cdot 10^{-15} n^{2/3} \sim$ ~ 1 V. Il en résulte que la différence de potentiel de contact interne doit être de l'ordre de quelques centièmes à quelques dixièmes de volt et dans certains cas de l'ordre du volt. Il est évident que ce n'est qu'une estimation puisqu'elle se fonde sur le modèle des électrons libres.

3. Pour s'échapper du métal l'électron doit fournir un certain travail d'extraction A. Ce travail est produit dans une mince couche superficielle du métal où s'exercent des forces tendant à retenir l'électron dans le métal. L'épaisseur δ de cette couche est de l'ordre

de quelques distances atomiques. Compte tenu de cette remarque, considérons deux métaux en contact le long de la surface AB (fig. 256). L'existence d'un tel contact détermine une différence de potentiel $\varphi_{i2} - \varphi_{i1}$ entre deux points se trouvant à l'intérieur des métaux. Supposons maintenant qu'il existe entre ces métaux un « vide » de largeur macroscopique CD. Prenons deux points $1'$ et $2'$ à l'intérieur de ce vide et tout près des surfaces CC' et DD' des deux métaux; « tout près » signifie que la distance des points à chacune de ces surfaces est supérieure à l'épaisseur δ des couches superficielles mais de même ordre de grandeur que celles-ci. Notons φ_{e1} et φ_{e2} les potentiels en points extérieurs $1'$ et $2'$. La différence de ces potentiels $\varphi_{e2} - \varphi_{e1}$ est appelée *différence de potentiel de contact extérieure* entre les métaux. Sa valeur est liée au travail d'extraction des électrons du métal. Supposons que le métal se trouve à 0 K. Sur la frontière CC' nous avons alors

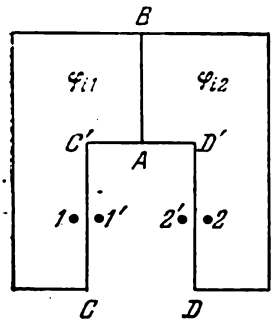


Fig. 256

$$e\varphi_{e1} - (e\varphi_{i1} + \mu_1) = A_1,$$

et sur la frontière DD'

$$e\varphi_{e2} - (e\varphi_{i2} + \mu_2) = A_2,$$

A_1 et A_2 étant les travaux d'extraction sur ces frontières. En soustrayant membre à membre et en utilisant (104.1) on obtient

$$\varphi_{e2} - \varphi_{e1} = \frac{1}{e}(A_2 - A_1). \qquad (104.4)$$

L'existence d'une différence de potentiel de contact extérieure témoigne de ce que dans l'espace vide délimité par les surfaces CC' et DD' et dans tout l'espace extérieur aux surfaces en contact il existe un champ électrique et que ces surfaces sont chargées d'électricité.

La différence de potentiel de contact extérieure vérifie également la loi de Volta. Pour le démontrer constituons avec plusieurs métaux un anneau fermé (cf. fig. 254) tout en ménageant de petits espaces vides entre les métaux avoisinants. La force électromotrice y est égale à zéro conformément à la loi de la conservation de l'énergie. Mais on peut la représenter sous la forme $\sum \Delta\varphi_i + \sum \Delta\varphi_e$ où on somme sur tous les contacts. Comme nous avons déjà démontré que $\sum \Delta\varphi_i = 0$, il en résulte que $\sum \Delta\varphi_e = 0$.

4. Volta démontra l'existence d'une différence de potentiel de contact par l'expérience classique suivante. Il fixa sur la tige d'un électroscope un disque de cuivre M dont la surface supérieure était recouverte d'une mince couche de gomme-laque isolante

(fig. 257, *a*). Un disque en zinc *N* muni d'un manche isolant *A* était posé sur ce disque. Le condensateur ainsi constitué possédait une grande capacité car la couche de gomme-laque était très mince. On reliait les deux disques par un fil de cuivre *B* pour un temps court. On constatait alors qu'entre *M* et *N* apparaissait une différence de potentiel de contact de l'ordre de 1 V, le zinc étant chargé positivement et le cuivre négativement. Cette différence de potentiel était cependant trop faible pour que les feuilles de l'électroscope s'écartent de façon notable. Pour la déceler on enlève le fil de connexion *B* et on soulève le disque supérieur *N* par le manche isolant *A*. Comme la charge de condensation ne varie pas et que la capacité diminue de plusieurs fois, la différence de potentiel augmente d'autant de fois et les feuilles de l'électroscope s'écartent notablement (fig. 257, *b*).

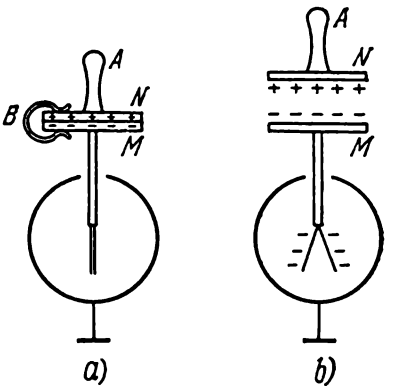


Fig. 257

5. On mesure la différence de potentiel de contact extérieure à l'aide d'une *méthode de compensation*. On dispose des plaques en matériaux *M* et *N* parallèlement et à petite distance l'une de l'autre (fig. 258). L'une des plaques est immobilisée, tandis que l'autre est mise en vibration à une fréquence de quelques dizaines de hertz

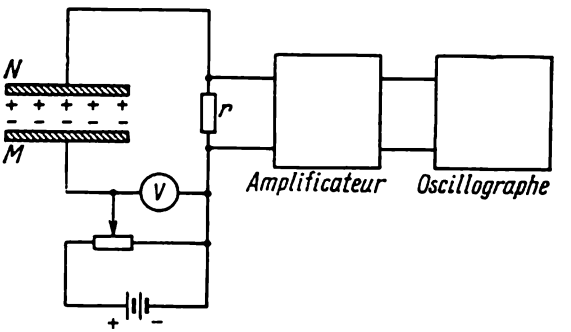


Fig. 258

avec une amplitude de quelques fractions de mm à l'aide d'un dispositif mécanique convenable. Comme ces plaques sont reliées entre elles par les fils de connexion du circuit de mesure, une différence de potentiel de contact φ et un champ électrique apparaissent entre

les plaques. Sur la surface intérieure de chacune des plaques apparaît une charge électrique $q = C\varphi$, où C est la capacité entre les plaques ; dans le circuit apparaît un courant alternatif $\dot{q} = \varphi\, dC/dt$ et sur la résistance de charge r une tension alternative $r\dot{q} = r\varphi\, dC/dt$. On peut compenser la différence de potentiel de contact φ par une tension de signe opposé fournie par une batterie. A ce moment aucun courant ne traversera plus la résistance r. Pour s'en rendre compte la tension aux bornes de la résistance de charge est appliquée après amplification aux bornes d'un oscillographe. Tant que la compensation n'est pas complète l'oscillographe enregistre des oscillations de tension aux bornes de la résistance de charge. En ajustant la tension fournie par la batterie à l'aide d'un diviseur de tension, on arrive à supprimer les signaux enregistrés par l'oscillographe. On lit alors au voltmètre la différence de potentiel de contact.

§ 105. Le courant thermoélectrique

1. Selon la loi des contacts de Volta, aucun courant ne circule dans un circuit fermé constitué par plusieurs métaux ou semiconducteurs (trois par exemple, cf. fig. 254) si ceux-ci ont *même température*. Mais si les contacts entre les corps se trouvent à des températures différentes, le circuit sera parcouru par un courant que l'on appelle *courant thermoélectrique*. L'effet d'excitation du courant thermoélectrique, ainsi que les effets Peltier et Thomson qui y sont intimement liés, sont désignés sous le nom générique de *thermoélectricité*. L'effet de courant thermoélectrique fut découvert en 1821 par le physicien allemand Seebeck (1770-1831) qui en fit une étude détaillée, mais donna une interprétation erronée de la nature de l'effet. (Seebeck pensait que sous l'action d'une différence de température entre des conducteurs différents et reliés l'un à l'autre apparaissait du magnétisme libre.)

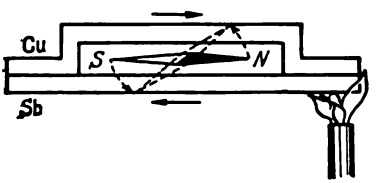


Fig. 259

On peut observer l'apparition d'un courant thermoélectrique à l'aide du dispositif suivant (fig. 259). On soude une plaque de cuivre (Cu) à une plaque d'antimoine (Sb). On dispose entre les plaques une aiguille aimantée NS. Si on échauffe l'une des soudures, un courant électrique traverse le circuit et l'aiguille magnétique dévie. D'après le sens de la déviation on peut juger du sens du courant : à travers le contact chaud le courant passe du cuivre à l'antimoine. Si on refroidit ce même contact au-dessous de la température ambiante, le courant circulera en sens inverse.

Pohl donna une démonstration plus spectaculaire du courant thermoélectrique. Une barre de cuivre recourbée est court-circuitée par un pont *12* en constantan (fig. 260, *a*). Le contact soudé *1* est échauffé par conduction à travers la barre de cuivre dont l'extrémité est chauffée par la flamme d'un bec Bunsen. Pour éviter que le contact *2* ne soit échauffé, l'autre extrémité de la barre de cuivre est recourbée et plonge dans de l'eau froide. Lorsque la différence de température entre les deux contacts est égale à 500 °C, la f.é.m. du couple cuivre-constantan est égale à 0,027 V seulement. Du fait de la très faible résistance de la barre de cuivre le courant thermoélectrique peut atteindre des centaines d'ampères. Pour mettre en évidence un courant aussi fort on prend une plaque de fer rectangulaire

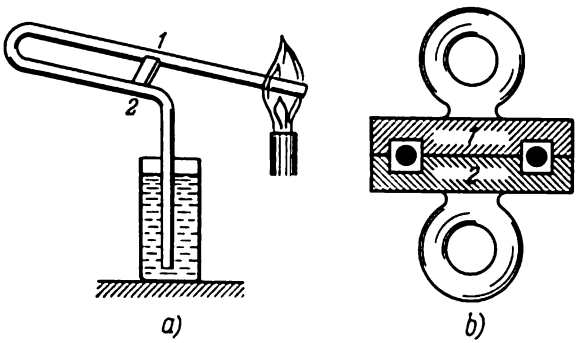


Fig. 260

percée de deux trous et coupée en deux parties égales *1* et *2* (comme indiqué sur la figure 260, *b* en coupe transversale). Une moitié de la plaque est placée au-dessus de la barre de cuivre recourbée et l'autre au-dessous. Cette plaque de fer se comporte en fait comme un noyau magnétique et la barre de cuivre comme l'unique spire qui l'entoure. La partie inférieure *2* joue le rôle d'armature. A l'aide de ce dispositif on arrive, dans des démonstrations, à soutenir un poids de plusieurs kilogrammes, armature comprise. Pohl arrivait à maintenir une charge de 50 kg.

Le métal ou le semiconducteur vers lequel se dirige le courant passant par le contact chaud est dit *positif*, l'autre métal est appelé *négatif*. Le premier se comporte en anode et le second en cathode. Par exemple, dans le couple thermoélectrique cuivre-antimoine (cf. fig. 259) l'antimoine est positif et le cuivre est négatif. Sur cette base Seebeck, suivi par d'autres chercheurs, rangea tous les métaux dans une *série* dite *thermoélectrique* analogue à la série de Volta.

2. La f.é.m. d'un couple thermoélectrique se compose des f.é.m. de ses deux soudures. La f.é.m. d'une soudure dépend de la nature des métaux en contact et de la température. En la notant $f(t)$ la

f.é.m. du couple thermoélectrique est égale à la différence

$$\mathscr{E} = f(t_1) - f(t_2), \tag{105.1}$$

où t_1 est la température de la soudure chaude et t_2 celle de la soudure froide. La dérivée $\alpha = df/dt$ est le *coefficient de force électromotrice* thermoélectrique. Tout comme la fonction f le coefficient α caractérise les deux métaux du couple thermoélectrique, ce qui présente des inconvénients pour la pratique. Pour obvier à ces inconvénients on a convenu de rapporter α à un seul et même métal, en l'occurrence au plomb. Cela signifie qu'on mesure α pour un couple dont une branche est en plomb et l'autre en métal étudié. Le coefficient de f.é.m. thermoélectrique α_{12} du métal *1* par rapport au métal *2* est défini par

$$\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2, \tag{105.2}$$

où α_1 et α_2 sont les coefficients de f.é.m. thermoélectrique des métaux *1* et *2* rapportés au plomb. Toutes ces grandeurs dépendent de la pureté des métaux et varient fortement avec leur dopage par des impuretés.

La fonction la plus simple est la fonction linéaire $f(t) = f_0 + \alpha t$. Dans ce cas

$$\mathscr{E} = \alpha (t_1 - t_2). \tag{105.3}$$

Il existe des couples de métaux vérifiant cette formule simple dans d'assez larges limites. Ce sont notamment les couples thermoélectriques (Cu, Bi), (Ag, Cu), (Au, Cu), (Pt, Fe). Pour d'autres couples la variation de f avec t est décrite par une fonction plus compliquée, par exemple $f(t) = f_0 + \alpha t + \beta t^2$, où α et β sont des constantes. Dans ce cas

$$\mathscr{E} = \alpha (t_1 - t_2) \left[1 + \frac{\beta}{\alpha} (t_1 + t_2) \right]. \tag{105.4}$$

C'est la formule qu'établirent M. P. Avénarius (1835-1895) sur la base de données expérimentales et Tait (1831-1901) sur la base de considérations semi-théoriques. Selon la formule (105.4) $\mathscr{E}$ s'annule pour $t_1 = t_2$ et pour $t_1 + t_2 = -\alpha/\beta$. La quantité $\tau = {}^1/_2 (t_1 + t_2)$ est appelée *température du point neutre*. Si on maintient constante la température t_2 et si on élève la température t_1, $\mathscr{E}$ croîtra suivant une loi parabolique, deviendra maximale pour $t_1 = \tau$, puis s'annulera et changera de signe pour $t_1 = 2\tau - t_2$. La température $t_1 = 2\tau - t_2$ à laquelle $\mathscr{E}$ s'annule est appelée *point d'inversion*.

3. La formule (104.2) définissant la différence de potentiel de contact interne à la frontière de deux métaux démontre par son existence même la nécessité de l'apparition du courant thermoélectrique. En effet, comme les potentiels chimiques μ_1 et μ_2 dépendent de la température et que les soudures des couples thermoélec-

triques se trouvent à des températures différentes, les valeurs des différences de potentiel de contact internes sont différentes, ce qui entraîne la rupture de l'équilibre et l'apparition d'un courant thermoélectrique.

Examinons cette question de plus près en considérant, pour plus de généralité, des semiconducteurs où le transport du courant est assuré par des électrons et par des trous. Supposons d'abord que seuls les électrons transportent le courant et considérons un semiconducteur ayant la forme d'une barre. Chauffons l'une des extrémités de la barre en maintenant constante la température de son autre extrémité. Comme pour les semiconducteurs la concentration des électrons de conduction augmente avec la température, la concentration électronique sera plus grande à l'extrémité chaude qu'à l'extrémité froide de la barre. Les électrons se mettront donc à diffuser de la région chaude vers la région froide. L'extrémité chaude qui perd des électrons acquerra ainsi une charge positive et l'extrémité froide acquerra une charge négative. A l'intérieur du semiconducteur apparaîtra donc un champ électrique $\boldsymbol{E}$ orienté de l'extrémité chaude vers l'extrémité froide. Ce champ qui ralentit la diffusion des électrons augmentera jusqu'à ce que la diffusion soit stoppée. Il s'établit à ce moment un *état stationnaire* caractérisé par ce que l'extrémité chaude est chargée positivement et l'extrémité froide négativement. On peut considérer tout formellement que le gradient de la concentration électronique qui s'établit dans le semiconducteur est équivalent à un champ de forces étrangères $\boldsymbol{E}^{\text{étr}}$ qui compense en régime stationnaire le champ électrique $\boldsymbol{E}$: $\boldsymbol{E}^{\text{étr}} = -\boldsymbol{E}$. Ainsi, dans un semiconducteur de type n, le champ des forces étrangères $\boldsymbol{E}^{\text{étr}}$ est orienté dans le sens allant de l'extrémité froide vers l'extrémité chaude de la barre (fig. 261, *a*).

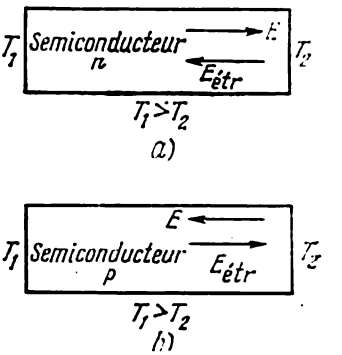


Fig. 261

On peut tenir le même raisonnement pour un semiconducteur de type p, mais c'est la *diffusion des trous* qui déterminera les processus. Dans ce cas l'extrémité chaude acquerra une charge négative et l'extrémité froide une charge positive. A l'état stationnaire le champ $\boldsymbol{E}$ sera dirigé dans le sens allant de l'extrémité froide vers l'extrémité chaude de la barre, et le champ des forces d'origine non électrique $\boldsymbol{E}^{\text{étr}}$ sera alors dirigé en sens inverse (fig. 261, *b*).

Dans les conducteurs à conduction mixte les électrons et les trous diffusent simultanément de la région chaude vers la région froide et créent des champs de sens opposés. Suivant les concentra-

tions et les mobilités des électrons et des trous le champ électrique résultant $\boldsymbol{E}$ et le champ des forces étrangères $\boldsymbol{E}^{\text{étr}} = -\boldsymbol{E}$ peuvent être dirigés vers l'extrémité chaude ou vers l'extrémité froide de la barre. Dans certains cas les champs électriques apparaissant du fait de la diffusion des électrons et des trous, se compensent exactement, i.e. $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E}^{\text{étr}} = 0$, et il ne subsiste alors aucune différence de potentiel entre les extrémités chaude et froide de la barre. C'est ce qui se produit dans le plomb et c'est la raison pour laquelle on détermine le coefficient de f.é.m. thermoélectrique α de tous les matériaux par rapport au plomb.

La différence de potentiel qui s'établit entre les régions chaude et froide d'un semiconducteur dépend de la nature du matériau.

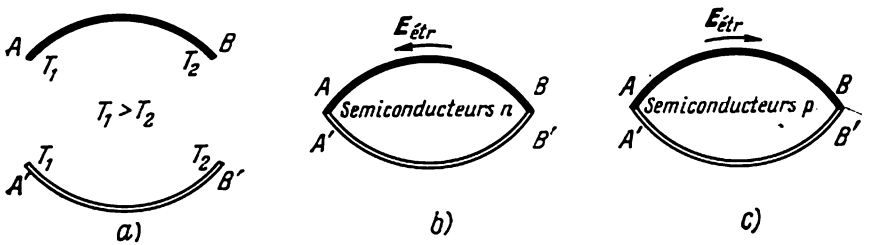


Fig. 262

Si on prend deux fils en matériaux différents AB et $A'B'$ dont les extrémités A et A' sont maintenues à une température donnée, les deux autres extrémités B et B' étant maintenues à une autre température (fig. 262, *a*), les différences de potentiels d'équilibre seront différentes entre les extrémités de chacun de ces fils. Formons un couple thermoélectrique en joignant les extrémités A, A' et B, B' (fig. 262, *b*, *c*). L'équilibre électrique s'en trouve rompu et le circuit $ABB'A'A$ sera parcouru par un courant thermoélectrique. Si le fil $A'B'$ est en plomb, $E^{\text{étr}} = 0$ et tout le courant sera dû aux forces étrangères s'exerçant dans le fil AB. Si ce dernier est un semiconducteur électronique, le courant traversant la soudure chaude ira de A vers A' (fig. 262, *b*) ; dans le cas où le fil AB serait un semiconducteur de type p, le courant circulera en sens inverse (fig. 262, *c*). Cela montre que, connaissant le signe du coefficient de f.é.m. thermoélectrique α, on peut en inférer de la nature des porteurs de courant dans les semiconducteurs : le coefficient α est positif pour les semiconducteurs de type p et négatif pour les semiconducteurs de type n.

4. Il découle de ces considérations que *les propriétés thermoélectriques des semiconducteurs doivent être plus intenses que celles des matériaux métalliques.* Dans les métaux les électrons sont à l'état de dégénérescence, de sorte que leur énergie ne dépend que peu de

la température et leur concentration est la même à haute et à basse température. Dans les métaux la position du niveau de potentiel chimique ne varie que peu avec la température. Pour cette raison le coefficient de f.é.m. thermoélectrique α des métaux et alliages ne dépasse pas quelques μV/ °C (tableau 6). Par contre, dans les semi-

Tableau 6

Valeurs du coefficient de force thermoélectromotrice des métaux et alliages

Matériau	α, μV/°C	Matériau	α, μV/°C	Matériau	α, μV/°C
Bismuth	—68,0	Sodium	—6,5	Or	+2,9
Constantan	—38,0	Platine	—4,4	Zinc	+3,1
Copel	—38,0	Mercure	—4,4	Tungstène	+3,6
Nickel	—20,8	Aluminium	—0,4	Cadmium	+4,6
Nichrome	—18,0	Etain	—0,2	Molybdène	+7,6
Alumel	—17,3	Magnésium	0,0	Fer	+15,0
Potassium	—13,6	Plomb	0,0	Chromel	+24
Palladium	—8,9	Argent	+2,7	Antimoine	+43

conducteurs, les concentrations des électrons et des trous, ainsi que tous les autres paramètres dont il a été question ci-dessus, varient fortement avec la température. Par suite le coefficient α des semiconducteurs est beaucoup plus grand, pouvant dépasser 1000 μV/ °C (tableau 7).

Tableau 7

Valeurs du coefficient de force thermoélectromotrice des semiconducteurs

Matériau	α, μV/°C	Matériau	α, μV/°C	Matériau	α, μV/°C
Tl_2S	—780	Pb—Te—Se	—160	Bi_2Te_3	+170
MoS	—770	PbS	—160	Bi_2Se_3	+200
V_2O_5	—750	PbSe	—160	SbZn	+200
WO_3	—740	PbTe	—160	NiO	+240
CuO	—700	SnO	—140	MoS_2	+300
Fe_2O_3	—613	CdO	—40	Mn_2O_3	+385
FeO	—500	CuS	—7	CoO	+450
Fe_3O_4	—430	FeS	+26	SiC (noir)	+800
SiC (vert)	—300	CdO	+30	Tl_2S	+800
FeS_2	—200	Bi_2S_3	+80	Se	+1000
$CoSb_3$	—200	Sb_2Te_3	+100	CuO	+1120
MgO_3H_2	—200	$FeTiO_3$	+140	Cu_2O	+1200
Bi—Te—Se	—170	Bi—Sb—Te	+160		

5. Les effets thermoélectriques peuvent être utilisés pour générer des courants électriques. Un seul couple thermoélectrique ne possède qu'une petite force électromotrice, ce qui oblige de monter en série un grand nombre de couples thermoélectriques (fig. 263) pour obtenir une tension notable. Si toutes les soudures impaires sont maintenues à une température donnée et toutes les soudures paires sont à une autre température, les forces électromotrices sont à une autre température, les forces électromotrices de tous les couples s'additionnent. Une batterie de couples thermoélectriques est semblable à une machine thermique branchée entre une source chaude et une source froide. Dans une machine thermique la majeure partie de la chaleur reçue de la chaudière est dissipée par conductibilité thermique et par effet Joule. Le rendement des batteries de couples thermoélectriques métalliques serait trop faible (0,1 % environ). Aussi ne les utilise-t-on que pour la mesure des températures et de l'énergie rayonnante (voir t. II, § 5). Les batteries de couples de semiconducteurs sont beaucoup plus efficaces. Une des branches des couples est en semiconducteur de type *n* et l'autre en semiconducteur de type *p*. Le rendement atteint aujourd'hui 15 % et sera encore accru à l'avenir. En U.R.S.S. et dans les pays industriels des recherches sont en cours pour réaliser la conversion directe de l'énergie du Soleil, de celle des réactions nucléaires, etc., en électricité.

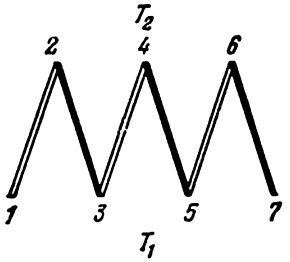


Fig. 263

§ 106. L'effet Peltier

1. En 1834, l'horloger français Peltier (1785-1845) publia un article sur les anomalies de température observées à la frontière de deux conducteurs traversés par un courant électrique. Peltier n'arrivait pas à bien saisir la nature de l'effet qu'il découvrit et ce fut Lenz (1804-1865) qui établit, en 1838, toute la signification de l'effet. Lenz plaça une goutte d'eau dans un creux pratiqué à la surface de contact d'une tige de bismuth avec une tige d'antimoine. Lorsqu'il faisait passer un courant électrique dans un sens, l'eau se congelait et lorsqu'il inversait le sens du courant, la glace fondait. Il établit ainsi que lorsqu'un courant traverse le contact de deux conducteurs électriques, en plus de la chaleur de Joule il s'y dégage ou s'absorbe suivant le sens du courant une quantité de chaleur supplémentaire que l'on appela *chaleur de Peltier*. C'est en cela que réside l'*effet Peltier*. C'est donc un effet inverse de l'effet Seebeck. A la différence de la chaleur de Joule-Lenz, qui est proportionnelle au carré de l'intensité de courant, *la chaleur de*

Peltier est proportionnelle à l'intensité de courant et change de signe lorsqu'on inverse le sens du courant. Conformément aux données expérimentales la chaleur de Peltier se laisse exprimer par la formule

$$Q_P = \Pi q, \qquad (106.1)$$

où q est la quantité d'électricité ayant traversé le contact et Π le *coefficient* dit *de Peltier* dont la valeur dépend de la nature des matériaux en contact et de leur température. La chaleur de Peltier Q_P est positive s'il se produit un dégagement de chaleur et elle est négative si la chaleur est absorbée.

Peltier imagina une belle expérience de démonstration de l'effet qu'il découvrit. Deux bandes, l'une en antimoine AB, l'autre en bismuth CD, étaient soudées l'une à l'autre en forme de croix

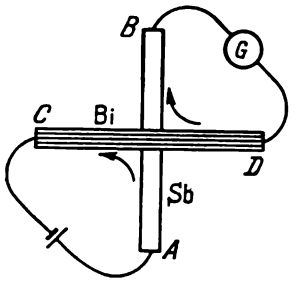


Fig. 264

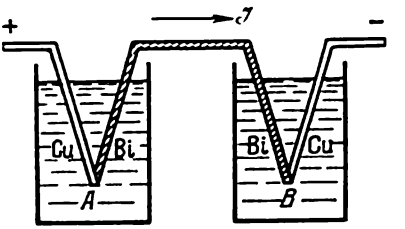


Fig. 265

(fig. 264 — *croix* dite *de Peltier*). Les extrémités A et C étaient connectées à une batterie et les extrémités B et D étaient reliées à un galvanomètre. Lorsque le courant fourni par la batterie allait de l'antimoine vers le bismuth, la soudure s'échauffait. On débranchait alors la batterie et on branchait le galvanomètre qui indiquait le passage d'un courant du bismuth vers l'antimoine, i.e. un courant de sens opposé à celui fourni par la batterie. C'est justement le résultat qui satisfait au principe de Le Chatelier-Braun. Si on reprend l'expérience en faisant passer le courant fourni par la batterie du bismuth vers l'antimoine, la soudure se refroidit et le courant que décelait le galvanomètre change lui aussi de sens.

2. Pour procéder à une étude quantitative de cet effet, Le Roux soudait des fils de cuivre aux extrémités d'un fil de bismuth et plongeait les soudures dans deux calorimètres (fig. 265). En faisant passer un même courant $\mathcal{J}$ à travers les deux soudures pendant un temps déterminé t, il mesurait la chaleur dégagée dans les deux calorimètres. Si les résistances R des fils plongeant dans les calorimètres étaient les mêmes, la chaleur de Joule dégagée dans les deux calorimètres était la même, égale à $R\mathcal{J}^2t$. Quant à la chaleur de Peltier elle devrait être positive dans un calorimètre et négative dans l'autre.

Là où le courant $\mathcal{J}$ allait du cuivre au bismuth, de la chaleur de Peltier était libérée et là où il allait du bismuth au cuivre, de la chaleur de Peltier était absorbée. On peut donc écrire

$$Q_1 = R\mathcal{J}^2t + \Pi\mathcal{J}t, \quad Q_2 = R\mathcal{J}^2t - \Pi\mathcal{J}t,$$

où Q_1 est la quantité de chaleur totale libérée dans le premier calorimètre et Q_2 la quantité de chaleur totale libérée dans le second calorimètre. En retranchant membre à membre il vient

$$2\Pi\mathcal{J}t = Q_1 - Q_2.$$

On en déduit le coefficient de Peltier. C'est par ce procédé qu'on trouva que pour les métaux le coefficient de Peltier était de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-3} V et pour les semiconducteurs de l'ordre de $3 \cdot 10^{-1}$ à 10^{-3} V.

3. Selon la théorie classique l'effet Peltier serait dû à ce que les électrons transportés par le courant d'un métal à l'autre seraient accélérés ou ralentis par la différence de potentiel de contact interne entre les deux métaux. Dans le premier cas l'énergie cinétique des électrons deviendrait plus grande et se dégagerait ensuite sous forme de chaleur, et dans le second elle diminuerait et cette diminution d'énergie serait compensée aux dépens de l'agitation thermique des atomes du second conducteur, qui de ce fait se refroidirait. De ce point de vue le coefficient de Peltier serait confondu avec la différence de potentiel de contact interne. Or ce n'est pas correct puisque selon la théorie classique l'énergie cinétique moyenne de l'agitation thermique des électrons est la même dans les deux conducteurs en contact mutuel. Or cette conclusion est erronée puisque les positions des niveaux de Fermi sont différentes dans les deux métaux. L'interprétation classique ne tient compte que de la différence d'*énergie potentielle* des deux côtés de la surface de séparation des métaux, tout en supposant que les énergies cinétiques moyennes sont égales. Pour que l'explication devienne correcte, il faut remplacer la variation de l'énergie potentielle accompagnant le transport d'un électron d'un métal dans l'autre par la variation de son *énergie totale*. Ainsi corrigée l'interprétation s'applique aussi bien aux métaux qu'aux semiconducteurs électroniques (de type n).

L'interprétation de l'effet sera parfaitement analogue pour des semiconducteurs de type p en contact mutuel. Il est évident que la surface de séparation sera traversée par des électrons. D'un côté de cette surface des paires électron-trou sont générées, de l'autre il se produit une recombinaison des électrons et des trous. L'un de ces processus s'accompagne d'une libération d'énergie, l'autre d'une absorption d'énergie. Le signe du coefficient de Peltier dépend du rapport de ces énergies.

Comme tous les autres effets thermoélectriques, l'effet Peltier est particulièrement intense lorsqu'on associe des semiconducteurs de types

n et p. Considérons le contact d'un semiconducteur de type *n* avec un semiconducteur de type *p* et supposons que le sens du champ électrique est tel que le courant va du semiconducteur de type *p* au semiconducteur de type *n*. Dans ce cas les électrons du semiconducteur de type *n* et les trous du semiconducteur de type *p* s'y déplacent à la rencontre les uns des autres. Un électron appartenant à la bande de conduction du semiconducteur électronique, après avoir traversé la frontière, se trouve dans la bande de valence du semiconducteur de type *p* et y occupe la place d'un trou. Cette recombinaison s'accompagne d'une libération d'énergie qui se dégage sous forme de chaleur dans le contact. Dans le cas où le courant traverse la surface de séparation en allant du semiconducteur de type *n* vers le semiconducteur de type *p*, les électrons du premier et les trous du second se déplacent en sens opposés. Les trous qui s'éloignent de la région de contact y sont remplacés par les trous qui apparaissent à la suite de la transition d'électrons de la bande de valence vers la bande de conduction du semiconducteur de type *p*. La génération de ces paires électron-trou consomme de l'énergie qui est fournie par les vibrations thermiques des atomes du réseau cristallin. Les électrons et les trous générés sont entraînés par le champ électrique en sens opposés. Tant que le courant passe à travers le contact des paires sont constamment générées avec absorption de chaleur dans le contact. Ainsi, si le courant va du type *p* vers le type *n*, il se produit un dégagement de chaleur de Peltier et s'il passe dans le sens opposé, il se produit une absorption de chaleur.

A. F. Ioffé suggéra d'utiliser l'effet Peltier dans les semiconducteurs pour réaliser des réfrigérateurs. De construction simple, ces réfrigérateurs présentent de nombreux avantages et trouvent des applications intéressantes.

§ 107. Etude thermodynamique des effets thermoélectriques. Effet Thomson

1. En 1853, Clausius appliqua les principes de la thermodynamique aux effets thermoélectriques. Considérons un couple thermoélectrique dont la soudure chaude est maintenue à une température constante T_1 et dont la soudure froide est maintenue à une température constante T_2 (fig. 266). Lorsqu'on y fait passer un courant $\mathcal{J}$, dans la soudure *1* la chaleur de Peltier $\Pi_1\mathcal{J}$ est libérée dans l'unité de temps et dans la soudure *2* la chaleur de Peltier $\Pi_2\mathcal{J}$ est absorbée dans l'unité de temps. (Les chaleurs doivent être considérées comme des quantités algébriques pouvant être positives et négatives.) Le passage du courant donne lieu aussi à un dégagement de chaleur par effet Joule. On peut cependant négliger cette dernière en rendant infiniment petite la différence de température $T_1 - T_2$. En effet, l'effet Peltier étant proportionnel à $\mathcal{J}$ et l'effet Joule à $\mathcal{J}^2$.

$\mathcal{J}$ tend vers zéro et la chaleur de Joule devient infiniment petite devant la chaleur de Peltier lorsque $T_1 - T_2 \to 0$. Si on néglige la transmission de chaleur par conduction thermique on peut assimiler le passage du courant thermoélectrique à un cycle réversible et appliquer l'égalité de Clausius

$$\frac{\Pi_1}{T_1} - \frac{\Pi_2}{T_2} = 0. \tag{107.1}$$

Quoique cette relation fût établie lorsque la différence $T_1 - T_2$ était infiniment petite elle reste vérifiée avec les hypothèses admises si la différence $T_1 - T_2$ est finie. Pour le démontrer écrivons (107.1) d'abord sous forme différentielle :

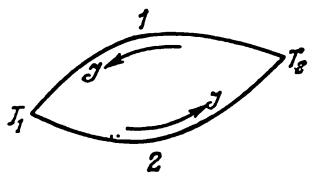


Fig. 266

$$\frac{d}{dT}\left(\frac{\Pi}{T}\right) = 0, \tag{107.2}$$

puis intégrons. On obtient alors

$$\frac{\Pi}{T} = \text{const.} \tag{107.3}$$

Appliquons à la transformation en cause le premier principe de la thermodynamique. La force thermoélectromotrice $\mathcal{E} = \alpha\,(T_1 - T_2)$ produit par unité de temps le travail $\mathcal{E}.\mathcal{J}$. En égalant ce travail à la chaleur de Peltier et en divisant les deux membres par $\mathcal{J}$ on obtient

$$\alpha\,(T_1 - T_2) = \Pi_1 - \Pi_2 = \frac{d\Pi}{dT}\,(T_1 - T_2),$$

d'où

$$\frac{d\Pi}{dT} = \alpha. \tag{107.4}$$

Compte tenu de (107.3) on trouve

$$\alpha = \frac{\Pi}{T} = \text{const.} \tag{107.5}$$

Ainsi, d'après la théorie de Clausius, la force thermoélectromotrice doit être proportionnelle à $T_1 - T_2$ quelles que soient les températures T_1 et T_2, i.e. s'exprimer par la formule $\mathcal{E} = \alpha\,(T_1 - T_2)$. En général cette conclusion n'est pas corroborée par l'expérience (cf. § 105, pt. 2).

2. W. Thomson développa en même temps que Clausius (1854) et indépendamment de celui-ci une *théorie thermodynamique de la thermoélectricité* qui conduisait à des résultats conformes à l'expérience. Thomson tint compte de ce que les différentes régions d'un couple thermoélectrique n'étaient pas également échauffées et ne pouvaient donc se trouver dans les mêmes états physiques. Un conducteur échauffé d'une façon non uniforme doit se comporter

comme un système composé de segments hétérogènes en contacts mutuels. Thomson en conclut que de la chaleur de Peltier doit être libérée ou absorbée aux frontières de ces segments et le confirma par des expériences directes. Cette chaleur est appelée *chaleur de Thomson* et l'effet correspondant *effet Thomson*.

La théorie électronique permet d'expliquer très simplement l'effet Thomson. Considérons un semiconducteur de type n et posons que $T_1 > T_2$, i.e. le gradient de température est dirigé du point *2* vers le point *1* (fig. 267, *a*). Par suite de la diffusion la concentration des électrons au point *1* devient inférieure à la concentration au point *2*. De ce fait il apparaît un champ électrique E orienté de

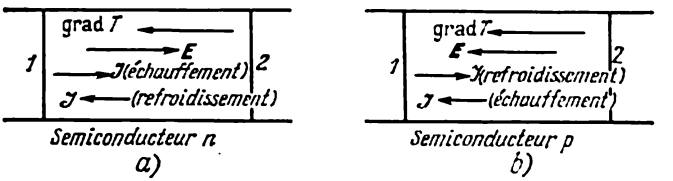


Fig. 267

1 vers *2*, donc dans un sens opposé à celui du gradient de température. Si le semiconducteur est parcouru par un courant dans le même sens que celui du gradient de température (les électrons se déplaçant dans le sens du champ E), le champ E ralentira les électrons et le segment *12* du semiconducteur s'en trouvera refroidi. Si le courant circulait en sens inverse, le segment *12* serait échauffé. Dans un semiconducteur de type p la situation est inverse (fig. 267, *b*). L'effet se présente comme si à un flux de chaleur usuel déterminé par la conductibilité thermique venait se superposer le flux de chaleur supplémentaire lié au passage du courant électrique. Dans les semiconducteurs de type p le flux de chaleur supplémentaire est dirigé dans le sens du courant, tandis que dans les semiconducteurs de type n il est dirigé dans le sens contraire à celui du courant électrique. On dit que l'effet Thomson est positif lorsque le courant électrique allant dans le sens du gradient de température échauffe le conducteur, et il est dit négatif si dans les mêmes conditions il refroidit le conducteur.

En 1867, Le Roux entreprit une étude quantitative de l'effet Thomson. Il mettait en contact deux barres identiques AB et CD (fig. 268) en matériau étudié. Les extrémités A et C réunies étaient maintenues à 100 °C et les extrémités libres B et D étaient maintenues à 0 °C. Tant que le circuit n'était pas fermé, les températures des points a et b mesurées à l'aide de thermocouples étaient identiques. Lorsqu'on fermait le circuit et qu'on y faisait passer un courant électrique, dans une des barres le flux de chaleur supplémen-

taire passait de gauche à droite et dans l'autre de droite à gauche. Par suite on enregistrait une différence de température entre les points a et b. Lorsqu'on inversait le sens du courant, le signe de la différence de température s'inversait.

La quantité de chaleur de Thomson dégagée par unité de temps dans un segment dx du conducteur est donnée par

$$dQ = \sigma \mathcal{J} \frac{dT}{dx} dx, \tag{107.6}$$

où σ est le *coefficient de Thomson* qui dépend de la nature du matériau et de la température T. Le sens positif est celui du gradient de température, i.e. celui des températures croissantes.

3. Il est maintenant facile de corriger la théorie de Clausius en y tenant compte de la chaleur de Thomson. Si la différence de

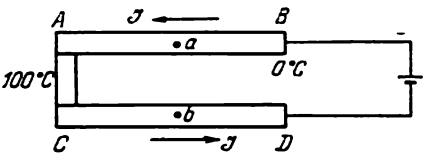


Fig. 268

température $T_1 - T_2$ est infiniment petite et si les branches du couple sont infiniment courtes (cf. fig. 266), il se dégagera par unité de temps dans la première branche une quantité de chaleur de Thomson égale à $\sigma_1 \mathcal{J} (T_1 - T_2)$ et dans la seconde une quantité de chaleur égale à $\sigma_2 \mathcal{J} (T_1 - T_2)$ sera absorbée. Par suite l'égalité de Clausius doit s'écrire

$$\frac{\Pi_1}{T_1} - \frac{\Pi_2}{T_2} + \left(\frac{\sigma_1}{T_1} - \frac{\sigma_2}{T_2}\right)(T_1 - T_2) = 0.$$

En mettant cette expression sous forme différentielle et en remarquant que la différence $T_1 - T_2$ est infiniment petite, on obtient

$$\frac{d}{dT}\frac{\Pi}{T} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{T} \tag{107.7}$$

ou

$$\frac{\Pi}{T} - \frac{d\Pi}{dT} = \sigma_1 - \sigma_2. \tag{107.8}$$

L'application du premier principe donne maintenant

$$\Pi_1 - \Pi_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)(T_1 - T_2) = \alpha (T_1 - T_2).$$

Après différentiation et division par $T_1 - T_2$ on obtient

$$\frac{d\Pi}{dT} + (\sigma_1 - \sigma_2) = \alpha. \tag{107.9}$$

Compte tenu de (107.8) on trouve

$$\Pi = \alpha T, \tag{107.10}$$

i.e. la même relation (107.5) que celle de la théorie de Clausius à cette différence près que le coefficient de force thermoélectromotrice α n'est plus constant mais dépend de la température.

4. Le point faible de la théorie thermodynamique de Clausius-Thomson réside en ce qu'elle ne tient compte que des *transformations réversibles* ayant lieu dans le circuit thermoélectrique. Or ce circuit est aussi le siège de *transformations irréversibles*: conductibilité thermique et dégagement de chaleur par effet Joule. On peut se libérer de ce dernier en rendant les cycles infiniment petits, comme nous l'avons fait plus haut. Mais la quantité de chaleur transportée par conduction est du même ordre et parfois plus grande que la quantité de chaleur de Peltier mise en jeu. Si on maintient constantes toutes les températures, la conductibilité thermique ne modifie pas le bilan d'énergie puisque par conductibilité thermique on ne fait que transporter une quantité d'énergie invariable d'une région à une autre du circuit thermoélectrique. Néanmoins l'existence de transports de chaleur irréversibles rend douteuse la possibilité d'appliquer le deuxième principe de la thermodynamique sous sa forme réversible. Thomson surmonta cette difficulté en remarquant que la conductibilité thermique et la chaleur de Joule étaient des effets secondaires de natures différentes de celle des effets Seebeck, Peltier et Thomson. Comme la conductibilité thermique et le dégagement de chaleur par effet Joule n'affectent pas les effets thermoélectriques on pourrait ne pas en tenir compte. Ce raisonnement est peu convaincant. Plus tard Onsager précisa les conditions dans lesquelles on pouvait étudier séparément les transformations réversibles et irréversibles. Il semble que ces conditions soient vérifiées du moins de façon approchée dans les métaux et les semiconducteurs, puisqu'à la précision des mesures près les résultats de la théorie thermodynamique de Clausius-Thomson sont confirmés par l'expérience.

PROBLÈME

Tait supposa que le coefficient de Thomson σ était proportionnel à la température absolue. Montrer que cette hypothèse conduit à la formule d'Avénarius pour la force électromotrice $\mathscr{E}$.

Solution. On tire des équations (107.9) et (107.10)

$$\frac{d}{dT}\left(T\frac{d\mathscr{E}}{T}-\mathscr{E}\right)+\sigma_1-\sigma_2=0.$$

En intégrant cette équation et en tenant compte de l'hypothèse de Tait on arrive au résultat cherché.

§ 108. Redressement du courant par les contacts de semiconducteurs

1. Le contact de deux métaux, de deux semiconducteurs ou d'un métal avec un semiconducteur exerce une *action de redressement*. Cela signifie que la résistance du contact dépend du *sens* du courant qui le traverse: dans un sens (sens dit *inverse*) cette résistance est grande et dans l'autre sens (sens dit *direct*) elle est faible. *L'effet de redressement est particulièrement fort sur la surface de séparation de semiconducteurs de types n et p lorsque le travail d'extraction des électrons du semiconducteur n est plus petit que le travail d'extraction des électrons du semiconducteur de type p.* Un tel contact est appelé *jonction p-n*. On n'arrive pas à réaliser une bonne jonction *p-n* en accolant simplement deux cristaux de conductibilité différente, car du fait de la rugosité des surfaces le contact entre les deux ne se fera qu'en quelques points isolés et dans les espaces vides les surfaces pourront s'oxyder, se contaminer, etc. Il faut donc que les deux types de conductibilité soient formés dans un seul monocristal par dopage avec un donneur et un accepteur (cf. § 100). Le donneur rend le semiconducteur de type *n* et l'accepteur lui confère une conductibilité de type *p*. Par exemple, si on prend une plaquette de germanium ou de silicium, on prendra comme donneur un élément du cinquième groupe du système périodique (phosphore, arsenic, etc.) et comme accepteur un élément du groupe III (bore, indium, etc.). Une partie de la plaquette étant transformée en type *n* et l'autre en type *p*, il apparaît entre les deux régions une mince couche intermédiaire appelée jonction *p-n*.

2. La conduction unilatérale des jonctions *p-n* est déterminée par les processus physiques suivants. Supposons d'abord que les deux semiconducteurs soient séparés, l'un étant dopé par un donneur et l'autre par un accepteur. De ce fait les bords des bandes d'énergie coïncident dans les deux semiconducteurs (fig. 269, *a*). Les niveaux donneurs se trouvent dans le semiconducteur de type *n à proximité de la bande de conduction* et les niveaux accepteurs se trouvent dans le semiconducteur de type *p à proximité de sa bande de valence*. L'énergie moyenne des électrons de conduction et le niveau du potentiel chimique μ seront plus grands et le travail d'extraction sera plus petit dans le premier semiconducteur que dans le second.

Amenons les semiconducteurs en contact mutuel (fig. 269, *b*). Comme le travail d'extraction des électrons du semiconducteur de type *n* est plus petit que celui du semiconducteur de type *p*, un plus grand nombre d'électrons passeront du premier dans le second. Le premier se chargera positivement et le second négativement. Dans une mince couche intermédiaire entre les deux semiconducteurs apparaît un champ électrique de contact dirigé du semiconducteur

de type n vers le semiconducteur de type p. Sous l'action de ce champ les niveaux d'énergie du premier s'abaissent et ceux du second se relèvent. Le champ électrique de contact s'opposera au passage des électrons du semiconducteur de type n dans le semiconducteur de type p. Le transfert d'électrons s'arrêtera dès que les niveaux de potentiel chimique deviendront égaux dans les deux semiconducteurs. A gauche de la zone de transition les niveaux donneurs se trouveront à la même distance de la bande de conduction qu'avant mise en contact, tandis qu'à droite de la zone de transition cette distance devient plus grande. De ce fait la zone de transition, sa

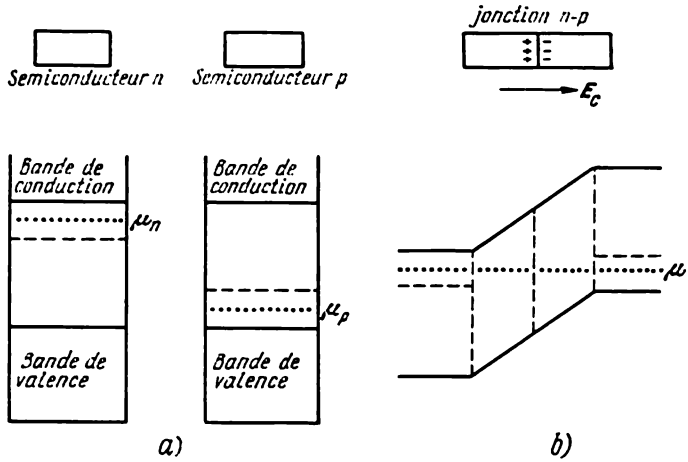


Fig. 269

partie de droite surtout, sera appauvrie en électrons de conduction. Elle sera aussi appauvrie en trous, surtout dans sa partie de gauche. On serait tenté de dire que le champ électrique de contact E_c repousse les électrons vers l'intérieur du semiconducteur de type n et les trous vers l'intérieur du semiconducteur de type p, de sorte que la zone de transition entre les deux est appauvrie en porteurs de courant des deux types, i.e. en électrons et en trous. Aussi, malgré sa faible épaisseur (10^{-4} à 10^{-6} cm), la résistance de la zone de transition est-elle beaucoup plus grande que la résistance totale des deux semiconducteurs mis en contact mutuel.

3. Appliquons maintenant un champ électrique extérieur E dirigé du semiconducteur de type n vers le semiconducteur de type p, donc de même sens que le champ interne E_c. Du fait de la grande résistance de la zone de transition la totalité de la chute de tension correspondant au champ appliqué sera pratiquement localisée dans la zone de transition où l'intensité du champ électrique E peut de-

venir très grande. Ce champ renforce le champ interne E_c, ce qui réduit encore plus les concentrations d'électrons et de trous dans la zone de transition. La résistance de la zone de transition devenant encore plus grande, le courant n'y pourra pratiquement plus passer. Si par contre le champ extérieur E est dirigé à l'encontre du champ interne E_c, il suffira qu'il soit faible pour compenser complètement le champ E_c. Rien n'empêchera alors les électrons et les trous de pénétrer dans la zone de transition dont la résistance deviendra pratiquement nulle et ne pourra s'opposer au passage du courant électrique. Dans le cas d'un courant alternatif, suivant son intensité et son sens, la résistance de la jonction variera pratiquement de zéro à l'infini et le courant ne passera à travers la jonction *p-n* que lorsqu'il sera dirigé du semiconducteur de type *p* vers le semiconducteur de type *n*. C'est le principe de fonctionnement des redresseurs à semiconducteurs.

Il importe de noter que dans tout semiconducteur on trouve à côté des *porteurs* dits *majoritaires* un nombre relativement faible de *porteurs* dits *minoritaires* (cf. fin du § 100). Dans les semiconducteurs de type *n* on trouve des trous à côté des électrons de conduction et dans les semiconducteurs de type *p* on trouve, en plus des trous, des électrons de conduction. Si le champ extérieur E est dirigé de *n* vers *p* il ne s'oppose nullement à la pénétration des porteurs minoritaires dans la zone de transition. La jonction n'est alors traversée que par un courant de porteurs minoritaires qui est faible puisque la concentration de ces porteurs est petite.

4. Les redresseurs à semiconducteurs remplacent avantageusement les types anciens de redresseurs car ils sont caractérisés par un haut rendement, de petites dimensions et un prix de revient faible. Il existe plusieurs types de redresseurs à semiconducteurs, mais nous nous contenterons de donner une description succincte d'un seul type de redresseur à germanium. Ce type est constitué par une plaquette de germanium de type *n* d'un côté de laquelle on fait fondre une petite bille d'indium et de l'autre côté une petite bille d'étain. Cette dernière ne sert d'ailleurs que d'électrode pour le branchement de la diode dans le circuit. L'indium, lui, sert à conférer une conductibilité de type *p* à une partie de la plaquette, donc à réaliser une jonction *p-n* avec le germanium de type *n* de la plaquette. Ayant une aire de ~ 1 mm^2, la jonction *p-n* obtenue laisse passer sous une tension de 1 V un courant de 1 A et plus, le courant inverse ne dépassant pas quelques microampères. Avec une jonction de plusieurs centimètres carrés les redresseurs au germanium et au silicium peuvent supporter le passage de courants de plusieurs centaines d'ampères, quoique le dispositif tienne dans une seule main. La tension inverse maximale pouvant être appliquée à ces redresseurs atteint des centaines ou même des milliers de volts.

Les redresseurs à semiconducteurs ainsi que les autres dispositifs

à semiconducteurs ne servent pas seulement au redressement de courants industriels. Les dispositifs à semiconducteurs trouvent de nombreuses applications en radiotechnique, pour le redressement et la transformation des oscillations électriques de hautes fréquences, pour l'amplification et la génération de signaux électriques, ainsi que dans les calculatrices électroniques. Ils ont remplacé dans une large mesure les tubes à vide et aujourd'hui sans eux la résolution de nombreux problèmes techniques serait impensable. Les applications des semiconducteurs constituent un domaine immense que l'on ne peut étudier que dans des cours spéciaux.

CHAPITRE IX

COURANTS ÉLECTRIQUES DANS LES GAZ

§ 109. Ionisation et recombinaison

1. Dans leur état normal des gaz, y compris les vapeurs métalliques, sont composés d'atomes et de molécules *électriquement neutres* et par suite ne sont pas conducteurs d'électricité. Ne sont conducteurs d'électricité que les *gaz ionisés* qui contiennent, outre les atomes et les molécules neutres, des électrons et des ions positifs et négatifs. Les ions se forment lorsque les gaz sont soumis à l'action de hautes températures, de rayons X et ultraviolets, de radiations émises par les éléments radioactifs, des rayons cosmiques ou encore lorsque les atomes des gaz entrent en collision avec des électrons ou d'autres particules élémentaires ou atomiques rapides. Dans tous ces cas un ou plusieurs électrons sont arrachés aux couches électroniques périphériques des atomes ou des molécules. Ce processus est appelé *ionisation* et conduit à l'apparition d'électrons et d'ions positifs. Les électrons libérés par ionisation peuvent s'associer à des atomes ou à des molécules neutres et les transformer en ions négatifs. La présence d'ions et d'électrons libres dans les gaz les rend conducteurs d'électricité. Notons que même dans les conditions normales les gaz, l'air par exemple, possèdent une très faible conductibilité due aux radiations des substances radioactives disséminées à la surface de la Terre ainsi qu'aux rayons cosmiques. En 1785, Coulomb avait déjà décelé la conductibilité électrique de l'air. En observant les pertes d'électricité accumulée sur des conducteurs isolés il arriva à la conclusion qu'une partie de l'électricité se perd non pas par les isolants, mais directement dans l'air. Cette affirmation fut confirmée plus tard (1889) par Boys. En suspendant des feuilles d'or d'électroscope à des cylindres en quartz dont l'un était gros et court et l'autre long et fin, il constata que la perte d'électricité était la même dans les deux cas. Si les feuilles d'or ne pouvaient perdre leurs charges qu'à travers les cylindres de quartz, on n'aurait pas observé l'égalité des pertes d'électricité. L'étude systématique des courants et des décharges électriques dans les gaz ne commença qu'à la fin du XIXe siècle. On détermina alors la nature des décharges électriques dans les gaz dans différentes conditions. Vu le caractère très compliqué de ces phénomènes, il n'existe pas encore de théorie quantitative exacte.

L'ionisation d'un gaz résultant de l'arrachement d'électrons à des molécules ou à des atomes est appelée *ionisation volumétrique* parce que la source d'ions est répartie dans tout le volume occupé par le gaz. On connaît aussi l'*ionisation de surface* caractérisée par ce que les ions et les électrons proviennent des parois du vase contenant le gaz ou de la surface des corps introduits dans le gaz. Par exemple, les corps incandescents constituent une source d'électrons (*émission thermoïonique*) de même que les surfaces métalliques

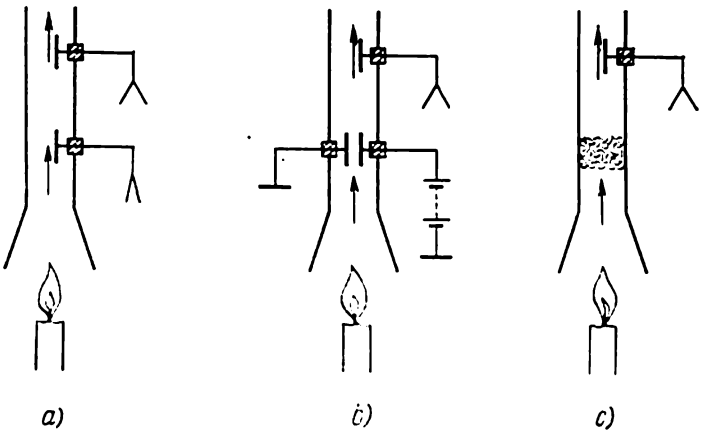


Fig. 270

irradiées par un rayonnement ultraviolet ou tout autre rayonnement électromagnétique à ondes courtes (*effet photoélectrique*).

2. Dès que cesse l'action ionisante, les ions positifs et négatifs du gaz s'unissent pour former des molécules et des atomes neutres. Ce processus est appelé *recombinaison*. Du fait de la recombinaison la conductibilité du gaz disparaît ou plus exactement retrouve sa valeur initiale ; elle ne disparaît pas brutalement mais progressivement car une recombinaison complète nécessite un temps fini.

Décrivons une expérience servant à la démonstration des phénomènes de recombinaison et d'ionisation dans les gaz. A l'intérieur d'un tube métallique vertical on attache à différentes hauteurs des électrodes métalliques reliées par des fils isolés à des électroscopes se trouvant à l'extérieur du tube (fig. 270, *a*). On dispose près de l'orifice inférieur du tube une bougie allumée. Dans la flamme de la bougie se forment des ions positifs et négatifs qui sont emportés par les courants de gaz chauds qui montent dans le tube. L'air contenu dans le tube devient conducteur et les feuilles des électroscopes s'affaissent. L'expérience montre que plus la hauteur à laquelle se trouve une électrode donnée est grande, plus l'affaissement des

feuilles de l'électroscope qui y est relié se fait lentement. Cela tient à ce que pendant le temps d'ascension une part notable d'ions subit une recombinaison, la conductibilité de l'air diminue et l'angle de déviation des feuilles de l'électroscope doit donc diminuer plus lentement en haut du tube qu'en bas.

La diminution de la conductibilité d'un gaz qui suit la suppression de l'action ionisante peut être accélérée en créant un champ électrique dans le gaz. Un champ électrique peut faire disparaître presque instantanément la conductibilité des gaz. Pour le démontrer modifions l'expérience précédente en disposant dans le tube des plaques d'un condensateur à air plan (fig. 270, *b*). En répétant l'expérience précédente sans charger le condensateur, après que la bougie aura été allumée, les déviations des feuilles des électroscopes diminuent comme avant. Mais si on charge préalablement le condensateur, dans les mêmes conditions expérimentales, les feuilles des électroscopes restent fixes. Les ions entraînés par le courant ascendant d'air chaud se dirigent, sous l'action du champ électrique du condensateur, vers les plaques de celui-ci et s'y déchargent. Après avoir traversé l'espace entre les plaques du condensateur l'air cesse d'être conducteur, ce qui explique le résultat de l'expérience.

Dans ces expériences on peut aussi supprimer la conductibilité de l'air ascendant en le faisant passer à travers un tampon d'ouate fig. 270, *c*) car les ions s'y neutralisent.

3. Posons que la source ionisante crée q paires d'ions de signes opposés par unité de temps dans l'unité de volume de gaz. Si nous supposons qu'aucun courant électrique ne traverse le gaz et qu'on puisse négliger les pertes d'ions par diffusion, la seule cause de disparition des ions sera leur recombinaison. Notons n le nombre de paires d'ions de signes contraires contenues dans l'unité de volume du gaz. La recombinaison a lieu lorsqu'un ion positif rencontre un ion négatif; par conséquent le nombre de ces rencontres est proportionnel aux nombres d'ions positifs et négatifs, i.e. à n^2. Etant proportionnelle à n^2, la décroissance du nombre de paires d'ions dans l'unité de volume par unité de temps peut s'exprimer par αn^2, où α est une constante qu'on appelle *coefficient de recombinaison* des ions de signes contraires. Si les hypothèses ci-dessus sont vérifiées, l'équation du bilan des ions présents dans le gaz est

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2. \tag{109.1}$$

A l'état stationnaire $dn/dt = 0$ et

$$n = \sqrt{q/\alpha}. \tag{109.2}$$

Dès que la source ionisante est supprimée

$$\frac{dn}{dt} = -\alpha n^2,$$

d'où

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n_0}=\alpha t, \tag{109.3}$$

n_0 étant la concentration des paires d'ions positifs et négatifs à l'instant $t = 0$ où on supprime la source ionisante. Au bout d'un temps

$$\tau=\frac{1}{n_0\alpha} \tag{109.4}$$

la concentration n diminue de 2 fois. Ainsi la diminution de la concentration se produit plus lentement que suivant une progression géométrique puisque le temps requis pour diminuer la concentration de deux fois augmente à mesure que diminue la concentration et à la limite $n \to 0$ le temps devient infini.

Si la source ionisante est en action on devra intégrer l'équation (109.1). Supposons qu'à l'instant où on fait agir la source ionisante $n = 0$. En comptant le temps t à partir de cet instant initial et en remarquant que $q - \alpha n^2 > 0$, on obtient par intégration

$$n=\sqrt{q/\alpha}\,\mathrm{th}\,(t/\tau), \tag{109.5}$$

où le temps τ se déduit de (109.4) en y substituant $n_0 = \sqrt{q/\alpha}$ i.e. $\tau = \sqrt{1/(q\alpha)}$.

PROBLÈME

A l'instant $t = 0$ on fait agir une source ionisante qui crée par unité de temps, dans l'unité de volume de gaz, q paires d'ions positifs et négatifs. En supposant que $q = \text{const}$, trouver l'expression de la concentration des paires d'ions à tous les instants ultérieurs.

Réponse.

$$n=\sqrt{\frac{q}{\alpha}}\,\frac{(\sqrt{q}+n_0\sqrt{\alpha})-(\sqrt{q}-n_0\sqrt{\alpha})\,e^{-2t/\tau}}{(\sqrt{q}+n_0\sqrt{\alpha})+(\sqrt{q}-n_0\sqrt{\alpha})\,e^{-2t/\tau}},$$

où $\tau = 1/\sqrt{q\alpha}$. On notera que cette formule est vérifiée aussi bien pour $n_0 < \sqrt{q/\alpha}$ que pour $n_0 > \sqrt{q/\alpha}$. Dans ce dernier cas la concentration diminue quoique la source ionisante continue à produire de nouveaux ions.

§ 110. Mesure des potentiels d'ionisation par la méthode du choc électronique

1. Pour arracher un électron à un atome ou à une molécule neutres il faut dépenser une certaine énergie. La quantité minimale d'énergie que l'on doit dépenser est appelée *énergie d'ionisation* de l'atome ou de la molécule. On exprime généralement l'énergie d'ionisation en électrons-volts. La différence de potentiel que doit parcourir un électron pour acquérir une énergie égale à l'énergie d'ionisation porte le nom de *potentiel d'ionisation* de l'atome ou de la molé-

cule. Le potentiel d'ionisation est évidemment égal au quotient de l'énergie d'ionisation par la valeur absolue de la charge de l'électron. Les notions d'énergie et de potentiel d'ionisation s'appliquent non seulement aux atomes et molécules neutres, mais aussi aux ions auxquels on arrache un électron supplémentaire.

2. Dans une série de recherches commencées en 1913 James Franck (1882-1964) et Gustav Hertz (1887-1975) déterminèrent les potentiels d'ionisation des atomes par la *méthode du choc électronique*.

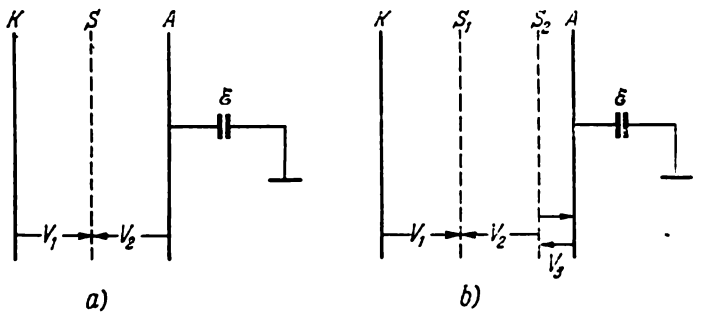


Fig. 271

Une représentation schématique de leur équipement expérimental est donnée sur la figure 271, *a*. Le gaz étudié est introduit à une pression de 0,01 à 1 mm Hg dans un vase cylindrique en verre préalablement bien évacué afin d'éliminer les gaz étrangers. Une cathode cylindrique K en platine à chauffage indirect sert de source d'électricité. Avec le chauffage indirect toute la surface de la cathode se trouve au même potentiel. Si on la chauffait en y faisant passer un courant (comme cela se faisait dans les premières expériences de Franck et Hertz, où la cathode était un fil de platine à chauffage direct) une différence de potentiel se serait établie le long de la cathode. La cathode est entourée d'une grille S et d'un collecteur A cylindriques, tous deux en platine, afin d'éviter l'apparition d'une différence de potentiel de contact. Le collecteur A est relié à un électromètre $\mathscr{E}$. On établit entre la cathode K et la grille S une différence de potentiel V_1 assurant l'accélération des électrons ; on applique entre la grille S et le collecteur A une différence de potentiel $V_2 > V_1$ qui ralentit les électrons. Le potentiel du collecteur A est donc inférieur de ΔV au potentiel de la cathode K ($\Delta V \sim 0{,}5$ à 1 V). Si la différence de potentiel d'accélération V_1 est plus petite que le potentiel d'ionisation V_i, il n'y aura que des électrons dans un gaz neutre. Comme l'énergie cinétique des électrons accélérés par la différence de potentiel V_1 est insuffisante pour surmonter le potentiel de freinage V_2, le collecteur A ne captera aucune charge et

l'électromètre $\mathscr{E}$ n'accusera aucune déviation. Si on augmente la différence de potentiel V_1 jusqu'à ce qu'elle devienne égale au potentiel d'ionisation, les chocs entre électrons et atomes neutres produiront des ions positifs et négatifs. Les ions négatifs ne parviendront pas jusqu'au collecteur A car le potentiel de freinage V_2 s'y oppose, mais le même potentiel favorisera la capture des ions positifs par le collecteur A. Ce dernier se chargera positivement et c'est ce qu'indiquera l'électromètre $\mathscr{E}$. Franck et Hertz pensaient qu'à ce moment le potentiel d'ionisation V_i était égal à la différence de potentiel V_1 entre la grille S et la cathode K. Or ce n'est pas exact. Franck et Hertz commencèrent leurs expériences à l'époque où Bohr développait sa théorie atomique, mais ils n'en tînrent pas compte. Or Bohr indiqua un autre mécanisme de capture des ions par le collecteur A. Tout atome peut se trouver dans des états stationnaires bien définis $\mathscr{E}_0$, $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, . . . Si la différence de potentiel V_1 est suffisante pour exciter les atomes tout en étant inférieure à leur potentiel d'ionisation V_i, les atomes seront le siège de transition quantique du niveau normal $\mathscr{E}_0$ sur des niveaux supérieurs $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, . . . Les transitions inverses s'accompagnent d'émission de lumière d'une fréquence ν vérifiant la relation $h\nu = \Delta\mathscr{E}$, où h est la constante de Planck. Si cette fréquence se trouve dans l'ultraviolet, ce rayonnement pourra arracher des électrons de la surface de la grille S et du collecteur A (effet photoélectrique). Ces électrons soumis à l'action du potentiel V_2 seront repoussés du collecteur A et ce dernier se chargera positivement avant que le gaz s'ionise.

3. Pour séparer l'effet dû à l'ionisation des atomes de celui de leur excitation, Davis et Goucher modifièrent le dispositif expérimental de Franck et Hertz en disposant deux grilles S_1 et S_2 entre la cathode K et le collecteur A (fig. 271, *b*). La tension d'accélération V_1 est toujours appliquée entre la cathode K et la grille S_1, et la tension de freinage V_2 est appliquée entre les grilles S_1 et S_2. (Sur la figure 271, *b* les sens d'accélération des électrons sont fléchés.) On établit entre la grille S_2 et le collecteur A une différence de potentiel V_3 petite devant V_2 et qu'on peut faire varier pendant les expériences. Les deux directions possibles du champ V_3 sont indiquées sur la figure 271, *b* par des flèches antiparallèles. Supposons d'abord que l'énergie de l'électron accéléré par la différence de potentiel V_1 est insuffisante pour ioniser le gaz, mais suffit à l'excitation des atomes donnant lieu à l'émission d'un rayonnement ultraviolet. Tombant sur la grille S_2 et sur le collecteur A, ce rayonnement arrache de leurs surfaces des électrons lents. Si le champ électrique régnant entre A et S_2 est dirigé de gauche à droite, ces électrons seront repoussés par le collecteur A qui conservera ses charges positives. Si le champ est dirigé de droite à gauche, les électrons arrachés à la surface de A retourneront vers A et ceux arrachés à la grille S_2 se dirigeront vers A qui acquiert ainsi une charge négative. Ainsi,

en modifiant le signe de la différence de potentiel V_3, on modifie le signe de la charge de l'électromètre $\mathscr{E}$. Dans le cas où le gaz se trouvant entre les grilles S_1 et S_2 s'ionise, des ions positifs et négatifs apparaissent. Le champ V_2 entraînera les ions négatifs vers la gauche et les ions positifs vers la droite.

Après avoir traversé la grille S_2 les ions positifs arrivent au collecteur A quel que soit le signe de la différence de potentiel V_3. En effet comme celle-ci est petite devant V_2, elle ne pourra pas bloquer les ions positifs dans le cas où le champ électrique est dirigé de droite à gauche. Lorsque ce champ est dirigé de gauche à droite, il accélère les ions positifs et facilite leur collecte par A. Il est donc possible de faire la distinction entre l'excitation et l'ionisation des atomes gazeux. Dans le cas où on observerait entre la première excitation (transition sur le premier niveau excité) et l'ionisation des sauts d'électrisation, on en conclurait que les atomes sont excités sur des niveaux d'énergie plus élevés.

4. Il existe d'autres méthodes de détermination des potentiels d'ionisation, comme par exemple la méthode spectroscopique que nous décrirons dans le tome V. Dans chacune des périodes du tableau de Mendéléev les atomes des gaz rares présentent les plus grands potentiels d'ionisation et les atomes des métaux alcalins sont caractérisés par les plus petits potentiels d'ionisation. Ainsi le potentiel d'ionisation de l'atome d'hélium vaut 24,58 V, celui de l'atome de néon vaut 21,56 V ; pour les atomes des métaux alcalins on a : pour le lithium 5,390 V et pour le sodium 5,138 V. C'est pour cela que les flammes ionisent efficacement l'air lorsqu'on y introduit de petites quantités de sel de cuisine. En considérant la suite des éléments constituant les groupes du système périodique on constate que le potentiel d'ionisation diminue, en règle générale, à mesure qu'augmente le numéro atomique de l'élément.

La recombinaison d'ions positifs et négatifs donne lieu à une diminution de l'énergie potentielle. Une partie de l'énergie rendue disponible est dissipée par rayonnement d'ondes électromagnétiques que l'on appelle *rayonnement de recombinaison*. Ce dernier se manifeste par exemple sous forme d'une luminescence des gaz contenus dans les tubes utilisés pour la réclame.

§ 111. Mesure des courants faibles

1. Les courants qui traversent les gaz soumis à l'action d'une source ionisante extérieure sont généralement très faibles, de l'ordre de 10^{-6} à 10^{-12} A. Les galvanomètres à miroir ordinaires ont une sensibilité de l'ordre de 10^{-12} A. Il est impossible d'augmenter encore leur sensibilité par suite de l'influence du mouvement brownien qui provoque des déflexions du miroir comparables à celles dues aux courants qu'il s'agit de mesurer. Pour la mesure des courants faibles, on utilise généralement des électromètres *à fil* ou *à quadrants*. Dans ce qui suit nous considérerons seulement l'électromètre à fil car les circuits et les procédés de montage restent les mêmes avec un électromètre à quadrants.

Dans l'électromètre à fil la partie mobile est constituée par un fil de platine extra-fin de 2 à 10 μm de diamètre tendu entre deux « couteaux » verticaux métalliques ayant la forme de prismes triangulaires (fig. 272). Ces prismes montés sur des isolants en ambre peuvent être chargés jusqu'à ce que s'établisse entre eux une certaine différence de potentiel (100 V environ) ; le fil de platine attaché aux tiges de fixation *a* et *b* est relié à la source d'électricité étudiée. Généralement le fil de platine est attaché à la tige *b* à l'aide d'un anneau en verre de silice. Lorsque l'électromètre est chargé le fil s'incurve vers l'un ou l'autre prisme suivant le signe de la charge. Comme l'incurvation du fil dépend de sa tension, on modifie sa tension et donc la sensibilité de l'appareil à l'aide de vis micrométriques déplaçant les tiges de fixation *a* et *b* suivant la verticale. On

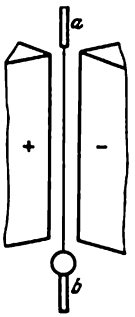


Fig. 272

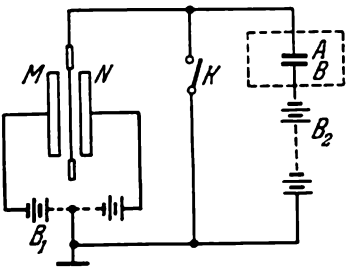


Fig. 273

mesure la déflexion du fil à l'aide d'un microscope à oculaire gradué. Pour étalonner l'appareil on porte le fil à des potentiels connus et on mesure les déflexions correspondantes.

2. Décrivons deux méthodes utilisées pour la mesure des courants faibles dans les gaz.

Première méthode de coulage. Le schéma de cette méthode est représenté sur la figure 273. Les couteaux de l'électromètre *M* et *N* sont connectés aux pôles de la batterie B_1 dont le plot moyen est mis à la terre. A l'aide de l'interrupteur *K* le fil de l'électromètre peut être ou mis à la terre ou relié à l'électrode *A* d'une chambre d'ionisation contenant le gaz étudié. Une tension est appliquée aux électrodes *A* et *B* de la chambre d'ionisation par la batterie B_2. Supposons que l'ionisation du gaz contenu dans la chambre est assurée par des rayons X. Au début l'interrupteur *K* doit être fermé. Le fil de l'électromètre se trouve alors à un potentiel nul et ne bouge pas quoique le circuit B_2BAK soit parcouru par un courant. En ouvrant l'interrupteur *K* on débranche l'électrode *A* et le fil de l'électromètre de la mise à la terre. Les ions commencent alors à charger la plaque *A* et la déflexion du fil augmente progressivement. Soit *V* le potentiel auquel se trouve porté le fil après un temps *t* depuis l'instant de l'ouverture de l'interrupteur *K*. La quantité d'électricité qui s'est écoulée pendant cet intervalle de temps dans le système est $Q = CV$, où *C* est la capacité du condensateur *AB*, du fil de platine et des fils de connexion. Le courant moyen au cours du temps *t* est

$$\mathcal{J} = \frac{Q}{t} = C\frac{V}{t}.$$

Posons $C = 25$ cm et supposons que l'électromètre a été porté à 0,1 V = = 1/3000 un. C.G.S.E. au bout de 25 s. On trouve alors $\mathcal{J} = 1/3000$ un. C.G.S.E. ≈

$\approx 10^{-13}$ A. Le principal inconvénient de cette méthode est qu'on ne détermine que le courant moyen dans le temps t.

Deuxième méthode de la déflexion constante (fig. 274). On utilise cette méthode lorsque le courant d'ionisation n'est pas très petit. Elle se distingue de la méthode précédente par ce qu'on branche une grande résistance connue R entre le fil connectant le fil de platine à l'électrode A et la terre. Cette résistance R est parcourue par un courant $\mathcal{J}$ pendant tout le temps que dure l'ionisation; il s'ensuit que cette résistance détermine une chute

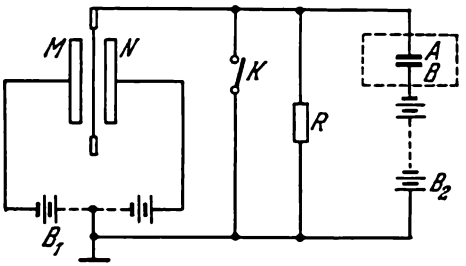


Fig. 274

de tension $V = \mathcal{J}R$. Si on débranche à l'aide de l'interrupteur K le fil de platine de la mise à la terre, l'électromètre mesurera la tension V. On calcule ensuite le courant d'ionisation par la formule $\mathcal{J} = V/R$. L'avantage de cette méthode réside en ce que, du fait que le fil de platine ne présente pratiquement aucune inertie, on peut mesurer non seulement la valeur moyenne mais aussi les valeurs instantanées du courant $\mathcal{J}$. Il est par contre difficile de mesurer exactement la résistance R.

§ 112. Conductibilité extrinsèque des gaz

1. En abordant l'étude des courants électriques dans les gaz nous supposerons pour simplifier que le courant circule entre deux électrodes planes portant des charges de signes contraires. Nous dirigerons l'axe X suivant la droite orientée allant de l'électrode positive vers l'électrode négative. Comme dans les électrolytes la densité de courant s'exprime par

$$j = n^+e^+u^+ + n^-e^-u^- - e^+D^+\frac{\partial n^+}{\partial x} - e^-D^-\frac{\partial n^-}{\partial x}, \qquad (112.1)$$

où on a conservé toutes les notations déjà utilisées. Les deux premiers termes caractérisent le mouvement des ions sous l'action du champ électrique $\boldsymbol{E}$ et les deux autres termes caractérisent la diffusion des ions. Introduisons les mobilités b^+ et b^- des ions gazeux et supposons que les charges portées par les ions positifs et négatifs sont égales en valeur absolue ($e^+ = -e^- = e$). Nous poserons aussi que les concentrations des ions positifs et négatifs sont égales ($n^+ = n^- = n$). Si la concentration est la même en tous les points du volume occupé par le gaz parcouru par un courant il ne peut y avoir de courant de

diffusion et on écrira

$$j = ne\,(b^+ + b^-)\,E. \qquad (112.2)$$

Si nous supposons que les ions se forment dans la chambre contenant le gaz uniquement sous l'action d'une source ionisante, le passage du courant et la conductibilité correspondante du gaz sont dits *extrinsèques*, que l'ionisation se produise en volume ou en surface. Posons qu'il se forme par unité de temps et dans l'unité de volume de gaz q paires d'ions. Le nombre d'ions qui se recombinent dans l'unité de temps dans tout le volume Sl de la chambre d'ionisation est égal à $Sl\alpha n^2$, où S est l'aire de l'électrode et l la longueur de la chambre. Si le gaz est traversé par un courant électrique, les ions disparaissent aussi en se déchargeant sur les électrodes. Le courant élimine ainsi par seconde Sj/e paires d'ions. L'équation du bilan (109.1) doit donc s'écrire

$$\frac{d\,(S\,ln)}{dt} = S\,lq - S\,l\alpha n^2 - \frac{Sj}{e},$$

et après simplification

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2 - \frac{j}{el}. \qquad (112.3)$$

Pour les courants stationnaires

$$q = \alpha n^2 + \frac{j}{el}. \qquad (112.4)$$

2. Cherchons les solutions de cette dernière équation dans les deux cas limites suivants.

Supposons d'abord que la densité de courant j soit tellement petite qu'on peut négliger le terme $j/(el)$ devant la quantité αn^2. On aura alors $n = \sqrt{q/\alpha} = \text{const}$ et la formule (112.2) s'écrira

$$j = e\sqrt{q/\alpha}\,(b^+ + b^-)\,E,$$

ce qui signifie que la densité de courant j est proportionnelle à l'intensité E de champ électrique. Ce cas se réalise lorsque E est petit. Ainsi *dans les champs électriques faibles la loi d'Ohm est vérifiée.*

Considérons maintenant le cas où la concentration ionique n est petite. On peut alors négliger la recombinaison puisque le terme αn^2 correspondant est quadratique en n. Dans cette approximation $j = qle$, i.e. le courant ne dépend pas de la tension appliquée. Ce résultat est vérifié pour les champs électriques forts et s'explique par ce que pendant le temps que les ions mettent à parcourir, dans un champ fort E, la distance séparant les électrodes, leur recombinaison ne peut être notable. Dans ces conditions tous les ions générés par la source ionisante sont captés par les électrodes. Chaque électrode capte par seconde une charge égale à $Slqe$. C'est l'intensité du cou-

rant qui traverse le gaz. La grandeur $\mathcal{J}_s = Slqe$ est appelée *courant de saturation* et la grandeur $j_s = qle$ *densité de courant de saturation.* Ces deux grandeurs sont proportionnelles à la longueur l de la chambre d'ionisation puisque le nombre total d'ions générés par la source ionisante est proportionnel à l.

Pour les valeurs intermédiaires du champ électrique la dépendance entre le courant et la tension présente une allure compliquée. La variation de la densité de courant j en fonction du champ E n'est pas linéaire, ce qui signifie que la loi d'Ohm n'est pas vérifiée.

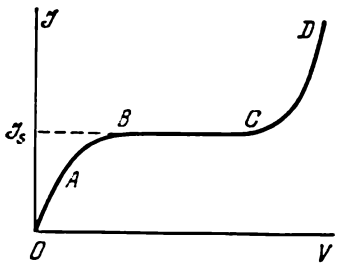


Fig. 275

Ces résultats théoriques sont conformes à l'expérience. La figure 275 représente la variation du courant $\mathcal{J}$ traversant la chambre d'ionisation en fonction de la tension V appliquée aux électrodes. L'ionisation du gaz contenu dans la chambre peut être réalisée à l'aide de rayons X, de rayons ultraviolets, de radiations de substances radioactives tombant sur l'électrode négative de la chambre. Ce qui importe est que le débit de la source ionisante reste constant (q = const). La partie OA de la courbe correspond au domaine de validité de la loi d'Ohm. Sur la partie AB la variation du courant avec la tension appliquée n'est pas linéaire. A partir du point B le courant $\mathcal{J}$ atteint sa valeur de saturation $\mathcal{J}_s$ et reste constant sur la partie BC de la courbe. A partir du point C le courant d'ionisation croît à nouveau, d'abord lentement, puis très rapidement. Cette croissance témoigne de l'apparition d'une nouvelle source d'ions, d'une source interne. Si on supprime au point D de la caractéristique la source ionisante externe, le courant ne disparaît pas. La décharge qui jusqu'alors était extrinsèque devient *intrinsèque* et les nouveaux ions se forment par des *processus internes.*

3. Etudions maintenant la répartition du potentiel entre les électrodes. Si l'espace entre les électrodes n'est pas parcouru par un courant, le gaz se comporte comme un diélectrique, il se polarise uniformément, mais aucune charge n'apparaît dans son volume. Le champ E entre les électrodes est uniforme et le potentiel V décroît linéairement avec la distance x depuis la valeur V_a sur l'anode jusqu'à la valeur V_c sur la cathode

$$V = V_a - \frac{V_a - V_c}{l} x.$$

Mais si un courant électrique passe à travers le gaz, un excédent de charges négatifs apparaît près de l'anode et un excédent de charges positives apparaît près de la cathode. Cela signifie qu'il se forme des

charges d'espace de densité spatiale $\rho(x)$. Conformément à l'équation $d^2V/dx^2 = -4\pi\rho$ le potentiel V ne sera plus une fonction linéaire de la coordonnée x, mais sera représenté par une courbe $V = V(x)$. Cette courbe sera convexe vers le bas si la dérivée seconde d^2V/dx^2 est positive ($\rho < 0$) et concave vers le bas si cette dérivée est négative ($\rho > 0$). Là où il n'y a pas de charge d'espace la courbe présente une partie rectiligne. L'allure de la variation de potentiel entre les électrodes est illustrée par la courbe en trait plein de la figure 276. La droite en pointillé représente la répartition du potentiel dans le cas où il n'y a pas de charge d'espace entre les électrodes. En présence des charges d'espace cette droite s'incurve car les charges négatives accumulées près de l'anode y diminuent le potentiel, tandis que celles qui se trouvent près de la cathode déterminent un accroissement du potentiel. Ainsi du fait du passage d'un courant à travers un gaz ionisé les variations de potentiel deviennent plus fortes près des électrodes et moins fortes dans la région médiane. Cela signifie que le champ électrique $\boldsymbol{E}$ n'est plus uniforme, étant maximal près des électrodes et minimal au milieu.

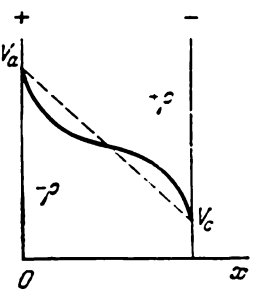


Fig. 276

Notons pour conclure qu'il suffit d'un très faible écart à la neutralité électrique d'un gaz pour y faire apparaître un champ électrique fort. Aussi même lorsqu'un gaz est parcouru par un courant électrique, l'égalité des concentrations des ions positifs et négatifs $n^+ = n^-$ est réalisée à peu de chose près. On dit dans ce cas que le gaz est *quasi neutre*, i.e. qu'il s'agit d'un gaz idéalisé vérifiant l'égalité $n^+ = n^-$ quelles que soient les inhomogénéités du champ électrique. Ce modèle est utilisé dans les calculs quoique l'existence d'un champ électrique non uniforme soit incompatible avec l'égalité $n^+ = n^-$. On retrouve ici la même situation que dans l'étude des déformations élastiques des corps. Dans des corps rigides il suffit d'une variation minime de densité pour faire apparaître de fortes contraintes élastiques. En théorie d'élasticité on introduit la notion de corps élastiques parfaitement indéformables pouvant être le siège de contraintes infiniment grandes quoique la cause réelle de ces contraintes ne peut résider que dans des déformations.

§ 113. Mesure des coefficients de recombinaison

Il existe plusieurs méthodes de mesure des coefficients de recombinaison, mais nous n'en décrirons que trois, les plus simples.

1. Méthode de Rutherford (1897) (plus tard (en 1900) cette méthode fut perfectionnée par Townsend). On insuffle le gaz étudié, avec une vitesse constante v, dans un tube en laiton à travers un tampon d'ouate obturant

l'une de ses extrémités (fig. 277). A la suite du tampon d'ouate on trouve dans la paroi latérale du tube une fenêtre en aluminium AB par laquelle on fait passer un faisceau de rayons X qui ionisent le gaz (à moins qu'on n'utilise un autre procédé d'ionisation). Les ions formés sont entraînés par le courant de gaz et se recombinent partiellement durant le trajet. A des distances d_1, d_2, d_3, . . . du lieu d'ionisation, à l'intérieur du tube on dispose des électrodes identiques *1*, *2*, *3*, . . . Chacune de ces électrodes peut être successivement connectée à un électromètre, toutes les autres étant réunies au tube qui est connecté à l'un des pôles d'une batterie dont l'autre pôle est mis à la terre. Connectons à l'électro-

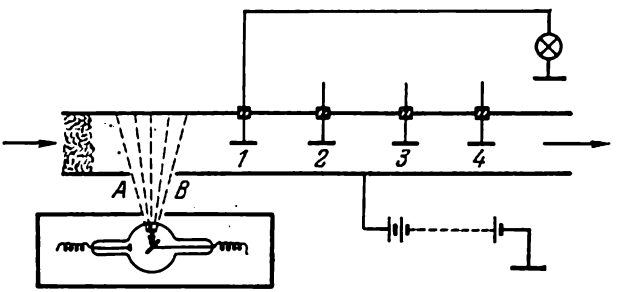


Fig. 277

mètre l'électrode *1*. Entre cette électrode et les parois du tube s'établit un intense champ électrique qui entraîne vers l'électrode *1* tous les ions d'un signe donné qui passent devant. En notant n_1 la concentration des paires d'ions près de l'électrode *1*, au cours du temps τ elle captera $n_1 vS\tau$ ions qui lui communiqueront une charge $Q_1 = n_1 vSe\tau$, S étant l'aire de l'électrode et e la charge d'un ion. Ensuite on refait les mêmes mesures avec l'électrode *2* en la connectant à l'électromètre. Soit $Q_2 = n_2 vSe\tau$ la charge mesurée par l'électromètre dans ce dernier cas. D'après la formule (109.3)

$$\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} = \alpha t,$$

où t est le temps que met le courant de gaz pour parcourir la distance $d_2 - d_1$. En l'exprimant par la vitesse v du gaz: $t = (d_2 - d_1)/v$ on trouve

$$\alpha = \left(\frac{1}{Q_2} - \frac{1}{Q_1}\right) \frac{S v^2 e\tau}{d_2 - d_1}. \qquad (113.1)$$

On peut déterminer v en mesurant le débit de gaz pendant un intervalle de temps donné. On peut continuer les mesures en connectant successivement les électrodes *2*, *3*, . . . à l'électromètre. Rutherford et ses collaborateurs constatèrent que toutes ces mesures indépendantes fournissent des résultats concordants, ce qui constitue une preuve que le principe de la méthode était correct.

2. Méthode de commutation. Cette méthode fut aussi suggérée par Rutherford (1897) puis perfectionnée par McClung (1902). Le gaz étudié se trouvant entre les deux électrodes d'une chambre d'ionisation est ionisé par des rayons X. A un instant donné on débranche à l'aide d'un pendule l'alimentation du tube à rayons X, puis après un temps τ le même pendule ferme le circuit de la batterie connectée aux électrodes de la chambre d'ionisation, ce qui fait apparaître un intense champ électrique entre les électrodes qui draine vers l'une des électrodes des ions d'un signe donné. Le champ électrique doit être fort afin que la recombinaison des ions n'ait pas le temps de se produire.

Soit Q la charge captée par l'électrode et mesurée par l'électromètre. Il est évident que $Q = Vne$, où V est le volume de la chambre. On mesure la charge Q pour deux valeurs du temps τ. Soient Q_1 et Q_2 les charges correspondant aux temps τ_1 et τ_2. On a alors

$$\left(\frac{1}{Q_2}-\frac{1}{Q_1}\right) Ve=\alpha(\tau_2-\tau_1), \tag{113.2}$$

d'où on tire le coefficient de recombinaison α.

3. Méthode de McClung. Le gaz étudié est placé entre les armatures d'un condensateur plan et on l'ionise par des rayons X. Soit q le nombre de paires d'ions produites par unité de temps dans l'unité de volume. On détermine q en créant entre les armatures un champ électrique suffisamment fort pour faire apparaître le courant de saturation $\mathcal{J}_s = Vqe$, où V est le volume du condensateur. On calcule q à l'aide de cette formule. Débranchons le champ électrique. Alors en régime permanent la concentration n de paires ioniques se trouve liée à la charge q selon la formule (109.1) par la relation $\alpha n^2 = q$. La charge totale des ions d'un signe donné se trouvant dans le condensateur est $Q = Vne = Ve\sqrt{q/\alpha}$. Pour mesurer Q on débranche à un instant donné la source d'ionisation et aussitôt on applique au condensateur un champ électrique intense. La charge Q sera alors captée par l'une des plaques du condensateur et pourra être mesurée à l'aide de l'électromètre. On calcule alors le coefficient de recombinaison par la formule

$$\alpha=\frac{V^2e^2q}{Q^2}=\frac{Ve}{Q^2}\mathcal{J}_s. \tag{113.3}$$

On a rassemblé dans le tableau 8 les valeurs des coefficients de recombinaison de plusieurs gaz pour une pression de 1 atm à 18 °C.

Tableau 8

Valeurs des coefficients de recombinaison des gaz

Gaz	α, 10^{-6} cm³/s	Gaz	α, 10^{-6} cm³/s
Air	1,67	Gaz carbonique	1,67
Oxygène	1,61	Oxyde de carbone	0,86
Hydrogène	1,44	Vapeur d'eau (100 °C)	0,86

Le coefficient de recombinaison α ne dépend que faiblement de la pression du gaz et ne diminue un peu qu'aux basses pressions. Lorsque la température augmente α diminue.

PROBLÈMES

1. A l'aide de rayons X on ionise l'air se trouvant entre deux électrodes planes d'aire $S = 100$ cm² chacune et distantes de $l = 5$ cm; le courant de saturation mesuré $\mathcal{J}_s = 10^{-7}$ A. Calculer le nombre q de paires d'ions créés par seconde par la source ionisante dans 1 cm³ de gaz, ainsi que la concentration n de ces paires en régime permanent. On suppose que les ions portent une seule charge.

Réponse. $q = \frac{\mathcal{J}_s}{Sle} = 1{,}25\cdot10^9$ cm$^{-3}\cdot$s^{-1}; $n = \sqrt{q/\alpha} = 2{,}7\cdot10^7$ cm^{-3}.

2. Près de la surface terrestre, du fait de la radioactivité du sol et de l'action ionisante des rayons cosmiques, apparaissent dans l'air atmosphérique en moyen-

ne $q = 5$ ions par cm³ et par seconde. Déterminer la valeur du courant de saturation, dû à cette ionisation, passant à travers un condensateur à air plan dont les armatures ont une aire $S = 100$ cm² chacune et qui sont distantes de $l = 5$ cm.

Réponse. $\mathcal{J}_s = qSle = 4 \cdot 10^{-16}$ A.

3. Estimer le temps de décharge du condensateur du problème 2 en supposant qu'il avait été chargé initialement à une différence de potentiel $V = 300$ V. Que deviendra le temps de décharge si on diminue la pression de l'air dans le condensateur?

Réponse. $t \approx \frac{SV}{4\pi l \mathcal{J}_s} \approx 1{,}3 \cdot 10^6$ s ≈ 15 jours. Si on diminue la pression de l'air, le temps de décharge augmentera. Crookes (1879) réussit à conserver dans le vide la charge d'un électroscope pendant plusieurs mois.

4. Calculer le temps τ qui doit s'écouler après suppression de l'action ionisante pour que le nombre d'ions contenus dans une chambre d'ionisation remplie d'air diminue de: 1) 2 fois, 2) 4 fois. La concentration initiale des paires ioniques $n_0 = 10^7$ cm^{-3}.

Réponse. 1) $\tau = 1/(n_0\alpha) = 0{,}06$ s; 2) $\tau = 3/(n_0\alpha) = 0{,}18$ s.

5. Déterminer la section efficace σ de recombinaison des ions moléculaires positifs et négatifs de l'air à la température ordinaire.

Solution. Les masses des ions positifs et négatifs sont les mêmes et leurs concentrations sont égales. En appliquant la formule (86.15) du tome II on trouve $\nu = \sqrt{2}n^2\sigma\bar{v}$, où ν est le nombre moyen de chocs entre ions positifs et négatifs par seconde et par unité de volume donnant lieu à recombinaison. A l'état permanent ce nombre doit être égal au nombre de paires ioniques formées par unité de volume et par unité de temps, i.e. $\sqrt{2}n^2\sigma\bar{v} = q$. Comme $q = \alpha n^2$, on a $\sqrt{2}\sigma\bar{v} = \alpha$. En y substituant $\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{RT}{M}}$, où R est la constante universelle des gaz, M le poids moléculaire de l'air ($M \approx 28{,}8$), on trouve

$$\delta = \frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{\pi M}{RT}} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-11}\ \text{cm}^2.$$

On calcule le diamètre efficace d de l'ion par la formule $\sigma = \pi d^2$, ce qui donne $d \approx 2{,}8 \cdot 10^{-6}$ cm, donc près de 100 fois le diamètre des molécules neutres déterminé par la théorie cinétique des gaz. Cela tient à l'attraction coulombienne des ions portant des charges contraires, ce qui accroît le nombre de chocs entre ces ions et leurs diamètres efficaces.

6. Refaire le même calcul que ci-dessus pour la recombinaison des ions positifs avec les électrons.

Solution. En négligeant la masse de l'électron devant celle de l'ion on obtient par application de la formule (86.15) du tome II $\nu_{el} = n^2\sigma_{el}\bar{v}_e$, où $\bar{v}_e$ est la vitesse thermique moyenne de l'électron. En reprenant le raisonnement du problème précédent on obtient

$$\sigma_{el} = \frac{\alpha_{el}}{\bar{v}_e} = \frac{\alpha_{el}}{4}\sqrt{\frac{2\pi m_e}{kT}},$$

où α_{el} est le coefficient de recombinaison de l'électron avec l'ion positif. Nous avons assigné deux indices aux grandeurs ν_{el} et σ_{el} afin d'indiquer qu'il s'agit de chocs entre électrons et ions positifs. Comme le rayon de l'électron peut être considéré comme infiniment petit, on a $\sigma = \pi r^2$, où r est le rayon de l'ion (cf. t. II, § 86).

§ 114. Méthodes de mesure de la mobilité des ions

Nous ne décrirons que deux méthodes de mesure de la mobilité des ions gazeux parmi les plus simples.

1. Méthode du champ alternatif. Cette méthode fut suggérée par Rutherford. On introduit le gaz dans un vase de verre S contenant deux électrodes planes, l'une B massive et l'autre A en forme de grille (fig. 278). Un fil de platine C porté à haute température par passage d'un courant électrique produit des ions dans l'espace compris entre C et A. Les ions d'un signe donné sont entraînés vers la grille A par le champ électrique créé par la batterie B_2. A l'aide du transformateur T on établit entre les électrodes A et B une différence de potentiel alternative $V = V_0 \sin \omega t$ et le champ électrique correspondant $E = \frac{V_0}{l} \sin \omega t$, où l est la distance de séparation des électrodes A et B et ω la pulsation de la tension alternative V. Supposons qu'un ion positif, par exemple, passe à travers la grille A à l'instant $t=0$ où le champ électrique E est nul. Cet ion se déplace ensuite vers l'électrode B avec la vitesse $v = bE = \frac{V_0 b}{l} \sin \omega t$ et parcourt dans le temps t un chemin $x = \int v\,dt = \frac{V_0 b}{l\omega}(1 - \cos \omega t)$. La distance maximale à laquelle l'ion peut s'éloigner de A est $x_{max} = 2V_0 b/(l\omega)$. Si cette distance est plus petite que l, la charge que porte l'ion ne pourra être captée par l'électrode B et l'électromètre E ne pourra donc la déceler. En faisant croître l'amplitude V_0 de la tension appliquée on arrive à rendre $x_{max} = l$. A partir de ce moment l'électromètre enregistrera les charges ioniques, ce qui permettra de calculer la mobilité b de l'ion par la formule

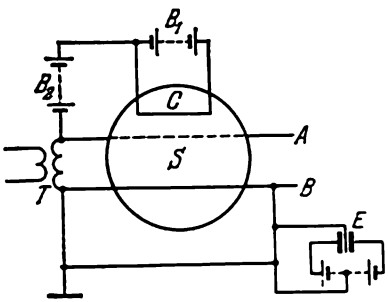


Fig. 278

$$b = \frac{l^2\omega}{2V_0} = \frac{\pi l^2}{V_0 T}, \tag{114.1}$$

où $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période de la tension alternative.

2. Méthode de Zeleny (1884-1954). L'armature cylindrique interne d'un condensateur cylindrique est coupée en deux parties BB' et CC' isolées l'une de l'autre (fig. 279). Le cylindre extérieur AA' comporte une fente étroite mn par laquelle on peut injecter normalement à l'axe du dispositif un faisceau de rayons X qui ionisent le gaz contenu dans la région mn délimitée par deux plans verticaux dont les traces sont indiquées sur la figure 279 en pointillé. Le cylindre intérieur CC' est relié à un électromètre et le cylindre extérieur AA' à un des pôles d'une batterie. L'autre pôle, l'électromètre et le cylindre BB' sont reliés à la terre. On crée dans le condensateur un champ électrique radial

$$E = \frac{V}{r \ln (r_2/r_1)},$$

où V est la tension appliquée aux armatures du condensateur, r la distance de l'axe de l'appareil, r_1 et r_2 sont les rayons des cylindres intérieur et extérieur. Ce champ électrique draine vers BB' et AA' les ions formés sous l'action des rayons X. Lorsque le cylindre BB' porte une charge négative il capte les ions positifs et lorsqu'il porte une charge positive il capte les ions négatifs. Ce qui

importe c'est qu'aucun ion ne parvienne jusqu'au cylindre CC' et donc jusqu'à l'électromètre. Mais si on insuffle le gaz avec une vitesse constante déterminée v dans l'espace compris entre les cylindres, les ions se déplaceront dans des directions radiales et parallèles à l'axe du condensateur. Le temps que met un ion pour parcourir la distance entre les cylindres extérieur et intérieur est donné par

$$t_1 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{bE} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{Vb} \int_{r_1}^{r_2} r\,dr = \frac{(r_2^2 - r_1^2)\ln(r_2/r_1)}{2Vb}.$$

D'autre part, le temps que met un ion pour aller de la zone d'ionisation mn jusqu'au cylindre CC' est $t_2 = l/v$, où l est la distance séparant la fente mn

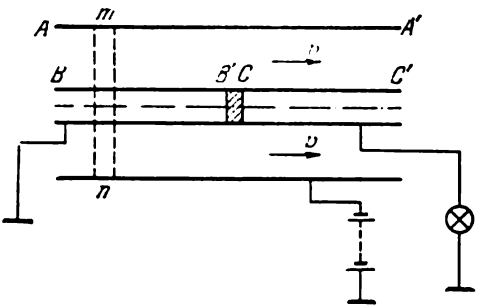


Fig. 279

du cylindre CC'. Si on diminue la tension V, pour une certaine valeur de celle-ci les ions commencent à parvenir jusqu'au cylindre CC' et donc jusqu'à l'électromètre. Cela se produit lorsque $t_1 = t_2$, i.e. lorsque

$$b = \frac{v(r_2^2 - r_1^2)\ln(r_2/r_1)}{2Vl}. \qquad (114.2)$$

C'est à l'aide de cette formule qu'on détermine la mobilité b.

3. On a indiqué dans le tableau 9 les résultats de mesure des mobilités de différents ions pour une pression de 1 atm et à 18 °C.

Tableau 9

Mobilités des ions gazeux

Gaz	Mobilité, cm²/(s·V)		$\frac{b^-}{b^+}$
	d'ions positifs b^+	d'ions négatifs b^-	
Hydrogène	5,91	8,26	1,4
Oxygène	1,29	1,79	1,4
Azote	1,27	1,84	1,4
Argon	1,37	1,70	1,24
Oxyde de carbone	1,10	1,14	1,04
Chlore	0,65	0,51	0,8
Vapeur d'eau (100 °C)	0,62	0,51	0,78

L'expérience montre que la mobilité des ions varie dans de larges limites et en raison inverse de la pression $\mathcal{P}$. Ce résultat est évident puisque la mobilité est proportionnelle à la longueur de libre parcours de l'ion (cf. § 42) et que cette dernière varie en raison inverse de la pression $\mathcal{P}$.

La mobilité des ions positifs ne dépend que peu de l'intensité E du champ électrique. Tant que E n'est pas trop grand, la mobilité des ions négatifs n'en dépend pas non plus, mais pour E grand elle augmente avec E. Si on augmente encore l'intensité du champ électrique, le taux d'accroissement de la mobilité diminue d'abord, puis celle-ci redevient constante. La mobilité des ions, surtout celle des ions négatifs, dépend fortement de la présence d'infimes quantités de certaines impuretés. Ainsi pour l'hélium, à la pression atmosphérique, contenant des traces d'oxygène $b^+ = 5{,}09$ cm²/(s·V) et $b^- = 6{,}31$ cm²/(s·V). Dans l'hélium absolument pur la mobilité b^+ des ions positifs reste la même, tandis que celle des ions négatifs b^- atteint 500 cm²/(s·V). Ces résultats s'expliquent par ce que l'ionisation du gaz donne lieu à l'*arrachement* d'un électron appartenant à un atome ou à une molécule et que c'est cet électron qui initialement joue le rôle d'ion négatif. Le reste de l'atome ou de la molécule est l'ion positif. Comme la masse de l'électron est très petite devant celle de l'atome ou de la molécule, on pourrait s'attendre à ce que sa mobilité soit beaucoup plus grande que la mobilité de l'ion positif. Or le tableau 9 montre que la différence entre b^- et b^+ n'est pas bien grande. Cela s'explique par le fait que l'électron libéré, après choc avec une particule neutre, y adhère en formant un ion négatif dont la mobilité est comparable à celle de l'ion positif. Le processus de capture de l'électron par les particules neutres doit être particulièrement rapide dans les gaz ayant une grande affinité électronique. C'est le cas de l'oxygène dont les traces dans un gaz sont difficiles à éliminer. Lorsqu'on cherche à élucider l'influence de ces différents facteurs sur la mobilité des ions, on doit tenir compte de ce que les mesures ne fournissent qu'une valeur moyenne de la mobilité qui dépend du rapport entre les nombres d'ions rapides et lents. L'influence de l'intensité E du champ électrique sur la mobilité des ions négatifs s'explique de la façon suivante. L'augmentation de l'intensité E du champ électrique s'accompagne d'un accroissement de la vitesse de l'électron, ce qui diminue la probabilité de sa capture par les particules neutres. La mobilité moyenne de l'ion négatif que l'on mesure s'en trouve accrue. Comme l'ion positif se forme directement par ionisation et que sa masse reste constante, sa mobilité ne peut dépendre de l'intensité du champ électrique.

§ 115. Théorie de Townsend

1. Jusqu'ici nous n'avons considéré que le cas où le gaz était ionisé par une source extérieure en négligeant l'éventualité de son ionisation par suite de chocs entre les ions et les électrons et les atomes et les molécules neutres. Or on ne peut négliger ce mécanisme d'ionisation par choc que tant que le champ électrique est faible, i.e. tant que l'énergie cinétique eEl acquise par l'électron (ou par l'ion) sur une longueur de libre parcours l est inférieure à l'énergie d'ionisation $\mathcal{E}_i$; dans les champs faibles le choc d'un électron avec une particule neutre ne modifie que sa *direction de propagation* (*diffusion élastique*). Dans les champs forts où $eEl > \mathcal{E}_i$ les chocs entre électrons et particules neutres peuvent conduire à l'ionisation de ces dernières. L'ionisation peut avoir lieu même pour $eE\bar{l} < \mathcal{E}_i$, où $\bar{l}$ est la longueur de libre parcours moyenne de l'électron, puisque parmi les électrons présents on en trouve pour lesquels $l > \bar{l}$, ce qui implique que $eEl > \mathcal{E}_i$.

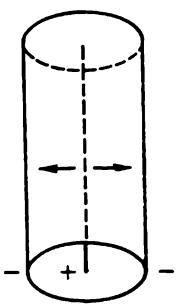


Fig. 280

Supposons que sous l'action d'un rayonnement ionisant ou pour toute autre raison un électron libre soit apparu près de la cathode. Cet électron, accéléré par le champ électrique, ionise par choc un atome neutre. A la place d'un seul électron on en trouve deux. Après avoir été accéléré par le champ électrique, chacun de ces électrons ionise un atome, ce qui porte à quatre le nombre d'électrons. Ainsi de proche en proche à mesure que l'on s'approche de l'anode, le nombre d'électrons augmente à la manière d'une avalanche. Ce processus cumulatif est appelé *avalanche électronique*. Chaque acte d'ionisation des atomes crée un électron libre et un ion positif ; les ions positifs sont susceptibles, eux aussi, d'ioniser le gaz.

2. Pour pouvoir caractériser quantitativement l'aptitude ionisante des électrons et des ions, Townsend (1868-1957) introduisit deux *coefficients d'ionisation* α et β. Le premier est défini comme le nombre moyen d'ions d'un signe donné créés par l'électron par unité de longueur de libre parcours. Le coefficient β caractérise de la même façon le pouvoir ionisant des ions positifs. Le coefficient d'ionisation par les électrons α est beaucoup plus grand que β.

Cette dernière assertion est démontrée par l'expérience classique de Townsend. On utilise une chambre d'ionisation constituée par un condensateur cylindrique dont l'armature interne est un fil métallique fin (fig. 280). On applique entre le fil et l'armature cylindrique externe une différence de potentiel V suffisamment grande pour provoquer dans le gaz une *ionisation par choc*. Cette ionisation ne se produit pratiquement qu'à proximité du fil central où le champ

électrique est très fort. Si nous supposons que le fil est porté à un potentiel positif, les électrons s'y dirigeront et ioniseront le gaz se trouvant tout autour du fil. Les ions positifs qui se dirigent vers le cylindre externe traversant une région de champ faible ne pourront pas ioniser le gaz. Inversons la polarité de la tension appliquée V sans changer sa grandeur. Les rôles seront alors inversés, les ions positifs iront vers le fil central et assureront pratiquement toute l'ionisation du gaz. L'expérience montre que dans le premier cas le courant d'ionisation est plus grand et croît plus rapidement avec

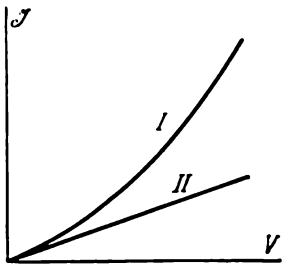


Fig. 281

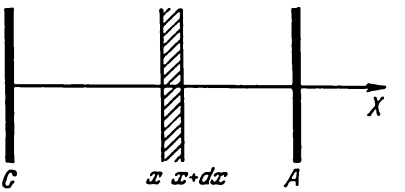


Fig. 282

la tension V que dans le second cas (sur la figure 281 la courbe I correspond au cas où l'électrode centrale est portée à un potentiel positif et la courbe II au cas où elle est portée à un potentiel négatif).

Les résultats de cette expérience démontrent que *le phénomène d'ionisation par choc est essentiellement déterminé par les électrons et que dans la plupart des cas on peut négliger l'ionisation par les ions positifs.*

3. Passons maintenant à la théorie de Townsend sur le passage du courant électrique à travers les gaz. Cette théorie tient compte de l'ionisation par choc des atomes et des molécules du gaz par les électrons et par les ions positifs. Pour simplifier nous supposerons que les électrodes du tube à décharge sont planes. Nous négligerons la recombinaison des ions avec les électrons en admettant que pendant le trajet cathode-anode ces particules n'ont pas le temps de recombiner. Nous ne considérerons que le régime stationnaire où toutes les grandeurs caractérisant la décharge dans le gaz ne dépendent pas du temps. Plaçons l'origine des coordonnées sur la surface de la cathode C, l'axe X pointant vers l'anode A (fig. 282). Désignons par $n_e(x)$ et $n_p(x)$ les concentrations des électrons et des ions positifs et par v_e et v_p leurs vitesses de dérive moyennes (prises en valeurs absolues). Délimitons dans le gaz une couche infiniment mince parallèle aux plans de l'anode et de la cathode et définissons sur cette couche une surface d'aire unité. A travers cette surface élémentaire

$n_e(x)\,v_e(x)$ électrons venant de la gauche pénètrent par seconde dans la couche et $n_e(x+dx)\,v_e(x+dx)$ électrons allant vers la droite s'en échappent. Dans le volume dx de la couche du fait de l'ionisation par les électrons, $\alpha n_e v_e\,dx$ nouveaux électrons et autant d'ions positifs apparaissent par seconde. De même l'ionisation due aux ions positifs fait apparaître $\beta n_p v_p\,dx$ électrons et autant d'ions positifs. Enfin on doit considérer l'éventualité de présence d'une source ionisante extérieure produisant par seconde q paires d'ions dans l'unité de volume de gaz. Comme en régime stationnaire le nombre d'électrons se trouvant dans la couche reste invariable, l'équation suivante doit être vérifiée:

$$n_e(x)\,v_e(x) - n_e(x+dx)\,v_e(x+dx) + \\ + (\alpha n_e v_e + \beta n_p v_p)\,dx + q\,dx = 0$$

De même pour les ions positifs qui se déplacent de l'anode vers la cathode on doit avoir

$$n_p(x+dx)\,v_p(x+dx) - n_p(x)\,v_p(x) + \\ + (\alpha n_e v_e + \beta n_p v_p)\,dx + q\,dx = 0.$$

En remplaçant les différences par les différentielles correspondantes et en divisant par dx nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{d(n_e v_e)}{dx} + \alpha n_e v_e + \beta n_p v_p + q = 0, \\ \frac{d(n_p v_p)}{dx} + \alpha n_e v_e + \beta n_p v_p + q = 0. \end{aligned} \tag{115.1}$$

En introduisant les densités de courant des électrons et des ions positifs

$$j_e = n_e v_e e, \quad j_p = n_p v_p e, \tag{115.2}$$

où e est la valeur absolue de la charge de l'électron, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dj_e}{dx} - \alpha j_e - \beta j_p - qe = 0, \\ \frac{dj_p}{dx} + \alpha j_e + \beta j_p + qe = 0. \end{aligned} \tag{115.3}$$

Il en découle $\frac{d}{dx}(j_e + j_p) = 0$ et par conséquent

$$j_e + j_p \equiv j = \text{const}. \tag{115.4}$$

La densité totale de courant électrique j reste constante dans tout l'espace entre cathode et anode conformément au caractère quasi stationnaire des processus. En éliminant le courant j_p entre les équations (115.3) et (115.4) on obtient

$$\frac{dj_e}{dx} - (\alpha - \beta)\,j_e = \beta j + qe. \tag{115.5}$$

Les deux coefficients d'ionisation α et β dépendent de la nature du gaz, de sa pression et de l'intensité du champ électrique. La pression $\mathcal{P}$ du gaz est constante sur toute la longueur du tube à décharge. Quant au champ E il n'est pas uniforme du fait de l'existence de charges d'espace et dépend donc de x. Par suite les coefficients α et β dépendent aussi de x. Pour intégrer l'équation (115.3), Townsend supposa néanmoins que ces coefficients étaient constants sur toute la longueur du tube et ne pouvaient varier que si on faisait varier la tension appliquée au tube (variation de E). Cette simplification implique que le champ E est supposé uniforme dans tout le volume du tube à décharge. Cette hypothèse n'est vérifiée que pour des courants relativement faibles lorsque les charges d'espace apparaissant dans le tube à décharge sont négligeables. *La théorie de Townsend n'est donc applicable qu'à la première étape de la décharge* dans les gaz où la condition énoncée est vérifiée. On dit alors qu'il s'agit de la *décharge de Townsend.* Le défaut majeur de cette théorie est qu'elle néglige les charges d'espace.

Si nous posons que α, β et q sont constants, l'intégration de (115.5) permet de trouver d'abord j_e, puis j_p:

$$\begin{aligned} j_e &= Ce^{(\alpha-\beta)x} - \frac{\beta j + qe}{\alpha - \beta}, \\ j_p &= -Ce^{(\alpha-\beta)x} + \frac{\alpha j + qe}{\alpha - \beta}, \end{aligned} \tag{115.6}$$

où C est une constante d'intégration que l'on détermine à partir des conditions aux limites qui doivent être respectées aux électrodes.

4. Pour pouvoir établir ces conditions aux limites calculons d'abord le courant d'électrons et le courant d'ions positifs dus à la source ionisante. Le nombre d'électrons générés par seconde dans tout le volume du tube à décharge est égal à Slq et la charge qu'ils transportent est égale (en valeur absolue) à $Slqe$, où S est l'aire de la section droite du tube et l sa longueur. En divisant par S on trouve que la densité du courant électronique est égale à lqe. La densité du courant d'ions positifs est la même. Sur l'anode ce sera la densité totale du courant d'ions positifs. Ainsi à l'anode la condition aux limites est

$$j_p^{(a)} = qle, \tag{115.7}$$

où l'indice a indique que la grandeur concernée se rapporte à l'anode. L'indice k, introduit plus bas, signifie que la grandeur qu'il affecte se rapporte à la cathode.

Pour trouver les conditions aux limites sur la cathode nous supposerons qu'il existe une source ionisante extérieure produisant une ionisation superficielle sur la cathode (par exemple les rayons X ou ultraviolets irradiant la surface ou une température élevée déterminant une émission thermoïonique). Notons N le nombre d'élec-

trons s'échappant par seconde de la surface de la cathode par suite de l'ionisation superficielle. Ils contribuent de Ne à la densité du courant électronique. On doit y ajouter la densité du courant électronique qle dû à l'ionisateur volumique ainsi que la densité du courant dû aux électrons arrachés de la cathode par les ions positifs incidents (émission secondaire). $j_p^{(k)}/e$ ions positifs tombent par seconde sur l'unité de surface de la cathode. En notant γ le nombre moyen d'électrons arrachés de la cathode par un ion positif, l'unité de surface de la cathode émet par seconde $\gamma j_p^{(k)}/e$ électrons qui produisent un courant électronique égal à $\gamma j_p^{(k)}$. On notera que l'émission d'électrons sur l'interface cathode-gaz peut résulter non seulement du choc d'ions positifs, mais aussi de l'effet photoélectrique et de l'impact d'autres particules. Nous admettrons cependant, avec Townsend, que l'émission électronique n'est due qu'à l'impact d'ions positifs. Dans ce cas simple la densité totale du courant électronique près de la cathode est

$$j_e^{(k)} = Ne + qle + \gamma j_p^{(k)}. \tag{115.8}$$

C'est la condition aux limites sur la cathode.

On tire de (115.6)

$$j_e^{(k)} = C - \frac{\beta j + qe}{\alpha - \beta},$$

$$j_p^{(k)} = -C + \frac{\alpha j + qe}{\alpha - \beta},$$

$$j_p^{(a)} = -Ce^{(\alpha-\beta)l} + \frac{\alpha j + qe}{\alpha - \beta}.$$

En portant ces expressions dans (115.7) et (115.8) on obtient le système d'équations

$$\begin{aligned} Ce^{(\alpha-\beta)l} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} j &= qe\left(\frac{1}{\alpha-\beta} - l\right), \\ (1+\gamma)C - \frac{\beta+\gamma\alpha}{\alpha-\beta} j &= \left[N + ql + \frac{(1+\gamma)q}{\alpha-\beta}\right] e, \end{aligned} \tag{115.9}$$

d'où on tire

$$j = \frac{A - Be^{(\alpha-\beta)l}}{\Delta}, \tag{115.10}$$

avec les notations

$$\begin{aligned} A &= (1+\gamma)[1 + l(\alpha-\beta)]\, qe, \\ B &= (Ne + qle)(\alpha-\beta) + (1+\gamma)\, qe, \\ \Delta &= (\beta + \gamma\alpha)\, e^{(\alpha-\beta)l} - (1+\gamma)\,\alpha. \end{aligned} \tag{115.11}$$

Considérons quelques cas particuliers.

Supposons que l'ionisation due à une cause extérieure est superficielle ($q = 0$). Négligeons l'ionisation par les ions positifs ($\beta = 0$)

et l'émission secondaire sur la cathode ($\gamma = 0$). On a alors

$$j = Ne \exp(\alpha l). \tag{115.12}$$

Si l'ionisation était volumique ($N = 0$) on aurait avec les mêmes hypothèses ($\beta = \gamma = 0$)

$$j = qle\left\{\left(1+\frac{1}{\alpha l}\right)\exp(\alpha l)+\left(1-\frac{1}{\alpha l}\right)\right\}. \tag{115.13}$$

Tenons compte maintenant de l'ionisation par les ions positifs tout en négligeant l'émission secondaire ($\gamma = 0$). Dans le cas d'une ionisation superficielle par une source extérieure ($N \neq 0$, $q = 0$), on trouve

$$j = \frac{(\alpha-\beta)Ne}{\alpha-\beta\exp\{(\alpha-\beta)\,l\}}\exp\{(\alpha-\beta)\,l\}. \tag{115.14}$$

Initialement Townsend attribuait une grande importance à l'ionisation par les ions positifs car il constatait dans ses expériences que la formule (115.14) décrivait correctement la dépendance du courant d'ionisation avec la longueur l du tube à décharge. La formule (115.12) ne cadrait avec les données expérimentales que pour l petit et devenait erronée pour l grand.

5. La formule (115.10) montre que pour $\Delta \neq 0$ le courant d'ionisation résultant n'a une valeur finie qu'en présence d'une source ionisante extérieure. Dans ce cas la décharge dans le gaz est *extrinsèque*. Dans le cas où $\Delta = 0$ la situation est tout autre. Au facteur ($\alpha - \beta$) près, la quantité Δ représente le déterminant formé par les coefficients des membres de gauche du système d'équations (115.9). Pour que $\Delta = 0$ ce système d'équations doit avoir des solutions non nulles ($C \neq 0$, $j \neq 0$), ce qui implique que les seconds membres de ces équations sont égaux à zéro. Ce résultat se trouve réalisé chaque fois que $q = N = 0$, i.e. en l'absence de source ionisante extérieure. Rappelons que les coefficients α, β, γ dépendent de l'intensité E du champ électrique. Lorsque E augmente le courant d'ionisation j augmente. Pour une certaine valeur de E Δ s'annule. Si on supprime les sources ionisantes extérieures, le courant à travers le gaz continuera à circuler. La décharge devient *intrinsèque*. Selon la théorie de Townsend lorsque la condition

$$\Delta \equiv (\beta+\gamma\alpha)\,e^{(\alpha-\beta)l}-(1+\gamma)\,\alpha = 0 \tag{115.15}$$

est vérifiée, la *décharge dans le gaz* est amorcée. Il est clair que pour amorcer la décharge, i.e. pour que les avalanches électroniques et ioniques puissent se développer, il faut que le gaz contienne initialement une certaine quantité minimale d'électrons ou d'ions. Or on en trouve toujours dans les gaz quoique en très faibles quantités. La théorie de Townsend ne permet pas de décrire la transition de la décharge extrinsèque à la décharge intrinsèque puisqu'elle ne concerne que les processus permanents, i.e. indépendants du temps.

§ 116. Loi de Paschen

1. Nous allons étudier maintenant la variation des coefficients d'ionisation α et β en fonction de l'intensité E du champ électrique et de la pression $\mathcal{P}$ du gaz. Pour concrétiser le problème nous ne considérerons que les électrons. Admettons, comme le fit Townsend, qu'à chaque collision l'électron perde la vitesse qu'il avait acquise sous l'action du champ électrique. L'électron ne pourra ioniser le gaz que s'il a acquis sur une longueur de libre parcours x une énergie au moins égale à l'énergie d'ionisation, i.e. la longueur x doit satisfaire à la condition $xE \geqslant V_i$, V_i étant le potentiel d'ionisation du gaz. Admettons que tous les électrons ionisent le gaz et considérons un faisceau de N_0 électrons qui sont accélérés par le champ électrique E à partir d'une vitesse initiale nulle. D'après la théorie cinétique des gaz (cf. t. II, § 88) le nombre moyen d'électrons parcourant un chemin x sans subir de collisions est $N = N_0 e^{-x/\bar{l}}$, où $\bar{l}$ est la longueur de libre parcours moyen des électrons. Avec $x = V_i/E$, conformément à notre hypothèse, tous les électrons pourront ioniser le gaz. Sur un trajet de 1 cm, un électron subit en moyenne $1/\bar{l}$ collisions, de sorte que sur cette longueur la totalité des N électrons produiront $N/l = \frac{N_0}{\bar{l}} e^{-x/\bar{l}}$ actes d'ionisation. Le nombre moyen d'actes d'ionisation produits par un électron sur la même longueur de trajet est

$$\alpha = \frac{1}{\bar{l}} e^{-V_i/(E\bar{l})}.$$

C'est le coefficient d'ionisation. La longueur de libre parcours moyen $\bar{l}$ est inversement proportionnelle à la pression $\mathcal{P}$ du gaz: $\bar{l} = 1/(A\mathcal{P})$, de sorte que

$$\alpha = A\mathcal{P} e^{-\frac{B\mathcal{P}}{E}}, \tag{116.1}$$

A et B étant des constantes. Il en résulte que

$$\frac{\alpha}{\mathcal{P}} = f\left(\frac{E}{\mathcal{P}}\right), \tag{116.2}$$

ce qui signifie que le rapport $\alpha/\mathcal{P}$ dépend non pas de E et de $\mathcal{P}$ pris séparément, mais seulement du rapport $E/\mathcal{P}$. Tant que la fonction f n'a pas été définie, ce résultat est plus général que (116.1). Townsend confirma par l'expérience la validité de (116.2) pour différents gaz, quoique les études ultérieures montrèrent que cette relation était beaucoup moins bien vérifiée aux pressions supérieures à la pression atmosphérique qu'aux basses pressions; aux hautes pressions elle cesse d'être valable.

En différentiant par rapport à $\mathcal{P}$ on se rend compte que pour E donné la formule (116.1) prend sa valeur maximale pour $\mathcal{P} = E/B$.

La valeur maximale de α est alors égale à

$$\alpha_{\max} = \frac{A}{eB} E, \tag{116.3}$$

où e est la base des logarithmes népériens. Ainsi pour une intensité donnée du champ électrique E la valeur maximale de α est proportionnelle à cette intensité de champ. Ce résultat est confirmé par l'expérience.

Il est évident que toutes ces relations s'appliquent aux ions positifs.

2. Précisons maintenant les conditions d'amorçage de la décharge (115.15). Supposons pour simplifier que l'émission secondaire de la cathode ne joue aucun rôle ($\gamma = 0$). La formule (115.15) s'écrira alors

$$\beta e^{(\alpha-\beta)l} - \alpha = 0.$$

Substituons

$$\alpha = \mathcal{P} f\left(\frac{V}{l\mathcal{P}}\right), \quad \beta = \mathcal{P} f_1\left(\frac{V}{l\mathcal{P}}\right),$$

où V est la tension appliquée au tube. En divisant par $\mathcal{P}$ nous obtenons une équation de la forme

$$F\left(\frac{V}{l\mathcal{P}}\right) = 0,$$

où F est une fonction de $V/(l\mathcal{P})$. En résolvant cette équation on détermine la tension d'amorçage $V_{am} = V_{am}(l\mathcal{P})$. Ainsi *la différence de potentiel entre les électrodes à laquelle commence la décharge dans le gaz est une fonction du produit $\mathcal{P}l$ de la pression $\mathcal{P}$ du gaz par la distance l entre les électrodes.* Si on prend plusieurs tubes à électrodes planes et qu'on s'arrange pour que le produit $\mathcal{P}l$ soit le même dans tous les tubes, la tension d'amorçage sera la même pour tous les tubes. Cette loi fut établie expérimentalement par Paschen (1865-1947) antérieurement à la théorie de Townsend.

On peut déduire la loi de Paschen de la condition d'amorçage plus générale (115.15) à condition que γ, ainsi que $\alpha/\mathcal{P}$ et $\beta/\mathcal{P}$, soient tous fonctions de $E/\mathcal{P}$. Cette condition est vraisemblable puisqu'elle implique que γ n'est fonction que de l'énergie cinétique que les ions positifs acquièrent en moyenne pendant leurs libres parcours avant leurs impacts sur la cathode. Aux pressions de gaz élevées (plusieurs centaines d'atmosphères) on observe des écarts à la loi de Paschen.

§ 117. Décharge lumineuse

1. *On appelle généralement décharge lumineuse une décharge autoentretenue où la cathode émet des électrons, étant bombardée par les ions positifs et par les photons générés dans le gaz.* A la différence de la

décharge de Townsend où la densité du courant électrique est petite et l'influence des charges d'espace est négligeable, la décharge lumineuse est caractérisée par des densités de courant beaucoup plus grandes et par d'importantes charges d'espace résultant de la forte différence entre les masses des électrons et des ions positifs (cf. § 112, pt. 3); de ce fait le champ électrique est essentiellement non

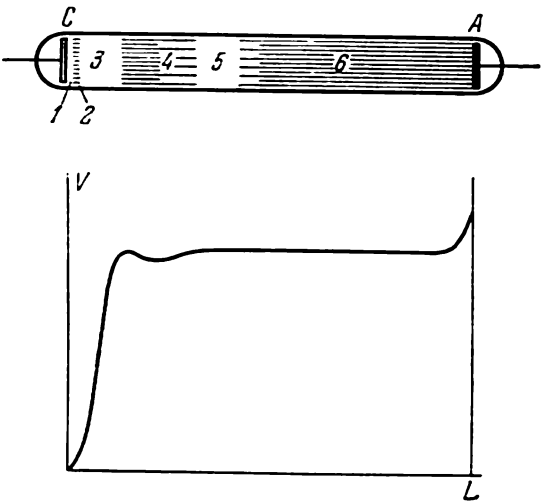


Fig. 283

uniforme. La décharge lumineuse se manifeste pour des intensités de champ électrique importantes et donne lieu à une forte chute de tension près de la cathode (dite *chute cathodique*).

2. Prenons un tube de verre de 30 à 50 cm de long dans lequel sont scellées deux électrodes (fig. 283). Appliquons à ces électrodes une tension continue de plusieurs centaines de volts. A la pression atmosphérique une telle tension est encore insuffisante pour provoquer la rupture diélectrique du gaz, de sorte qu'aucune lueur n'apparaît dans le tube. Commençons à évacuer le gaz. Lorsque la pression aura baissé jusqu'à $\approx$50 mm Hg, on voit apparaître une décharge auto-entretenue qui se présente sous forme d'un cordon lumineux de couleur rougeâtre allant de la cathode vers l'anode. Lorsque la pression descend à $\approx$2-3 mm Hg, le tube tout entier devient luminescent. A une pression de 0,1 à 0,01 mm Hg la décharge se présente sous la forme schématisée par la figure 283. Sur cette même figure on a représenté l'allure de la distribution du potentiel électrique V dans le tube.

Tout près de la cathode on trouve la *région obscure d'Aston* (noté *1* sur la figure 283) où les électrons émis par la cathode n'ont pas encore

été suffisamment accélérés pour exciter les atomes et les molécules du gaz. Cette région obscure a été décelée par Aston (1877-1945) dans l'hélium, le néon et l'hydrogène, d'où sa dénomination. Sa largeur (de l'ordre de quelques dixièmes de mm) varie en raison inverse de la pression gazeuse et diminue lorsque la densité de courant augmente.

Cette région obscure est suivie d'une mince couche lumineuse appelée *lueur cathodique* (*2*) où se produit l'excitation des atomes et des molécules par chocs électroniques sans que se produise leur ionisation. Lorsque les atomes excités retournent à leur état normal, ils émettent des quanta de lumière et de là vient la lueur cathodique.

A la suite de la lueur cathodique se trouve la *région cathodique obscure* que l'on appelle aussi *espace obscur de Crookes* ou *de Hittorf* (*3*). En réalité cette zone n'est pas absolument obscure et ne paraît telle que par contraste avec les régions lumineuses adjacentes. C'est dans cette région que débute l'*ionisation des atomes et des molécules* et *se forme l'avalanche électronique*. La faible luminosité résulte de ce que l'ionisation empêche l'excitation des atomes. Cette région obscure est essentielle pour l'entretien de la décharge puisque les ions positifs qui y sont générés assurent l'émission des électrons par la cathode.

Une frontière nette sépare la région obscure (*3*) de la *zone de lueur négative* (*4*). Cette lueur résulte de la *recombinaison* des électrons et des ions positifs ainsi que des *transitions quantiques* des atomes excités sur des niveaux de plus faible énergie.

Lorsqu'on progresse vers l'anode la luminosité diminue de plus en plus jusqu'à la *zone obscure de Faraday* (*5*) où les électrons rapides des avalanches électroniques n'arrivent pas à pénétrer.

Ces cinq régions sont les *zones cathodiques de la décharge* lumineuse où se déroulent tous les processus nécessaires à l'entretien de la décharge.

3. A la suite de la zone obscure de Faraday on trouve le *cœur de la décharge*. Dans des tubes relativement étroits il se présente sous la forme d'une colonne lumineuse de gaz ionisé (*6*) que l'on appelle *lueur* (ou *colonne*) *positive*. Généralement la colonne positive s'étend jusqu'à l'anode, mais dans certaines conditions on discerne entre la colonne positive et l'anode une *région anodique obscure* et à la surface de l'anode une mince couche lumineuse dite *lueur anodique*. Parfois la colonne positive se subdivise en zones alternativement lumineuses et sombres (les *stries*). L'existence de la colonne positive n'est pas essentielle pour l'entretien de la décharge, quoiqu'elle joue un rôle important dans les applications de la décharge lumineuse. Dans les tubes très courts la colonne positive ne se forme pas. Dans les tubes longs elle sert de lien conducteur entre l'anode et la zone obscure de Faraday. La colonne positive est assez fortement ionisée et présente de ce fait une grande conductibilité. Pour cette raison

la densité de la charge d'espace y est petite (et parfois nulle). Sa luminosité résulte pour l'essentiel de la recombinaison des électrons et des ions positifs. Sur une distance de quelques longueurs de libre parcours jusqu'à l'anode (dans la zone dite de chute anodique) les électrons peuvent acquérir une énergie cinétique suffisante pour exciter les atomes, tandis que les ions positifs sont repoussés de l'anode et c'est ce qui détermine la lueur anodique.

4. Si on s'arrange pour que l'anode soit mobile et qu'on la déplace petit à petit vers la cathode les régions cathodiques de la décharge conserveront leurs formes et leurs dimensions jusqu'à la

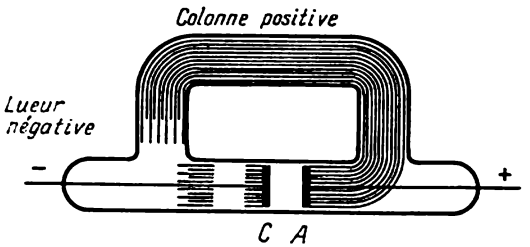


Fig. 284

limite où commence la colonne positive, la longueur de celle-ci diminuant à mesure que l'on rapproche l'anode de la cathode. A mesure que la distance anode-cathode diminue la longueur de la zone obscure de Faraday diminue, puis c'est la longueur de la zone de lueur négative qui commence à diminuer, la position de sa frontière côté cathode restant inchangée. Lorsque la distance de cette frontière jusqu'à l'anode devient égale à une fraction de millimètre, la décharge lumineuse disparaît. Le comportement de la décharge sera semblable si on déplaçait la cathode, l'anode étant fixe. Toutes les régions cathodiques se déplacent d'un bloc vers l'anode, y compris la frontière avec la colonne positive, en conservant leurs formes et leurs dimensions. Ensuite la distance anode-cathode continuant à diminuer, la colonne positive, l'espace obscur de Faraday et la lueur négative sont successivement « absorbés » par l'anode. La décharge cesse lorsque l'épaisseur de la zone de lueur négative se réduit à une fraction de millimètre. Si la distance anode-cathode est trop petite pour que l'espace obscur cathodique et la partie initiale de la zone de lueur négative puissent s'y loger, la décharge emprunte une voie différente, si la configuration du tube le permet (fig. 284).

5. Lorsque la résistance extérieure du circuit est grande et que l'intensité du courant de décharge est petite, l'aire lumineuse à la surface de la cathode qui participe à la décharge est proportionnelle à l'intensité du courant traversant le tube (*loi de Hale*). Lorsqu'on

fait varier l'intensité de courant, sa densité reste approximativement constante, de même que la chute de potentiel cathodique. Dans ce cas on appelle cette dernière *chute cathodique normale.* Jusqu'aux pressions de quelques dizaines de mm Hg la chute cathodique normale ne dépend pas de la pression, n'étant fonction que du matériau de la cathode et de la nature du gaz. Dans la majorité des cas elle est comprise entre 100 et 300 V. La température de la cathode est sans influence sur la valeur de la chute cathodique normale tant que l'émission thermoïonique de la cathode ne devient notable. On peut dire qu'à une approximation suffisante la chute cathodique normale est proportionnelle au travail d'extraction des électrons de la cathode. Ce fait est mis à profit dans la fabrication des *tubes luminescents* de faible tension d'amorçage. Un exemple en est le *tube à néon* dont les électrodes sont constituées par deux feuillets de fer recouverts d'une couche de baryum afin de diminuer le travail d'extraction des électrons. La chute cathodique n'est alors que de 70 V et la décharge lumineuse s'amorce en branchant le tube sur le réseau urbain.

A partir du moment où l'intensité de courant devient suffisante pour que toute la surface de la cathode devienne lumineuse la chute cathodique commence à croître. On l'appelle alors *chute cathodique anomale* et la décharge lumineuse est dite *anomale.*

6. Les électrons arrachés de la surface de la cathode par les ions positifs incidents sont accélérés dans la zone de la chute de tension cathodique. Lorsque la pression de gaz dans le tube est relativement grande (au-dessus de 0,1 mm Hg) les électrons perdent leurs vitesses par suite des chocs avec les particules du gaz. Lorsque la pression de gaz diminue, la longueur de libre parcours moyen des électrons augmente et l'espace obscur cathodique s'étend. A une pression de 0.01 à 0,001 mm Hg l'espace obscur cathodique occupe la presque totalité du tube (suivant la longueur du tube) et le faisceau d'électrons s'y déplace presque sans subir de collisions. Ce type de faisceaux électroniques a reçu le nom de *rayons cathodiques.* Ils ont été découverts par Crookes (1832-1919) à la fin des années 70 du XIXe siècle, bien avant que l'on connaisse leur nature (avant la découverte de l'électron lui-même). Si on dispose un écran sur le trajet des rayons cathodiques, on trouve son ombre derrière l'écran. Si on approche du tube un aimant, le faisceau et l'ombre de l'écran se déplacent de côté. Ce sont ces phénomènes qu'observa Crookes. Pour les expériences avec les rayons cathodiques on utilise le plus souvent des tubes en verre courts et larges où l'anode est placée en position latérale par rapport au faisceau d'électrons émis par la cathode. Les électrons issus de la cathode sont accélérés par le champ électrique régnant près de sa surface et se déplacent ensuite par inertie normalement à la surface de la cathode. En tombant sur la paroi du tube ils lui communiquent une charge négative qui est cependant neutralisée par les ions positifs entraînés par la circulation du gaz, les ions

négatifs étant captés par l'anode. Si la cathode a la forme d'une surface sphérique concave, les rayons cathodiques seront focalisés au centre de cette sphère. Si la pression gazeuse dans le tube est tellement petite que l'espace obscur cathodique recouvre l'anode, la décharge lumineuse disparaît, de même que disparaissent l'émission de rayons cathodiques et la luminescence de la paroi du tube.

7. Les rayons cathodiques sont utilisés dans les *tubes à gaz pour la production de rayons X*. La figure 285 donne une représentation schématique de ce type de tube à rayons X comportant une cathode incurvée *C* et deux électrodes positives *A* et *Ac*. L'une de ces électrodes appelée *anode* (*A*) se trouve à grande distance de la cathode dans la zone de lueur négative et a pour fonction d'entretenir la décharge lumineuse. La deuxième électrode *Ac* appelée *anticathode* est faite en un métal réfractaire (tungstène, molybdène, etc.). On focalise le faisceau d'électrons émis par la cathode sur cette anticathode qui, frappée violemment par les électrons, émet les rayons X qui sont des ondes électromagnétiques de très courte longueur d'onde (10^{-8} cm et au-dessous). Les propriétés des rayons X seront décrites dans les tomes IV et V de ce cours. Sous l'action du bombardement électronique l'anticathode s'échauffe fortement, ce qui exige son refroidissement par circulation d'eau.

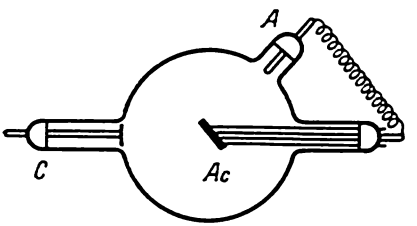


Fig. 285

Les tubes à gaz pour la production de rayons X présentent l'inconvénient qu'à l'usage la pression dans le tube décroît pour différentes raisons. Lorsque la pression de gaz devient inférieure à 0,001-0,0001 mm Hg la décharge lumineuse ne s'amorce plus et le tube cesse de fonctionner. Actuellement on utilise pour la production de rayons X presque exclusivement des *tubes à vide électroniques* qui sont d'un fonctionnement plus stable que les tubes à gaz. Comme dans les tubes à vide il n'y a pas besoin de décharge lumineuse, l'anode auxiliaire devient inutile. L'anode (refroidie par eau dans les tubes de grande puissance) est réalisée en un métal réfractaire. La cathode est une spirale de tungstène portée à incandescence par passage d'un courant électrique. Les électrons émis par la cathode sont générés par émission thermoïonique. Accélérés par le champ électrique, ils bombardent l'anode et y étant décélérés ils émettent des rayons X.

8. Si on fait dans la cathode de petites perforations, les ions positifs tombant sur la cathode passeront à travers ces petits trous derrière la cathode et s'y propageront sous forme de rayons rectilignes (la première expérience de ce genre fut réalisée en 1882 par E. Goldstein (1850-1930)). Ces rayons ont été appelés *rayons positifs*

ou *rayons canaux* puisqu'ils sortent de la cathode perforée comme s'ils étaient canalisés. Les rayons canaux sont perçus dans le tube comme des faisceaux peu lumineux. Tout comme les rayons cathodiques ils provoquent la fluorescence du verre du tube. Dans les faisceaux de rayons canaux il se produit des processus d'*échange de charges*, ce qui conduit à l'apparition, à côté des ions positifs, d'ions négatifs et de particules rapides neutres dont certaines sont excitées. Dans un champ magnétique un faisceau de rayons canaux se subdivise en trois faisceaux : les ions positifs sont déviés dans un sens, les ions négatifs dans le sens opposé et le faisceau d'atomes et de molécules neutres n'est pas dévié. Si on soumet à nouveau chacun de ces trois faisceaux à l'action d'un champ magnétique ils se scindent à leur tour en trois faisceaux. On en conclut que les processus d'échange de charges se produisent non seulement devant la cathode, mais se poursuivent derrière celle-ci.

§ 118. La décharge à étincelle

1. Même en courant continu la *décharge à étincelle* se présente sous une forme discontinue. Elle se produit dans les gaz dont la pression est proche de 1 atm. Dans les conditions naturelles la décharge à étincelle se manifeste sous forme d'*éclairs*. De par son aspect la décharge

Fig. 286

par étincelles se présente sous forme de lignes sinueuses et ramifiées très brillantes qui traversent instantanément l'intervalle de décharge et qui disparaissent rapidement en se scindant à cadence rapide (fig. 286). Ces lignes appelées *canaux d'étincelle* peuvent avoir pour origine l'électrode négative, l'électrode positive ou tout point situé entre les deux électrodes. Les canaux issus de l'électrode positive sont nettement filiformes, tandis que ceux issus de l'électrode négative ont des bords diffus et sont moins ramifiés.

Comme la décharge à étincelle ne se manifeste qu'à grande pression gazeuse, le potentiel d'amorçage est très élevé. (Par exemple dans un air sec à la pression atmosphérique, entre deux électrodes distantes de 10 mm, la tension de claquage est $\approx$30 kV). Cependant une fois que l'intervalle entre électrodes a été traversé par un canal d'étincelle, sa résistance devient très petite et le canal est traversé par une brève impulsion du courant de grande intensité, la tension

entre électrodes étant alors très petite. Si la puissance de la source n'est pas bien grande, la décharge cesse après une seule impulsion de courant. La tension entre les électrodes remonte à sa valeur initiale et une nouvelle étincelle jaillit. Le temps τ nécessaire pour que la tension entre électrodes reprenne sa valeur initiale est d'autant plus grand que la capacité C entre électrodes est grande. Par suite le montage en parallèle à l'éclateur d'un condensateur augmente l'intervalle de temps entre deux étincelles successives, mais chacune de ces étincelles devient plus puissante. Comme le canal de l'étincelle laisse passer une charge électrique importante, l'amplitude et la durée de l'impulsion de courant deviennent plus grandes. Lorsque la capacité C est grande, le canal de l'étincelle est très lumineux et se présente sous forme de larges bandes. L'accroissement de la puissance de la source produit les mêmes effets. On dit alors qu'il s'agit d'une *étincelle condensée*. L'intensité de courant maximal d'une décharge à étincelle varie dans de larges limites suivant les paramètres du circuit de décharge et les conditions dans l'espace interélectrode et peut atteindre plusieurs centaines de kiloampères. Si on augmente encore la puissance de la source, la décharge à étincelle se transforme en *décharge à arc*.

Le passage de l'impulsion de courant dans le canal de l'étincelle dégage une importante énergie (de l'ordre de 0.1 à 1 J par centimètre de longueur du canal). Cette libération d'énergie donne lieu à un brusque accroissement de la pression du gaz ambiant, ce qui se traduit par la formation d'une onde de choc cylindrique ; sur le front de l'onde la température atteint $\sim 10^4$ K. Le canal de l'étincelle se dilate rapidement à une vitesse comparable à la vitesse thermique des atomes du gaz. A mesure que l'onde de choc se propage la température de son front diminue et le front lui-même s'écarte du canal. Les effets sonores accompagnant la décharge à étincelle (crépitement dans le cas d'étincelle faible et tonnerre dans celui de la foudre) sont déterminés par la formation d'ondes de choc.

La luminosité de l'étincelle est la plus intense pendant la durée d'existence du canal, surtout aux grandes pressions gazeuses. La brillance n'est pas uniforme sur la section du canal, le maximum se trouvant en son centre.

2. Examinons maintenant le mécanisme de la décharge à étincelle. Tout au début on pensait que la décharge à étincelle était déterminée par les mêmes processus que ceux qui déterminent la décharge lumineuse. D'après la théorie de Townsend ce sont, d'une part, l'ionisation en volume par les électrons et les ions positifs et, d'autre part, l'émission d'électrons secondaires par la cathode bombardée par les ions positifs et les photons formés dans la décharge lumineuse. Or l'expérience ne confirma pas cette conception. Si cette conception était exacte, le temps de formation de l'étincelle devrait être du même ordre que le temps que mettent les ions pour

parcourir la distance entre anode et cathode. Or ce temps est de l'ordre de 10^{-4} à 10^{-5} s, tandis que les études oscillographiques montrent que le temps de formation de l'étincelle est égal ou inférieur à 10^{-7} s.

Actuellement on admet généralement la validité de la théorie des streamers qui est corroborée par des expériences directes. Cette théorie donne une interprétation qualitative correcte des principales particularités de la décharge à étincelle, bien qu'elle laisse à désirer quant à l'aspect quantitatif. Si une avalanche d'électrons est générée près de la cathode, elle ionise et excite sur son chemin les molécules et les atomes du gaz. Ce qui importe surtout est que les quanta de lumière émis par les molécules et les atomes excités qui se propagent vers l'anode avec la vitesse de la lumière sont capables d'ioniser le gaz et de générer de nouvelles avalanches électroniques. C'est par ce mécanisme qu'apparaissent dans tout le volume du gaz des amas faiblement luminescents de gaz ionisé qu'on appelle *streamers*. Lors de leur développement certaines avalanches d'électrons se rejoignent et constituent ensemble un pont conducteur composé de streamers. C'est le long de ce pont qu'à tout instant ultérieur se précipite un grand flux d'électrons constituant le canal de la décharge à étincelle. Comme le pont conducteur se forme par réunion de streamers qui sont générés pratiquement au même instant, le temps qu'exige sa formation est inférieur au temps que mettrait une avalanche d'électrons pour parcourir la distance cathode-anode. A côté des streamers négatifs, i.e. des streamers se propageant de la cathode vers l'anode, il existe aussi des streamers positifs qui se propagent en sens inverse.

§ 119. La décharge en couronne

1. La *décharge en couronne* s'établit à des pressions gazeuses assez importantes (de l'ordre de la pression atmosphérique) dans un champ électrique peu uniforme. On produit un tel champ entre deux électrodes dont l'une présente une surface de grande courbure (fil fin, pointe). La présence de la seconde électrode n'est pas absolument nécessaire, car ses fonctions peuvent être assumées par des électrodes mises à la terre se trouvant à proximité. Lorsque l'intensité du champ électrique atteint $3 \cdot 10^4$ V/m environ à proximité de la pointe, une lueur en forme de *couronne* apparaît autour de celle-ci. Si la couronne se forme autour de l'électrode négative on l'appelle *couronne négative*; si elle apparaît autour de l'électrode positive, on l'appelle *couronne positive*. Les mécanismes de leurs formations sont différents.

Dans le cas d'une couronne négative les ions positifs générés par les avalanches électroniques sont accélérés par le champ électrique fortement inhomogène tout près de la cathode. Tombant sur la cathode, les ions positifs en arrachent des électrons (électrons

secondaires). Ces électrons secondaires repoussés de la cathode génèrent de nouvelles avalanches d'électrons. Comme le champ électrique décroît avec la distance jusqu'à la pointe, les avalanches électroniques cessent de se développer à une certaine distance de la cathode, les électrons se dispersent dans la région « obscure » et y sont captés par les molécules neutres du gaz. Ce sont ces ions négatifs qui jouent le rôle de porteurs majoritaires dans la région « obscure » de la couronne. La charge d'espace négative de ces ions, qui se forme près de l'anode, limite le courant total de la décharge. Dans le cas de gaz électropositifs purs, les ions négatifs ne se forment pas et ce sont les électrons qui sont les porteurs de courant dans la région « obscure ». Dans cette région la décharge n'est pas autoentretenue.

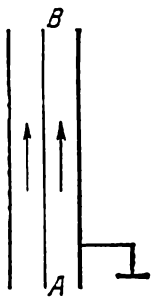


Fig. 287

Dans le cas d'une couronne positive, lorsque la cathode est une électrode de grand rayon de courbure, le champ électrique est faible près de la cathode. Par suite les avalanches électroniques ne peuvent être générées par des électrons secondaires; elles sont alors générées par les électrons qui sont libérés près de l'anode lors de l'*ionisation en volume du gaz* par les photons émis par la couche de la couronne. Ces électrons sont libérés à la périphérie de cette couche et se déplacent vers l'électrode positive (de grande courbure). Les ions positifs se déplaçant vers la cathode à travers l'espace « obscur » forment une *charge d'espace* qui limite le courant de décharge.

Lorsqu'on fait croître la tension appliquée aux électrodes l'espace « obscur » de la décharge en couronne se résorbe et une étincelle jaillit entre les électrodes.

2. Dans les conditions naturelles des couronnes apparaissent parfois autour des sommets des arbres, des mâts des navires, etc., sous l'action de l'*électricité atmosphérique*. Jadis ce phénomène était appelé *feux de Saint-Elme*. En technique H.T. on doit tenir compte de l'éventualité des décharges en couronne. Les couronnes qui se forment autour des fils des lignes H.T. ionisent l'air ambiant, ce qui donne lieu à des *courants de fuite*. Pour diminuer ces courants de fuite préjudiciables les fils des lignes H.T., ainsi que les fils de connexion de toutes les installations H.T. doivent être suffisamment gros. Etant discontinues, les décharges en couronne constituent une source de *parasites radioélectriques*.

On utilise la décharge en couronne dans les *filtres électriques* destinés à débarrasser les gaz industriels des particules solides et liquides (fumées des usines d'acide sulfurique, des fonderies de métaux non ferreux, etc.). Le principe de fonctionnement de ces filtres est schématisé par la figure 287. Le long de l'axe d'une cheminée verticale est tendu un fil AB chargé négativement par exemple

autour duquel on excite une décharge en couronne. L'air se trouvant dans la cheminée s'ionise fortement et les ions formés s'attachent sur les particules des fumées qui se déplacent d'un mouvement ascendant. Les particules ayant capté des charges de même signe que la polarité du fil générateur de la couronne en sont repoussées et se déposent sur les parois de la cheminée. Ces poussières sont récupérées aux fins d'extraction des substances de valeur qu'elles peuvent contenir. Une expérience de démonstration de cet appareil est facilement réalisable en salle de cours. On remplit d'une fumée foncée un tube transparent avant d'établir un champ électrique entre le fil central et les parois du tube. Lorsqu'on applique la tension l'air contenu dans le tube se clarifie instantanément.

§ 120. La décharge en arc

1. Si après avoir créé une décharge à étincelle alimentée par une puissante source d'énergie on diminue la distance entre les électrodes (ou la résistance du circuit extérieur) la décharge cesse d'être discontinue et un nouveau type de décharge apparaît — la *décharge en arc*. Le courant augmente alors fortement, atteignant des dizaines ou des centaines d'ampères, tandis que la tension aux bornes des électrodes diminue jusqu'à quelques dizaines de volts.

On peut produire une décharge en arc à partir d'une source basse tension sans passer par le stade de la décharge à étincelle. Pour cela on rapproche les électrodes jusqu'à ce qu'elles se touchent ; au point de leur contact les électrodes sont fortement échauffées par le courant électrique ; lorsqu'elles sont devenues incandescentes, on les écarte l'une de l'autre et il s'établit entre elles un *arc électrique* d'un éclat éblouissant. C'est en utilisant ce procédé que le physicien russe V. V. Pétrov (1761-1834) alluma pour la première fois, en 1802, un arc électrique. Il utilisait des électrodes en charbon de bois alimentées par une puissante batterie galvanique. Les charbons étaient chauffés à blanc et une colonne de gaz de grande brillance apparaissait entre eux. Les résultats de Pétrov avaient été publiés en langue russe et restèrent inaccessibles aux savants étrangers, et en Russie même on n'y attacha aucune importance. Le phénomène d'arc électrique fut redécouvert, vers 1808, par le chimiste anglais Davy (1778-1829) et, sans raison apparente, reçut le nom d'*arc de Volta*.

Actuellement l'arc électrique fonctionnant à la pression atmosphérique est le plus souvent allumé entre des électrodes de graphite spéciales fabriquées en graphite fritté avec des liants. La distance entre électrodes pendant le fonctionnement est de l'ordre de 5 mm, avec un courant de 10 à 20 A et une tension de 40 à 50 V. A mesure que l'arc brûle, l'extrémité de la cathode devient pointue, tandis qu'un *cratère* apparaît sur l'anode. Le cratère est l'endroit le plus

chaud de l'arc : sa température atteint 4000 °C sous pression atmosphérique et 7000 °C sous pression de 20 atm (cette dernière température est supérieure à celle de la photosphère du Soleil). Dans le cas d'arcs à électrodes métalliques la température est moins élevée (2000 à 2500 °C) du fait de la grande conductibilité thermique des électrodes ainsi que par suite de la vaporisation rapide des métaux qui consomme beaucoup de chaleur.

2. Selon V. F. Mitkévitch (1872-1951) la décharge en arc est entretenue pour l'essentiel par l'*émission thermoïonique sur la surface de la cathode*. Ce point de vue est corroboré par le fait expérimental que dans de nombreux cas l'arc ne peut être stable que si la température de la cathode est élevée. Si on refroidit la cathode, l'arc devient instable, s'éteint et s'allume périodiquement. Le refroidissement de l'anode ne perturbe aucunement le fonctionnement stable de l'arc.

Ce point de vue est en accord aussi avec le comportement de la décharge luminescente lorsqu'on fait croître le courant qui la traverse. Lorsque la cathode d'un tube luminescent s'échauffe par bombardement par les ions positifs, un courant thermoïonique apparaît, qui s'ajoute au courant des électrons secondaires. De ce fait la charge d'espace positive existant près de la cathode diminue et entraîne une diminution de la chute de potentiel cathodique. Si on augmente encore le courant de décharge la chute de potentiel cathodique devient comparable au potentiel d'ionisation ou d'excitation du gaz, i.e. de l'ordre de 10 V. La conductibilité de l'espace interélectrode augmente et la décharge lumineuse cède la place à une décharge en arc. Si on refroidit la cathode, l'émission thermoïonique diminue et l'arc ne s'établit pas ou fonctionne de façon instable. On peut par contre transformer en arc une décharge lumineuse en chauffant la cathode filiforme par une source de courant indépendante.

A mesure qu'on fait croître le courant de décharge la résistance R de l'arc diminue fortement du fait de l'accroissement de l'émission thermoïonique de la cathode et de l'intensification de l'ionisation du gaz dans l'espace interélectrode. Comme la résistance R diminue plus rapidement que n'augmente le courant J, lorsqu'on fait croître J la chute de tension $V = R.J$ dans l'espace interélectrode *diminue au lieu de croître*. On dit que la décharge en arc présente une *caractéristique voltampère tombante*, i.e. telle que la chute de tension dans l'arc diminue lorsque le courant augmente. Il s'ensuit que pour assurer un fonctionnement stable de l'arc, même si le courant vient à varier, par exemple, par suite du refroidissement de la cathode, il faut que la tension appliquée aux électrodes soit plus grande que dans le cas où le courant serait absolument invariable. Si on ne prend pas cette précaution l'arc s'éteint. Pour assurer un fonctionnement stable de l'arc on branche dans son circuit une *résistance ballast*. Si le courant vient à diminuer la chute de tension sur la résistance ballast diminue et si la tension d'alimentation du circuit

est constante, la tension entre les électrodes devra augmenter, ce qui assurera un fonctionnement stable de l'arc.

3. Outre les décharges en arc déterminées par l'émission thermoïonique il existe d'autres types de décharges, par exemple les décharges en arc qui se réalisent dans les tubes à mercure. Les *tubes à mercure* (ou à cathode liquide) sont constitués par des ampoules en verre ou en verre de silice préalablement évacuées, puis remplis de vapeur de mercure. La décharge en arc est amorcée en faisant jaillir une étincelle entre deux petites colonnes de mercure faisant fonction d'électrodes. L'arc à mercure constitue une puissante source de rayons ultraviolets. Aussi les utilise-t-on en médecine et pour les recherches scientifiques. Les ampoules sont fabriquées en verre de silice ou en verres spéciaux transparents aux rayons ultraviolets.

Les études expérimentales ont montré que les électrons étaient émis par une petite tache très lumineuse qui se formait sur la cathode. s'y déplaçait rapidement et qu'on appelle pour cela *tache cathodique*. La densité de courant dans la tache cathodique atteint des valeurs énormes de 10^6 à 10^7 A/cm^2. Une tache cathodique peut se former non seulement sur une cathode en mercure, mais aussi sur toute autre cathode métallique.

Les arcs à mercure et les arcs à électrodes métalliques sont appelés *arcs électriques à cathode froide*. La raison de cette dénomination réside en ce que jadis on pensait que toute la surface de la cathode était froide. En conséquence il ne pourrait donc y avoir d'émission thermoïonique et celle-ci ne jouerait aucun rôle dans le phénomène. Langmuir suggéra qu'avec une cathode froide la décharge en arc serait entretenue par une *émission autoélectronique de la cathode*. Effectivement la chute de tension cathodique ($\sim$10 V) se produit sur une distance comparable à la longueur de libre parcours de l'électron. A proximité de la cathode le champ électrique est donc suffisamment puissant pour arracher des électrons de la surface de la cathode. Il est indubitable que dans les arcs à cathode « froide » l'autoémission d'électrons joue un rôle notable. Plus tard certaines observations permirent de supposer que certains points de la cathode pourraient être portés à des températures suffisamment élevées pour qu'apparaisse une émission thermoélectronique qui de concert avec l'émission froide entretiendrait l'arc. Cette question n'est cependant pas encore éclaircie.

§ 121. Le plasma

1. *On appelle plasma un gaz ionisé quasi neutre occupant un volume si grand que les fluctuations thermiques ne suffisent pas à perturber de façon notable sa quasi-neutralité.* On entend par quasi-neutralité du gaz le fait que celui-ci est électriquement neutre par compensation. les quantités de charges positives et négatives y étant presque égales.

Evaluons les dimensions de la région de l'espace où des écarts

notables à la quasi-neutralité pourraient se manifester en admettant pour simplifier que les charges des particules positives et négatives sont toutes égales à la charge élémentaire e. Posons qu'un tel plasma occupe l'espace compris entre les plans AB et MN (fig. 288). Supposons que par suite de fluctuations thermiques les charges négatives se soient déplacées en haut d'une distance l. Aux frontières du plasma apparaîtront alors des charges macroscopiques de signes contraires de densité superficielle $\sigma = nle$, où n est la concentration de particules d'un signe. L'intensité de champ électrique qui en résulte sera $E = 4\pi\sigma = 4\pi nle$ et la densité d'énergie électrique correspondante sera égale à $E^2/(8\pi) = 2\pi (nle)^2$. Comme le champ électrique puise son énergie aux dépens de l'énergie cinétique de mouvement thermique des particules de gaz, la densité d'énergie $E^2/(8\pi)$ ne peut être supérieure à $3nkT$. (L'énergie cinétique moyenne revenant aux particules négatives ou positives contenues dans l'unité de volume est égale à $^3/_2\ kT$.) Ainsi, en négligeant le facteur numérique 3, on doit avoir $2\pi (nle)^2 < nkT$ ou $l < D$, avec

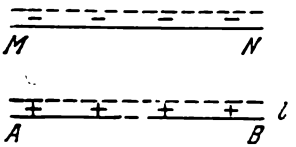


Fig. 288

$$D = \sqrt{\frac{kT}{2\pi ne^2}}. \qquad (121.1)$$

La grandeur D est le *rayon* ou *longueur de Debye*. (Nous en donnons une définition plus précise dans le problème 1 à la fin de ce paragraphe.)

Nous arrivons ainsi à la conclusion que *le plasma ne peut conserver sa quasi-neutralité que si ses dimensions linéaires sont beaucoup plus grandes que le rayon de Debye D*. Le plasma ne peut se comporter comme une *collectivité corrélée de particules chargées* que si la condition de quasi-neutralité est vérifiée ; s'il n'en est pas ainsi on se trouve en présence d'un ensemble de particules sans interactions mutuelles. Si, par exemple, un gradient de concentration existait dans le plasma, les ions positifs et négatifs se déplaceraient, malgré la différence de leurs coefficients de diffusion, avec la même vitesse moyenne dans le même sens grâce à la quasi-neutralité du plasma. On dit alors que la diffusion est *ambipolaire*. La cause physique du caractère ambipolaire de la diffusion du plasma réside en ce que par suite des différences entre les coefficients de diffusion et entre les mobilités des ions il se produit dans le plasma une certaine séparation des charges électriques donnant naissance à un champ électrique qui ralentit ou accélère la diffusion des ions de signes différents. Par suite les vitesses de diffusion des ions positifs et négatifs s'égalisent. Le processus de rétablissement de la quasi-neutralité du plasma est analogue à l'apparition dans les corps élastiques déformés de forces qui s'opposent aux déformations. A ces processus est liée l'existence

de différents types d'*oscillations collectives* du plasma qui sont beaucoup plus variés que dans les gaz composés de particules neutres.

2. Suivant le degré d'ionisation α on distingue le *plasma faiblement ionisé* (α au-dessous d'un pour cent), *moyennement ionisé* (α de quelques pour cent) et le plasma *complètement ionisé*. Dans les conditions naturelles terrestres on ne rencontre le plasma que rarement (par exemple dans le canal de l'éclair). Les couches supérieures de l'atmosphère, étant plus sujettes aux actions de facteurs ionisants tels les rayons ultraviolets et les rayons cosmiques, renferment constamment un plasma faiblement ionisé — l'*ionosphère* qui réfléchit les ondes radioélectriques et rend possibles les liaisons radio à grandes distances (par exemple entre des points diamétralement opposés du globe terrestre). Dans l'espace cosmique le plasma est l'état de la matière le plus répandu. Le Soleil et les étoiles chaudes sont constitués de plasmas complètement ionisés. Par suite de nombreux problèmes que pose l'astrophysique sont liés à l'étude des propriétés physiques du plasma. C'est sur la base de l'astrophysique que se constitua la *magnétohydrodynamique* qui traite le plasma en mouvement dans un champ magnétique comme un *milieu liquide continu de grande conductibilité électrique*. Le plasma apparaît dans différents types de décharge électrique dans les gaz, par exemple dans la colonne positive de la décharge luminescente ou dans le canal central de l'étincelle. La physique du plasma est un domaine de la physique relativement nouveau qui se développe rapidement et qui fait l'objet de cours spéciaux. Dans un cours de physique générale on ne peut qu'en esquisser certains aspects.

3. Evaluons la conductivité électrique λ du plasma totalement ionisé composé d'électrons et d'ions positifs portant chacun une charge Ze. Etant donné la grande masse des ions positifs on peut ne pas tenir compte de leurs déplacements et poser que tout le courant est transporté par les électrons. La valeur de λ est déterminée par les collisions des électrons avec les ions. Les chocs entre électrons sont sans action sur le courant puisque lors des chocs l'impulsion totale des électrons ne change pas. On peut donc ne pas en tenir compte. Les *forces d'attraction coulombienne* qui sont des *forces à grande distance* s'exercent entre les ions et les électrons du plasma. Il est peu fréquent qu'un électron s'approche d'un ion à si petite distance que la direction de son mouvement change brusquement, par saut. Ce sont surtout les interactions d'un électron *avec un grand nombre d'ions* à la fois qui importent et qui provoquent une variation *régulière et continue* de sa trajectoire. Les grandes déviations angulaires de la trajectoire d'un électron par rapport à sa direction primitive résultent de l'addition des *petites déviations* angulaires déterminées par ses interactions avec des ions « lointains ». Aussi ne peut-on parler de chocs, de longueur et de temps de libre parcours que tout conventionnellement. Convenons d'entendre par temps de libre parcours de

l'électron l'intervalle de temps τ pendant lequel la direction de la trajectoire de l'électron tourne de 90° environ.

Pour pouvoir évaluer τ nous supposerons d'abord qu'un seul électron se meut dans le champ d'un ion positif portant une charge Ze. En notant v la vitesse à l'infini et b le paramètre de choc de l'électron, l'angle de déviation ϑ que subit la trajectoire de l'électron lorsqu'il passe près de l'ion est donné par la formule

$$\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}=\frac{mv^2b}{Ze^2},$$

où m est la masse de l'électron (cf. t. I, § 58, où une formule analogue avait été établie pour le cas de mouvements dans un champ gravitationnel). Le paramètre de choc b pour lequel $\vartheta = 90°$ est défini par la formule $b = Ze^2/(mv^2)$. A cette valeur de b correspond une *section droite efficace*

$$\sigma=\pi b^2=\pi\left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2.$$

Si on tient compte des interactions avec des ions lointains, on arrive à la même formule mais multipliée par L:

$$\sigma=\pi L\left(\frac{Ze^2}{mv^2}\right)^2.$$

Le facteur L est appelé *logarithme coulombien.* Il dépend peu de la température et de la densité du plasma. Pour un plasma composé de deutérium complètement ionisé avec $kT \sim 10$ keV et une concentration électronique $n \sim 10^{12}$ à 10^{15} cm^{-3}, $L \approx 15$. Puisque chaque ion positif contient Z charges élémentaires leur concentration est égale à n/Z; la longueur moyenne et le temps de « libre parcours » sont donnés par les formules

$$\bar{l}=\frac{1}{\sigma n/Z}=\frac{Z}{\sigma n},\quad \bar{\tau}\approx\frac{\bar{l}}{v}=\frac{m^2\bar{v}^3}{\pi Zne^4L}.$$

En y substituant $m\bar{v}^2 \approx 3kT$ on obtient

$$\bar{\tau}\approx\frac{(3kT)^{3/2}\sqrt{m}}{\pi Zne^4L}. \tag{121.2}$$

La conductivité du plasma est

$$\lambda\approx\frac{ne^2\bar{\tau}}{m}\approx\frac{(3kT)^{3/2}}{\pi Ze^2L\sqrt{m}}. \tag{121.3}$$

Il est évident que ce n'est là qu'une approximation grossière et non pas une démonstration en règle de la formule (121.3). On peut cependant donner une démonstration plus justifiée de cette formule. En portant dans (121.3) les valeurs numériques convenables et en exprimant la température énergétique $\Theta = kT$ en électrons-

volts, on arrive à une formule approchée de λ (en s^{-1}):

$$\lambda \approx \frac{10^{13}}{Z} \Theta^{3/2},$$

en admettant que $L \approx 15$. La conductivité du plasma croît proportionnellement à la température absolue à la puissance 3/2. Dans un plasma chaud la conductivité devient très grande. Ainsi avec $\Theta = 10$ keV, pour un plasma de deutérium $\lambda \approx 10^{19}\ s^{-1}$, i.e. ce plasma présente une plus grande conductivité que le cuivre ($5 \cdot 10^{17}\ s^{-1}$). La conductivité thermique du plasma croît avec la température encore plus rapidement, proportionnellement à $\Theta^{5/2}$, puisque le plasma vérifie évidemment la loi de Wiedemann-Franz.

4. Du fait de la grande différence entre les masses des électrons et des ions du plasma, on peut y déceler l'existence d'états de quasi-équilibre pouvant être caractérisés par *deux températures*. Supposons que la distribution initiale des vitesses des électrons et des ions du plasma soit isotrope sans être maxwellienne. Pendant les chocs entre électrons ils échangent une énergie qui est de l'ordre de l'énergie initiale de ces électrons. On peut donc évaluer le temps d'établissement d'une distribution en énergie (i.e. d'une distribution maxwellienne) des électrons résultant de leurs chocs mutuels par la formule (121.2). (Pour s'en rendre compte il suffit d'y remplacer la masse m de l'électron par la masse réduite $m/2$). Ce temps appelé *temps de relaxation des électrons* $\bar{\tau}_e$ est proportionnel à la racine carrée de la masse de l'électron: $\bar{\tau}_e \sim \sqrt{m_e}$. On définit de même le *temps de relaxation des ions*; c'est le temps au bout duquel s'établit une distribution en énergie des ions résultant de leurs chocs mutuels $\bar{\tau}_i \sim \sqrt{m_i}$. Si on applique la formule (121.2) aux chocs entre électrons et ions on obtient un temps proportionnel à $\sim \sqrt{m_e}$. Or à chaque collision la particule rapide ne transmet à la particule lente qu'une partie négligeable de son énergie. En moyenne la part d'énergie cédée est de l'ordre du produit de m_e/m_i par l'énergie initiale de la particule légère (cf. t. I, § 28, problème 9). Les énergies ne s'égaliseront qu'au bout d'un temps $\bar{\tau}_{ie}$ qui est m_i/m_e fois plus long que le temps $\bar{\tau}_e$. On écrira donc

$$\bar{\tau}_e : \bar{\tau}_i : \bar{\tau}_{ie} \sim 1 : \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} : \frac{m_i}{m_e}. \qquad (121.4)$$

Il en résulte que $\bar{\tau}_e \ll \bar{\tau}_i \ll \bar{\tau}_{ie}$. Si on abandonne le plasma à lui-même, il s'y établira d'abord une distribution maxwellienne des vitesses d'abord des électrons, puis des ions. Il en résultera un état de quasi-équilibre dans lequel les électrons auront une température T_e et les ions une température T_i. En général $T_e \neq T_i$. Dans ce cas on dit que le plasma est *non isotherme* ou *à deux températures*. Plus tard, à la suite d'échanges d'énergie entre les électrons et les

ions, il s'établit une distribution maxwellienne pour tout le plasma, caractérisée par la même température pour les électrons et les ions (*plasma isotherme*).

Lorsque le plasma est soumis à l'action d'un champ électrique, un courant électrique y circule avec dégagement de chaleur par effet Joule. Ce sont presque exclusivement les électrons en tant que particules rapides qui reçoivent de l'énergie du champ. Les ions s'échauffent surtout aux dépens de l'énergie des électrons « chauds » par interaction coulombienne avec ceux-ci. Comme ce dernier processus est relativement lent, *la température électronique dans le plasma est plus grande que la température ionique.* La différence entre ces deux températures peut être fort importante. Ainsi dans la colonne positive d'une décharge lumineuse, sous une pression gazeuse de l'ordre de 0,1 mm Hg, la température électronique peut atteindre 50 000 °C et au-delà, tandis que les ions ont une température ne dépassant pas quelques centaines de degré.

5. L'application pratique la plus importante que peut avoir le plasma est liée au problème de la *fusion thermonucléaire contrôlée* (cf. § 88). Pour que des réactions thermonucléaires puissent s'initier dans la substance, il est nécessaire de la porter à très haute température de l'ordre de quelques keV ou de quelques dizaines de keV. Or à ces températures toutes les substances n'existent qu'à l'état de plasma. Les substances présentant le plus d'intérêt pour la fusion contrôlée sont les *isotopes de l'hydrogène* : *deutérium* (D) et *tritium* (T). Il est plus facile de réaliser la réaction de fusion dans un mélange deutérium-tritium. La réserve totale du deutérium contenu dans les océans est estimée à $\sim 4 \cdot 10^{13}$ tonnes, ce qui équivaut à une réserve d'énergie de $\sim 10^{20}$ kW·ans (la quantité totale d'énergie consommée sur le Globe est $\sim 10^{10}$ kW). Le tritium qui est un élément fortement radioactif n'existe pas à l'état naturel et on le produit artificiellement. Dans les réacteurs à fusion thermonucléaire de l'avenir tout le tritium consommé sera régénéré par irradiation de ^{6}Li par les neutrons produits dans les réacteurs eux-mêmes.

Comme les réactions thermonucléaires doivent évoluer assez lentement et sans à-coup, il est nécessaire de confiner le plasma pendant un temps relativement long dans un volume limité de la chambre loin de ses parois. On compte utiliser pour cela le confinement du plasma dans un champ magnétique qui empêcherait les électrons et les ions de se déplacer vers les parois de la chambre de combustion.

Le bilan énergétique de tout réacteur à fusion doit être tel que l'énergie libérée dans les réactions thermonucléaires soit supérieure à l'énergie fournie par les sources extérieures pour assurer le fonctionnement du réacteur. Les principales sources de pertes d'énergie sont, d'une part, le *rayonnement de freinage* des électrons lors de leurs collisions coulombiennes et, d'autre part, le *rayonnement de cyclotron* qui résulte du mouvement accéléré des électrons dans un champ ma-

gnétique. Pour que les réactions thermonucléaires soient autoentretenues, il faut porter le plasma à une température critique ($\sim$50 keV pour un réacteur à deutérium pur et $\sim$10 keV dans le cas d'un mélange à proportions égales de deutérium et de tritium). Les calculs montrent que le critère dit de Lawson doit être vérifié : $n\tau > 10^{16}$ s/cm^3 pour un réacteur D-D et $n\tau > 10^{14}$ s/cm^3 pour un réacteur D-T (n est la concentration d'ions dans le plasma et τ le temps de confinement moyen du plasma).

La principale difficulté à laquelle se heurte la fusion contrôlée est liée à l'obtention d'un *plasma stable*. Comme les forces coulombiennes s'exercent à grande distance le plasma est le siège de différents processus collectifs, par exemple l'apparition spontanée de *bruits* et d'*oscillations* qui déterminent l'*instabilité* du plasma. La solution du problème de la fusion contrôlée exige que ces instabilités soient éliminées.

PROBLÈMES

1. Le demi-espace se trouvant à droite d'un plan chargé infini AB (fig. 289) est occupé par un plasma totalement ionisé composé d'électrons et d'ions positifs portant chacun une seule charge. Calculer le champ électrique et la distribution des charges dans le plasma à toute distance du plan AB, sachant que la densité superficielle des charges extérieures sur ce plan est égale à σ.

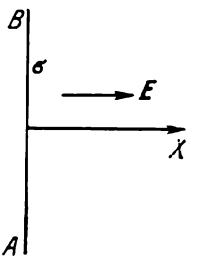


Fig. 289

Solution. Dans le plasma situé à proximité du plan AB apparaît un excès d'ions portant des charges de signe opposé à celui de σ et un défaut d'ions de même signe que σ. Ainsi il y apparaît un champ électrique E normal au plan AB. Orientons l'axe des coordonnées X vers l'intérieur du plasma normalement au plan AB. Par raison de symétrie toutes les grandeurs ne seront fonction que de la coordonnée x. Par conséquent

$$\operatorname{div} E = \frac{dE}{dx} = 4\pi\rho. \qquad (121.5)$$

La densité ρ des charges électriques libres peut être représentée par $\rho = (n^+ - n^-)e$, où n^+ est la concentration des ions positifs et n^- celle des ions négatifs. A distance infinie du plan AB le plasma est *électriquement neutre* $n^+ = n^- = n$ et près de ce plan les concentrations n^+ et n^- sont différentes. En désignant par φ le potentiel électrique du champ E, selon la formule de Boltzmann

$$n^+ = n \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right), \quad n^- = n \exp\left(+\frac{e\varphi}{kT}\right). \qquad (121.6)$$

Pour $x = +\infty$ le potentiel φ est nul et par suite $n^+ = n^- = n$. La différence des concentrations s'écrira donc

$$n^+ - n^- = n\left[\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) - \exp\left(+\frac{e\varphi}{kT}\right)\right] = -2n \operatorname{sh}\frac{e\varphi}{kT}.$$

Par conséquent

$$\frac{dE}{dx} = -8\pi ne \operatorname{sh}\frac{e\varphi}{kT}.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $2E\,dx = -2d\varphi$, on obtient

$$dE^2 = 16\pi ne \operatorname{sh} \frac{e\varphi}{kT} d\varphi.$$

En intégrant on trouve

$$E^2 = 16\pi nkT \operatorname{ch} \frac{e\varphi}{kT} + C.$$

On détermine la constante C en imposant que le champ E soit nul à l'infini (où $\varphi = 0$), ce qui conduit à

$$E^2 = 16\pi nkT \left(\operatorname{ch} \frac{e\varphi}{kT} - 1\right) = 32\pi nkT \operatorname{sh}^2 \frac{e\varphi}{kT}.$$

On ne retient que le signe plus puisque lorsque le champ E est positif et dirigé de gauche à droite, le potentiel φ doit être positif lui aussi. Si le champ est négatif, i.e. dirigé de droite à gauche, le potentiel φ doit être également négatif. Par conséquent

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} = 4\sqrt{2\pi nkT} \operatorname{sh} \frac{e\varphi}{kT}. \tag{121.7}$$

Après intégration on obtient

$$\operatorname{th} \frac{e\varphi}{kT} = C_1 e^{-x/D}$$

où D est une constante définie par

$$D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi ne^2}}. \tag{121.8}$$

Cette formule est l'expression exacte du rayon de Debye que nous avons introduit dans ce paragraphe.

On peut exprimer la constante C_1 en termes du potentiel φ_0 à la frontière du plasma. On obtient ainsi

$$\operatorname{th} \frac{e\varphi}{kT} = \operatorname{th} \frac{e\varphi_0}{kT} e^{-x/D}. \tag{121.9}$$

Il est facile de relier le potentiel φ à l'intensité du champ électrique extérieur $E_0 = 2\pi\sigma$. Pour $x = 0$ on doit avoir $E = E_0$ et par conséquent

$$E_0 = 4\sqrt{2\pi nkT} \operatorname{sh} \frac{e\varphi_0}{kT}. \tag{121.10}$$

Lorsqu'on s'éloigne de la frontière du plasma la quantité $\operatorname{th} \frac{e\varphi}{kT}$ diminue suivant une loi exponentielle. Sur la longueur du rayon de Debye elle diminue de e fois et c'est ce qui définit la loi de décroissance du champ E en fonction de la coordonnée x. On peut dire que l'ordre de grandeur du rayon de Debye D caractérise la profondeur de pénétration du champ électrique dans le plasma.

2. Résoudre le même problème que ci-dessus pour une charge ponctuelle q entourée de toute part par le plasma. Ne considérer que des distances r de la charge ponctuelle pour lesquelles la condition $|e\varphi| \ll kT$ est remplie.

Solution. Lorsque la condition $|e\varphi| \ll kT$ est vérifiée les formules (121.6) peuvent être développées en séries dont on ne gardera que les termes du premier degré. En portant les expressions ainsi obtenues dans l'équation de

Poisson $\Delta\varphi = -4\pi e(n^+ - n^-)$ cette équation s'écrit

$$\Delta\varphi + \frac{\varphi}{D^2} = 0, \tag{121.11}$$

où D est donné par la formule (121.8). Compte tenu de la symétrie sphérique du système

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) + \frac{\varphi}{D^2} = 0.$$

La solution générale de cette équation est de la forme

$$\varphi = \frac{1}{r}(Ce^{-r/D} + C'e^{r/D}). \tag{121.12}$$

La constante d'intégration C' doit être nulle afin que $\varphi = 0$ pour $r = \infty$. Pour déterminer la constante C nous supposerons que la condition $|e\varphi| \ll kT$ est déjà vérifiée pour $r \ll D$. A ces distances la solution (121.12) sera alors encore valable, mais se réduira au potentiel coulombien $\varphi = q/r$. On doit donc avoir $C = q$, i.e.

$$\varphi = \frac{q}{r}e^{-r/D}. \tag{121.13}$$

Ce potentiel est appelé *potentiel de Debye*. La formule (121.13) montre que l'ordre de grandeur du rayon de Debye caractérise la distance de la charge q à laquelle le champ coulombien de cette charge est occulté par les ions du plasma de signe opposé. On peut également dire que l'action du champ coulombien de la charge q s'étend à une distance de l'ordre du rayon de Debye D et ne se manifeste plus à plus grande distance.

3. On admet en électrostatique qu'à l'état d'équilibre l'électricité se répartit sur la surface d'un conducteur. En fait elle se répartit non sur une surface mathématique, mais dans une couche superficielle d'épaisseur l finie. Evaluer cette épaisseur.

Réponse. L'épaisseur l est comparable au rayon de Debye D à condition de modifier l'expression définissant D afin de tenir compte de la distribution de Fermi des électrons du métal. Il faut alors remplacer la quantité kT par l'énergie de Fermi (99.6). Ayant ainsi modifié la formule et en y négligeant les facteurs numériques de l'ordre de l'unité nous trouvons

$$l = \sqrt{a_1 n^{-1/3}},$$

où $a_1 = \frac{\hbar^2}{4\pi^2 me} = 0{,}53 \cdot 10^{-8}$ cm (rayon de la première orbite de Bohr dans l'atome d'hydrogène) et $n^{-1/3}$ est la distance moyenne entre les électrons dans le métal.

CHAPITRE X

OSCILLATIONS ET ONDES

§ 122. Equation du circuit oscillant

1. En physique le terme vibrations désigne non seulement les mouvements périodiques ou presque périodiques d'un corps exécutant un grand nombre de fois un mouvement de va-et-vient autour d'une position d'équilibre, mais a un sens plus large. *On entend par vibration tout processus périodique ou sensiblement périodique où la valeur d'une grandeur physique donnée reprend la même valeur ou approximativement la même valeur à intervalles de temps égaux ou sensiblement égaux.*

Par exemple, un cadre conducteur rectangulaire (fig. 290) est animé d'un mouvement de rotation uniforme avec la vitesse angulaire ω dans un champ magnétique homogène. En désignant par S l'aire du cadre mobile, le flux magnétique qu'il embrasse est égal à $\Phi = BS \cos \alpha$, α étant l'angle que fait le vecteur induction magnétique $\boldsymbol{B}$ avec la normale $\boldsymbol{N}$ au plan du cadre mobile. Si sa rotation est uniforme $\alpha = \omega t$ et $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$, avec $\Phi_0 = BS$. Une force électromotrice $\mathscr{E}_{\text{ind}} = -d\Phi/dt = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$ est induite dans le cadre mobile qui est parcouru par un courant électrique $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \sin \omega t$, $\mathscr{E}_0$ et $\mathcal{J}_0$ étant des constantes. Toutes ces expressions décrivent un processus vibratoire où les grandeurs qui oscillent sont le flux Φ, la force électromotrice $\mathscr{E}$ et le courant électrique $\mathcal{J}$.

Les lois décrivant les processus vibratoires caractérisent non seulement les valeurs instantanées des grandeurs qui oscillent mais l'ensemble du *processus vibratoire*, quelle que soit la nature des grandeurs oscillatoires considérées. L'étude de ces lois fait l'objet de la *théorie des vibrations* utilisant une *approche commune* quelle que soit la nature physique des vibrations. Dans ce qui suit nous aurons l'occasion de donner des exemples concrets de cette approche.

Dans ce chapitre nous considérerons surtout les oscillations électriques, mais pour faciliter leur étude nous les comparerons aux vibrations analogues de divers systèmes mécaniques.

2. Nous commencerons l'étude des oscillations électriques par l'établissement de l'*équation du circuit oscillant*. Le circuit oscillant se compose essentiellement d'un condensateur, d'une bobine d'inductance L et d'une résistance ohmique R montés en série (fig. 291). La force électromotrice d'une source extérieure crée entre les points l

et *2* du circuit une tension définie $\mathscr{E}$ généralement variable dans le temps. Choisissons sur le circuit un sens de circulation positif repéré sur la figure 291 par des flèches. Le courant sera compté positivement s'il circule dans le sens positif et négativement s'il circule dans le

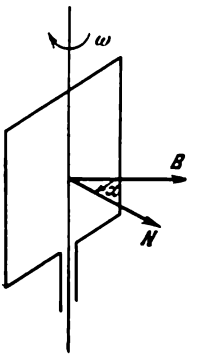


Fig. 290

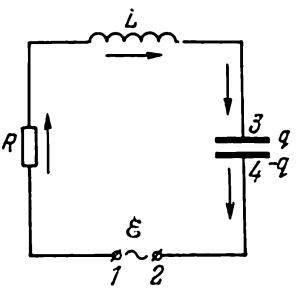


Fig. 291

sens négatif. Notons q la charge de l'armature du condensateur qui correspond au sens de circulation positif *13421* sur le circuit. Appliquons à ce circuit l'équation de Maxwell

$$\int E_l\,dl = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{122.1}$$

Nous utiliserons ici les *unités de mesure du système pratique* qui sont plus commodes dans le cas qui nous occupe. En admettant que les processus sont quasi stationnaires et en appliquant la loi d'Ohm à la partie *13* du circuit on obtient

$$\int\limits_{13} E_l\,dl = \int \frac{j}{\lambda}\,dl = \mathcal{J}\int \frac{dl}{S\lambda} = R\mathcal{J},$$

où R est la résistance ohmique de cette partie du circuit. Si la résistance de la partie *42* est très petite, l'intégrale prise le long du chemin *32* sera égale à la tension V aux bornes du condensateur. Pour les processus quasi stationnaires on peut écrire

$$\int\limits_{32} E_l\,dl = V = \frac{q}{C}.$$

Enfin l'intégrale $\int\limits_{21} E_l dl = -\int\limits_{12} E_l dl$ représente la tension appliquée aux bornes *1* et *2* du circuit oscillant mais changée de signe:

$$\int\limits_{21} E_l\,dl = -\mathscr{E}.$$

L'équation (122.1) s'écrira donc sous la forme

$$\frac{d\Phi}{dt}+R\mathcal{J}+\frac{q}{C}=\mathcal{E}. \qquad (122.2)$$

Pour des courants quasi stationnaires $\Phi = LI$. D'autre part,

$$\mathcal{J}=\frac{dq}{dt}, \qquad (122.3)$$

de sorte que

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{dq}{dt}\right)+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\mathcal{E}. \qquad (122.4)$$

C'est l'équation du circuit oscillant. Si la bobine d'inductance est indéformable (L = const), l'équation s'écrit

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=\mathcal{E}. \qquad (122.5)$$

L'équation de mouvement d'un poids suspendu à un ressort (fig. 292) est l'équivalent mécanique de l'équation (122.5). Si la loi de Hooke est vérifiée et si le déplacement du poids fait apparaître une force de freinage $-\alpha\dot{x}$ proportionnelle à la vitesse $\dot{x}$, l'équation de mouvement s'écrira

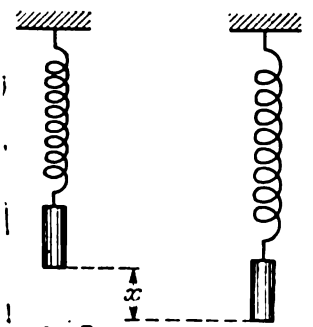


Fig. 292

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\alpha\dot{x}+F,$$

ou

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\dot{x}+kx=F, \qquad (122.6)$$

où x est l'écart du mobile par rapport à sa position d'équilibre (élongation) qui est comptée positivement si elle est dirigée suivant la verticale descendante. La quantité $-kx$ est la *force de rappel* qui est égale à la somme du poids du corps et de la force de tension du ressort ; F est la résultante de toutes les autres forces s'exerçant sur le poids suspendu. Cette dernière équation ne se distingue de (122.5) que par les notations et par la signification physique des grandeurs qui y figurent. Mathématiquement ces équations sont identiques. Dans l'équation (122.5) le rôle de l'élongation x est assumé par la charge q du condensateur, celui de la masse m par l'inductance L, celui du coefficient de résistance α par la résistance électrique R, celui de la constante élastique k du ressort par la quantité inverse de la capacité C et enfin celui de force excitatrice extérieure la f.é.m. extérieure $\mathcal{E}$. Des équations identiques doivent avoir des solutions identiques. Supposons que dans l'équation (122.6) $F = 0$ et que le coefficient α soit petit. Dans ces conditions, si on

écarte le poids de sa position d'équilibre ou si on lui applique une poussée suivant la verticale, on observera des oscillations s'amortissant faiblement dans le temps. Pour $\alpha = 0$ l'amortissement deviendra nul. Il résulte de l'identité mathématique des équations (122.5) et (122.6) que si on connecte une bobine d'inductance aux bornes d'un condensateur chargé, le circuit sera le siège d'*oscillations électriques*. La charge q du condensateur variera en fonction du temps suivant la même loi que celle qui décrit les déviations du poids en fonction du temps. Si le circuit ne comporte aucune résistance ohmique ($R = 0$) les oscillations électriques ne seront pas amorties. Si la résistance R n'est pas nulle, les oscillations seront amorties.

3. Pour comprendre la raison pour laquelle les oscillations apparaissent et sont entretenues dans un circuit oscillant, il n'est pas

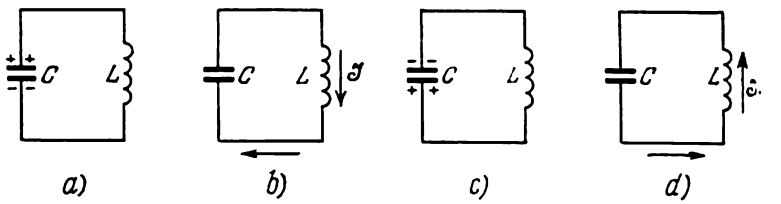


Fig. 293

nécessaire de recourir aux équations et à l'analogie mécanique. Supposons pour simplifier que la résistance électrique du circuit oscillant soit égale à zéro. Posons qu'à l'instant initial l'armature supérieure du condensateur est chargée positivement, l'armature inférieure est chargée négativement et qu'aucun courant ne circule dans le circuit (fig. 293, *a*). A cet instant toute l'énergie du circuit oscillant est concentrée dans le condensateur. En l'absence de force électromotrice extérieure le condensateur commence à se décharger, la bobine d'inductance est parcourue par un courant électrique et l'énergie électrique du condensateur se transforme en énergie magnétique de la bobine d'inductance. Ce processus ne cessera que lorsque la charge du condensateur deviendra nulle, le courant dans le circuit étant alors maximal (fig. 293, *b*). A partir de ce moment le courant commence à décroître sans changer de sens. La décroissance du courant ne sera cependant pas instantanée à cause de la force électromotrice d'inductance. Le courant charge positivement l'armature inférieure du condensateur et négativement l'armature supérieure. Le champ électrique qui apparaît tend à réduire le courant et lorsque le courant devient nul, la charge du condensateur atteint son maximum (fig. 293, *c*). A ce moment les charges portées par les armatures du condensateur deviennent égales en valeurs absolues aux charges initiales (en position *a*) mais de signes contraires à celles-

ci. Le condensateur commence alors à se décharger à nouveau et les conducteurs seront parcourus par un courant de sens contraire à celui qui circulait en position *b*. A l'instant où le courant atteindra sa valeur maximale (fig. 293, *d*) le condensateur sera déchargé, après quoi le circuit oscillant reviendra à l'état initial *a*. Après cela le cycle de décharge et de charge du condensateur sera décrit à nouveau. Si on pouvait éliminer toutes les pertes d'énergie, la répétition de ce cycle durerait indéfiniment et le circuit oscillant serait le siège d'oscillations non amorties rigoureusement périodiques.

4. Les équations (122.5) et (122.6) sont des *équations différentielles de second ordre*. En l'absence de forces « extérieures » $\mathscr{E}$ ou F, ces équations sont *linéaires* et *homogènes* par rapport aux inconnues q et x et à leurs dérivées par rapport au temps. Dans ce cas ces équations décrivent des *oscillations* dites *libres*. Les systèmes oscillants dont les oscillations libres sont décrites par des équations linéaires sont appelés *systèmes oscillants linéaires*. Introduisons les notations:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{ou} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \tag{122.7}$$

$$2\gamma = \frac{R}{L} \quad \text{ou} \quad 2\gamma = \frac{\alpha}{m}, \tag{122.8}$$

$$X = \frac{\mathscr{E}}{L} \quad \text{ou} \quad X = \frac{F}{m}. \tag{122.9}$$

On obtient alors les équations suivantes:

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X, \tag{122.10}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = X. \tag{122.11}$$

La grandeur ω_0 est la *fréquence propre* du système oscillant et γ le *coefficient d'amortissement*. La signification de ces grandeurs sera précisée plus loin.

5. On peut écrire l'équation (122.5) sous la forme

$$V_L + V_R + V_C = V_{\text{ent}},$$

où V_L, V_R et V_C sont les tensions aux bornes de la bobine d'inductance, de la résistance ohmique et du condensateur; V_{ent} est la tension appliquée à l'entrée du circuit oscillant. D'après (122.5) ces grandeurs sont liées les unes aux autres par les relations

$$V_R = R\frac{dq}{dt} = CR\frac{dV_C}{dt}, \quad V_L = L\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{L}{R}\frac{dV_R}{dt}.$$

Ces relations sont à la base des circuits de *différentiation* et *d'intégration automatiques* que l'on appelle *modules de différentiation* et *d'intégration*. Si nous supposons, par exemple, que le circuit ne contient pas de condensateur, l'équation (122.5) s'écrira

$$V_L + V_R = V_{\text{ent}},$$

avec $V_L = \frac{L}{R}\frac{dV_R}{dt}$, ce qui signifie que la tension aux bornes de l'inductance est égale à un facteur numérique près à la dérivée de la tension appliquée aux bornes de la résistance R. Si les valeurs de L et de R sont choisies de façon que la condition $|V_L| \ll |V_{ent}|$ soit vérifiée, on aura $V_R \approx V_{ent}$ et par suite $V_L = \frac{L}{R}\frac{dV_{ent}}{dt}$. Appliquons la tension prélevée sur l'inductance aux bornes d'un oscillographe. L'oscillogramme représentera alors la dérivée de la tension d'entrée. Un circuit RL de ce type peut être utilisé aussi pour l'intégration. En effet $V_R = \frac{R}{L}\int V_L\,dt$. En choisissant R et L tels que $|V_R| \ll |V_L|$ on a en approximation $V_L = V_{ent}$ et par suite $V_R = \frac{R}{L}\int V_{ent}\,dt$. Si on applique la tension prélevée sur la résistance R à l'entrée d'un oscillographe on obtiendra un oscillogramme représentant l'intégrale de la tension d'entrée. Les circuits RC de différentiation et d'intégration fonctionnent de façon analogue.

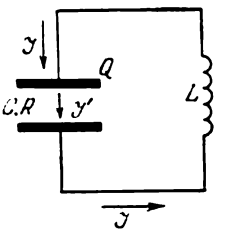


Fig. 294

PROBLÈME

Un contour oscillant comporte un condensateur avec pertes, ce qui signifie qu'une partie du courant arrivant sur l'une des armatures du condensateur passe à travers le diélectrique vers la deuxième armature. La capacité du condensateur est C et sa résistance est R. En négligeant la résistance de la bobine d'inductance et celle des fils de connexion et en admettant que le caractère quasi stationnaire des processus est respecté, établir l'équation des oscillations propres du circuit oscillant. Calculer la fréquence propre ω_0 et le coefficient d'amortissement γ.

S o l u t i o n. Si la condition du caractère quasi stationnaire des processus est remplie (fig. 294) on aura

$$L\frac{d\mathcal{J}}{dt} + V = 0, \quad Q = CV,$$

$$\dot{Q} = \mathcal{J} - \mathcal{J}', \qquad V = R\mathcal{J}'.$$

En éliminant Q, $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}'$ on obtient

$$\ddot{V} + 2\gamma\dot{V} + \omega_0^2 V = 0,$$

où

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \gamma = \frac{1}{2RC}.$$

§ 123. Oscillations libres de l'oscillateur harmonique

1. Si le circuit ne comporte pas de résistance ohmique les oscillations libres sont décrites par l'équation

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{123.1}$$

Les équations de cette forme décrivent les oscillations libres non amorties d'un poids suspendu à un ressort. Tout système, qu'il soit

mécanique, électrique ou autre, qui vérifie une équation de la forme (123.1) est appelé *oscillateur harmonique*. Si le système oscillant comporte une force de résistance $2\gamma\dot{q}$ on l'appelle *oscillateur harmonique amorti*.

Pour trouver la solution de l'équation (123.1) multiplions ses deux membres par $\dot{q}$. Après réarrangement on obtient

$$\frac{d}{dt}(\dot{q}^2+\omega_0^2q^2)=0.$$

On voit que la quantité $\dot{q}^2+\omega_0^2q^2$ ne varie pas dans le temps. Comme cette quantité est la somme de deux carrés elle est essentiellement positive et se laisse écrire sous la forme suivante:

$$\dot{q}^2+\omega_0^2q^2=\omega_0^2q_0^2,$$

où q_0 est une constante. Cette égalité exprime la conservation de l'énergie puisqu'on peut l'écrire comme suit:

$$\frac{1}{2}L\mathcal{J}^2+\frac{q^2}{2C}=\text{const}.$$

Pour intégrer une seconde fois on sépare les variables:

$$\frac{dq}{\sqrt{q_0^2-q^2}}=\pm\,\omega_0\,dt.$$

On en déduit

$$\arccos\frac{q}{q_0}=\pm\,\omega_0t+\text{const},$$

ou

$$q=q_0\cos(\omega_0t+\delta). \qquad (123.2)$$

Les constantes d'intégration q_0 et δ se déduisent des conditions initiales, par exemple les valeurs de la charge q et du courant $\mathcal{J}=\dot{q}$ à l'instant $t=0$.

2. Les formules de la forme (123.2) décrivent les oscillations libres d'un poids suspendu à un ressort, des pendules simple et pesant dans le régime de petites oscillations, d'un diapason, ainsi que les oscillations de tension dans le réseau électrique urbain. Lorsqu'une grandeur varie dans le temps conformément à la loi (123.2) on dit qu'elle effectue des *oscillations harmoniques*. Nous avons appris à connaître les oscillations harmoniques des systèmes mécaniques dans le tome I, où nous nous sommes surtout attachés à déterminer les périodes des oscillations libres. La grandeur ω_0 est la *fréquence circulaire* ou *pulsation* des oscillations harmoniques. Elle coïncide avec la fréquence circulaire propre du système oscillant définie par la

formule (122.7). L'intervalle de temps

$$T_0 = 2\pi/\omega_0, \tag{123.3}$$

au bout duquel la grandeur qui oscille reprend périodiquement une même valeur est appelé *période des oscillations*. Le nombre d'oscillations par unité de temps

$$\nu_0 = 1/T_0 = \omega_0/2\pi \tag{123.4}$$

est la *fréquence des oscillations*. L'unité de fréquence est le *hertz*. C'est la fréquence d'un phénomène périodique dont la période est 1 seconde. Dans ce qui suit nous omettrons le qualificatif circulaire et nous écrirons fréquence tout court car les notations suffisent pour

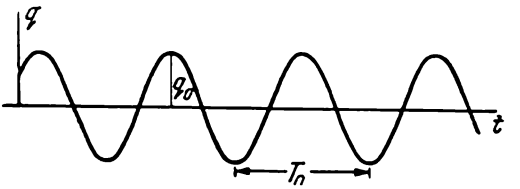


Fig. 295

comprendre de quoi il s'agit, de la pulsation (fréquence circulaire) ou de la fréquence définie par (123.4). On notera ω ou Ω la pulsation et ν la fréquence (123.4). La grandeur q_0 est l'*amplitude* et la grandeur $\omega_0 t + \delta$ est la *phase des oscillations*. La grandeur δ est la *phase initiale*. Les fréquences propres ω_0 et ν_0 ainsi que la période des oscillations propres T_0 ne dépendent que de la *structure* du système oscillant. L'amplitude q_0 et la phase initiale δ ne dépendent, elles, que des *conditions initiales*.

Dans le cas des oscillations électriques la fréquence propre est définie par la formule (122.7). Par conséquent

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{123.5}$$

C'est la *formule* dite de *William Thomson*.

Si on porte en abscisses le temps t et en ordonnées la grandeur qui oscille q, on obtient une *sinusoïde* (fig. 295). C'est une courbe périodique dont les ordonnées reprennent les mêmes valeurs au bout de la période T_0. L'amplitude q_0 est la valeur maximale de l'élongation de q par rapport à la valeur zéro.

Pour les oscillations électriques on trouve le courant par différentiation de l'équation (123.2):

$$\mathcal{J} = \dot{q} = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$$

ou

$$\mathcal{J} = \omega_0 q_0 \cos\left(\omega_0 t + \delta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Cette dernière équation montre que les oscillations de courant $\mathcal{J}$ sont en avance de phase de $\pi/2$ (quadrature avant) sur la charge q. Les énergies électrique et magnétique sont définies par les expressions

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t + \delta),$$

$$W_m = \frac{1}{2}L\mathcal{J}^2 = \frac{1}{2}L\omega_0^2 q_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta) = \frac{q_0^2}{2C}\sin^2(\omega_0 t + \delta).$$

Ecrivons ces expressions sous la forme

$$W_e = \frac{q_0^2}{4C} + \frac{q_0^2}{4C}\cos(2\omega_0 t + 2\delta),$$

$$W_m = \frac{q_0^2}{4C} - \frac{q_0^2}{4C}\cos(2\omega_0 t + 2\delta).$$

Leurs valeurs moyennes sont les mêmes et égales à

$$\overline{W}_e = \overline{W}_m = \frac{q_0^2}{4C} = \frac{1}{4}L\mathcal{J}_0^2.$$

C'est autour de ces valeurs moyennes que W_e et W_m effectuent des oscillations harmoniques avec une pulsation $2\omega_0$. Les transformations de l'énergie électrique en énergie magnétique et vice versa se produisent continuellement. Lorsque l'énergie électrique atteint sa valeur maximale, l'énergie magnétique est nulle et inversement lorsque cette dernière atteint sa plus grande valeur, l'énergie électrique est nulle. Mais l'énergie totale

$$W = W_e + W_m = \frac{q_0^2}{2C} \tag{123.6}$$

reste constante comme l'exige la loi de la conservation de l'énergie. Selon (123.6) l'énergie totale est proportionnelle au *carré de l'amplitude*. La même relation se retrouve dans le cas d'oscillations harmoniques des systèmes mécaniques.

3. Pour conclure il nous reste à définir ce que l'on entend par *condition de régime quasi stationnaire* que nous avons postulée dans l'étude du circuit oscillant. Le régime quasi stationnaire signifie que les valeurs instantanées du courant $\mathcal{J}$ sont pratiquement les mêmes en tous les points des fils de connexion des armatures du condensateur. Il faut pour cela que toutes les variations temporelles soient suffisamment lentes pour que la propagation des interactions électrodynamiques puisse être considérée comme *instantanée*. L'ordre de grandeur de la vitesse de propagation de ces interactions coïncide avec la vitesse de la lumière dans le vide c. En notant l la longueur du

fil reliant les armatures du condensateur (c'est pratiquement la longueur du fil utilisé pour fabriquer la bobine d'inductance), le temps que met la perturbation électromagnétique pour parcourir cette longueur est $\tau = l/c$. La condition de régime quasi stationnaire est vérifiée si $\tau \ll T_0$ ou

$$l \ll \lambda, \tag{123.7}$$

où λ est la longueur de l'onde électromagnétique dans le vide:

$$\lambda = cT_0. \tag{123.8}$$

PROBLÈME

Un plasma totalement ionisé composé d'électrons et d'ions positifs est délimité par deux plans parallèles (fig. 288). Si on déplaçait tous les électrons le long de l'axe X (qui est orthogonal aux plans) on ferait apparaître une force de rappel qui chercherait à les ramener dans leurs positions d'équilibre. Le plasma serait alors le siège d'*oscillations* dites *de plasma*. Déterminer la nature et la fréquence propre de ces oscillations en admettant que les ions « lourds » sont fixes.

Solution. En désignant par x le déplacement de l'électron par rapport à sa position d'équilibre, le champ électrique qui apparaît dans le plasma est $E = 4\pi nex$ et la force qui s'exerce sur l'électron déplacé est $F = -4\pi ne^2x$. Sous l'action de cette force les électrons exécuteront des oscillations harmoniques de fréquence circulaire

$$\omega_0 = \sqrt{4\pi \frac{ne^2}{m}} \tag{123.9}$$

dite *fréquence de plasma*.

§ 124. Oscillations amorties

Nous allons tenir compte maintenant des forces de résistance. En posant $X = 0$ dans l'équation (122.10) on obtient l'équation des oscillations libres

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{124.1}$$

Introduisons une nouvelle variable ξ en posant

$$q = \xi e^{-\gamma t}. \tag{124.2}$$

L'équation (124.1) s'écrit alors

$$\ddot{\xi} + (\omega_0^2 - \gamma^2)\,\xi = 0. \tag{124.3}$$

Formellement cette équation coïncide avec l'équation différentielle des oscillations libres non amorties (123.1), mais le coefficient $\omega_0^2 - \gamma^2$ peut être positif ou négatif. Trois cas sont à considérer.

Premier cas. $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$. Introduisons la notation

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2. \tag{124.4}$$

L'équation (124.3) s'écrit alors

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0.$$

Cela signifie que la quantité ξ doit exécuter des oscillations harmoniques non amorties de pulsation ω :

$$\xi = a \cos (\omega t + \delta).$$

Par conséquent

$$q = ae^{-\gamma t} \cos (\omega t + \delta). \tag{124.5}$$

La courbe $q = q(t)$ représentant cette équation *n'est pas périodique* (fig. 296), bien que la grandeur q s'annule périodiquement et passe par des maximums et des minimums un nombre infini de fois.

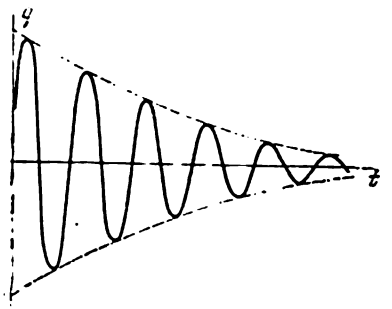


Fig. 296

C'est pour cela que les processus définis par (124.5) sont qualifiés d'oscillatoires et on les appelle *oscillations amorties*. L'intervalle de temps qui sépare deux instants consécutifs où q s'annule est égal à π/ω. L'intervalle de temps deux fois plus grand

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \\ = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}} \tag{124.6}$$

est appelé *période des oscillations*, quoique le terme « période » ne soit pas adéquat puisque le processus n'est pas périodique. Il s'ensuit de (124.6) que $T > T_0$, i.e. les forces de résistance diminuent la fréquence et augmentent la période des oscillations. En égalant à zéro la dérivée $\dot{q}$ on voit que la période T est le temps qui s'écoule entre les instants où la grandeur q passe par deux maximums ou minimums consécutifs. Le facteur

$$A = ae^{-\gamma t} \tag{124.7}$$

placé devant la fonction périodique $\cos (\omega t + \delta)$ dans l'expression (124.5) est l'*amplitude des oscillations amorties*. L'amplitude décroît suivant une loi exponentielle en fonction du temps. L'intervalle de temps

$$\tau = \frac{1}{\gamma}, \tag{124.8}$$

au bout duquel l'amplitude diminue de e fois est appelé *temps d'amortissement* ou *constante de temps* du système. Le nombre total d'oscillations contenues dans l'intervalle de temps τ est

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\gamma T}. \tag{124.9}$$

Le rapport des amplitudes aux maximums et minimums consécutifs est $A_1/A_2 = e^{\gamma T}$. Le logarithme de ce rapport

$$d = \ln \frac{A_1}{A_2} = \gamma T \tag{124.10}$$

est le *décrément logarithmique des oscillations.* Il est lié au nombre N par la relation

$$N = \frac{1}{d}. \tag{124.11}$$

La quantité

$$Q = \pi N = \frac{\pi}{d} \tag{124.12}$$

est le *facteur de qualité* (ou *facteur de surtension*) du circuit oscillant. Nous préciserons sa signification physique au § 127.

Les constantes d'intégration a et δ dépendent des conditions initiales. Supposons, par exemple, qu'à l'instant initial $q = 0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$, où $\dot{q}_0$ est une constante connue. En posant $t = 0$ dans (124.5) on trouve $\cos \delta = 0$ et par conséquent $\delta = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. $q = \pm a e^{-\gamma t} \sin \omega t$. Sans nuire à la généralité du raisonnement on peut omettre le signe $\pm$ et écrire

$$q = a e^{-\gamma t} \sin \omega t,$$

puisque la constante d'intégration peut s'écrire $-a$ ou $+a$. De là

$$\dot{q} = (\omega \cos \omega t - \gamma \sin \omega t)\, a e^{-\gamma t}.$$

En y posant $t = 0$ on trouve $\dot{q}_0 = \omega a$,

$$q = \frac{\dot{q}_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t. \tag{124.13}$$

D e u x i è m e c a s. $\omega_0^2 - \gamma^2 = 0$. C'est la limite du cas précédent où la période T devient infinie. L'équation (124.3) se réduit à $\ddot{\xi} = 0$ et par suite

$$q = (a + bt)\, e^{-\gamma t}. \tag{124.14}$$

Suivant les valeurs des constantes d'intégration a et b la grandeur q présentera ou ne présentera pas un maximum (un seul). La figure 297 illustre deux cas: 1) $a \neq 0$, $b = 0$ et 2) $a = 0$, $b \neq 0$. Quelles que soient les valeurs de a et de b, q tend asymptotiquement vers zéro lorsque $t \to \infty$. Ce n'est pas un processus oscillatoire et on l'appelle *processus apériodique.*

Si à l'instant initial $q_0 = 0$, on a $a = 0$,

$$q = bte^{-\gamma t}, \quad \dot{q} = (1 - \gamma t)\, be^{-\gamma t}.$$

En posant $t = 0$ on trouve $b = \dot{q}_0$ et par conséquent

$$q = \dot{q}_0 t e^{-\gamma t}. \tag{124.15}$$

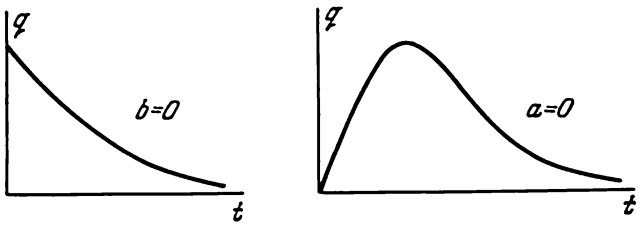


Fig. 297

Troisième cas. $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$. La solution générale de l'équation (124.3) est alors

$$\xi = C_1 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t},$$

la solution de l'équation (124.1) est

$$q = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}, \tag{124.16}$$

où α_1 et α_2 désignent des constantes positives:

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{124.17}$$

Si à l'instant initial $q_0 = 0$, $\dot{q} = \dot{q}_0$, on aura

$$q = \frac{\dot{q}_0}{\alpha_1 - \alpha_2}(e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}) = \frac{\dot{q}_0}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}(e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}). \tag{124.18}$$

§ 125. Le galvanomètre balistique

Le *galvanomètre balistique* est un appareil servant à mesurer la quantité d'électricité passant à travers un circuit électrique sous forme d'impulsions de courant. L'équipage mobile est un cadre rectangulaire avec un enroulement de fil fin isolé. Cet équipage est suspendu à un fil entre les pôles d'un aimant et peut exécuter des oscillations de torsion autour d'un axe vertical. Le couple de rappel qui cherche à ramener le cadre dans sa position d'équilibre résulte de la torsion du fil de suspension et est proportionnel à l'angle de déviation φ. Le cadre doit avoir un grand moment d'inertie Θ afin que la période de ses oscillations propres soit supérieure ou égale à 10 secondes. Lorsque le cadre oscille un courant est induit dans son enroulement et ce courant freine le mouvement du cadre. Pour que le couple de freinage soit proportionnel à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ on utilise des pièces

polaires à surfaces cylindriques et on dispose entre celles-ci un cylindre de fer doux (fig. 298, vue de dessus). Dans l'entrefer défini par les pièces polaires et le cylindre de fer doux les lignes de force magnétiques sont pratiquement radiales. C'est donc dans cet entrefer que le cadre oscille ; ses côtés verticaux interceptent les lignes de force magnétiques toujours normalement. De ce fait la force électromotrice et le moment de freinage résultant sont proportionnels à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$. Le moment de freinage résultant de la résistance de l'air est lui aussi proportionnel à $\dot{\varphi}$. Les oscillations de torsion du cadre du galvanomètre sont décrites par une équation différentielle de même type que celle qui caractérise les oscillations amorties considérées au paragraphe précédent.

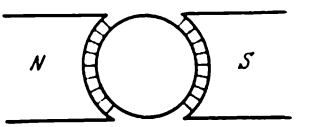


Fig. 298

Faisons passer à travers le galvanomètre une brève impulsion de courant $\mathcal{J}$ dont la durée τ est beaucoup plus petite que la période T des oscillations propres du cadre mobile. Pendant le passage de cette impulsion de courant on peut négliger toutes les forces, à l'exception des forces d'Ampère que le champ magnétique extérieur exerce sur le cadre mobile. Ces forces produisent un couple proportionnel à l'intensité $\mathcal{J}$ du courant ; par suite l'équation de mouvement du cadre mobile s'écrit $\Theta\ddot{\varphi} = k\mathcal{J}$, où k est une constante. En intégrant sur le temps de passage de l'impulsion on trouve la vitesse angulaire que le cadre acquiert pendant cet intervalle de temps :

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{k}{\Theta}\int \mathcal{J}\,dt = \frac{k}{\Theta}\,q,$$

où q est la quantité d'électricité transportée. Au cours de cet intervalle de temps le cadre massif n'aura pas eu le temps de se déplacer de façon notable. L'impulsion de courant agit sur le cadre mobile à la manière d'un coup de marteau donné à une boule massive. En négligeant le temps τ on peut assimiler le mouvement du cadre mobile du galvanomètre à une oscillation libre amortie avec les conditions initiales $\varphi_0 = 0$ et $\dot{\varphi}_0 = kq/\Theta$. Nous avons résolu ce problème au paragraphe précédent et nous y avons montré que l'amplitude et donc la déviation maximale φ_{max} du galvanomètre étaient proportionnelles à $\dot{\varphi}_0$, que le régime soit oscillatoire ou apériodique. Ainsi la déviation du galvanomètre est liée à la quantité d'électricité par la relation

$$q = B\varphi_{max}, \tag{125.1}$$

où B est la *constante balistique du galvanomètre*. On détermine la valeur de cette constante expérimentalement en déchargeant dans le

galvanomètre un condensateur de capacité connue porté à un potentiel donné ; il suffit alors de noter la déviation du spot du galvanomètre. Après cet étalonnage on peut effectuer des mesures quantitatives en utilisant la formule (125.1).

§ 126. Diagrammes vectoriels et notations complexes

1. Dans le premier tome il a été déjà question d'un procédé de représentation géométrique des oscillations harmoniques, aussi commode que suggestif. Soit un point géométrique M tournant d'un mouvement uniforme sur un cercle de rayon r avec une vitesse angulaire ω_0 (fig. 299). La position du point M sur le cercle peut être repérée par l'angle φ que fait le rayon OM avec le sens positif de l'axe X.

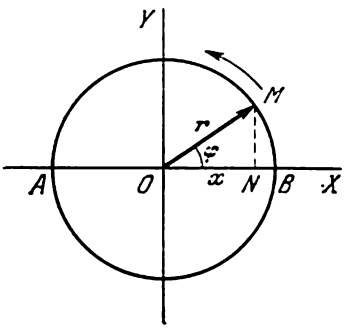


Fig. 299

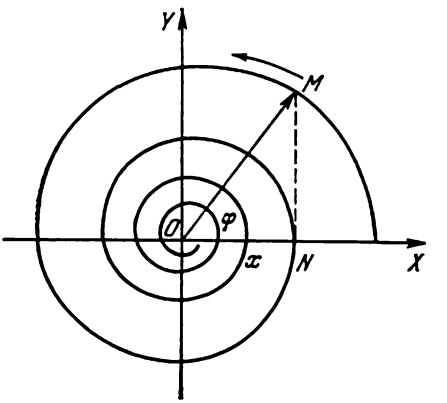


Fig. 300

Cet angle est égal à $\varphi = \omega_0 t + \delta$, où δ est la valeur de l'angle φ à l'instant initial $t = 0$. Lorsque le point M parcourt une trajectoire circulaire sa projection N sur l'axe X se déplace sur le diamètre AB en oscillant entre les points A et B avec la période $T_0 = 2\pi/\omega_0$. L'abscisse du point N

$$x = a \cos \varphi = a \cos (\omega_0 t + \delta) \qquad (126.1)$$

et le point N lui-même exécutent des oscillations harmoniques non amorties. Ce précédé permet de décrire les oscillations harmoniques de n'importe quelle grandeur à condition de représenter cette grandeur par l'abscisse d'un point M animé d'un mouvement circulaire uniforme. On peut naturellement remplacer l'abscisse par l'ordonnée $y = a \sin (\omega_0 t + \delta) = a \cos \left[\omega_0 t + \left(\delta - \frac{\pi}{2}\right) \right]$ mais pour éviter toute confusion nous considérerons dans ce qui suit les projections sur l'abscisse seulement.

Pour représenter les oscillations amorties on remplacera la trajectoire circulaire par une spirale logarithmique tendant asymptotiquement vers le pôle O (fig. 300). Si le point M parcourt la spirale avec une vitesse angulaire ω_0 constante en se déplaçant vers le pôle, sa projection N sur l'axe X effectuera des oscillations harmoniques amorties.

2. On peut remplacer le point M par le rayon vecteur $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$ tournant autour de l'origine des coordonnées O avec une vitesse angulaire constante. La grandeur sinusoïdale étudiée sera représentée par la projection x du rayon vecteur sur l'axe X. Il est souvent commode de rapporter les calculs mathématiques relatifs aux grandeurs sinusoïdales au rayon vecteur $\boldsymbol{r}$. Soit à calculer, par exemple, la somme des expressions

$$x_1 = a_1 e^{-\gamma_1 t} \cos(\omega_1 t + \delta_1)$$

et

$$x_2 = a_2 e^{-\gamma_2 t} \cos(\omega_2 t + \delta_2).$$

On additionne par la règle du parallélogramme les vecteurs $\boldsymbol{r}_1$ et $\boldsymbol{r}_2$ dont x_1 et x_2 sont les projections, puis on projette le vecteur $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$ sur l'axe des abscisses. On obtient ainsi $x = x_1 + x_2$. On n'effectue la projection qu'à la fin des calculs et on peut même se passer de cette opération en représentant la grandeur sinusoïdale par le vecteur $\boldsymbol{r}$ tournant autour de l'origine O avec une vitesse constante. La projection du vecteur $\boldsymbol{r}$ est alors *sous-entendue sans qu'il soit nécessaire de l'exécuter*. C'est la *méthode* dite *des diagrammes vectoriels* (représentation dite de Fresnel). La figure 299 pourrait être appelée *diagramme vectoriel d'une oscillation harmonique non amortie* et la figure 300 *diagramme vectoriel d'une oscillation harmonique amortie*. Ces diagrammes sont constamment utilisés en électrotechnique pour l'étude des courants alternatifs.

3. En physique on utilise de préférence la méthode des notations complexes qui ne se distingue de la méthode des diagrammes vectoriels que par la forme. La grandeur sinusoïdale est représentée alors par un *nombre complexe*. La position du point sur le plan (fig. 299) est univoquement définie par le nombre complexe $z = x + iy$. Si le point M tourne avec une vitesse constante autour de l'origine

$$x = a \cos(\omega_0 t + \delta), \qquad y = a \sin(\omega_0 t + \delta).$$

En utilisant la formule d'Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi,$$

on peut représenter la grandeur z sous la forme

$$z = a e^{i(\omega_0 t + \delta)}.$$

La partie réelle de cette expression

$$\mathrm{Re}\,(z) = a\cos(\omega_0 t + \delta) = x$$

représente les oscillations harmoniques de la grandeur x. Nous omettrons le symbole Re et nous écrirons

$$x = ae^{i(\omega_0 t+\delta)}. \tag{126.2}$$

On ne doit pas prendre à la lettre cette égalité symbolique puisque la grandeur physique x est égale à la *partie réelle* de la quantité complexe figurant dans le second membre de cette égalité. Le module a de cette expression complexe représente l'amplitude des oscillations et son argument $\omega_0 t + \delta$ représente sa phase. On peut simplifier l'écriture de (126.2) en introduisant la quantité complexe $A = ae^{i\delta}$ que l'on appelle *amplitude complexe des oscillations*. On a alors

$$x = Ae^{i\omega_0 t}. \tag{126.3}$$

Le caractère complexe de l'amplitude A signifie donc que la *phase initiale* des oscillations est différente de zéro.

On peut utiliser tout formellement d'ailleurs les expressions de la forme (126.3) dans le cas où la grandeur ω_0 serait complexe. La signification physique de ces expressions apparaît en posant $\omega_0 = \omega_1 + i\omega_2$. On a alors

$$x = Ae^{i(\omega_1+i\omega_2)t} = ae^{-\omega_2 t}e^{i(\omega_1 t+\delta)} = ae^{-\omega_2 t}\cos(\omega_1 t + \delta).$$

Lorsque $\omega_2 > 0$ cette expression représente des *oscillations harmoniques amorties* de pulsation ω_1 et de décrément ω_2. Le cas où $\omega_2 < 0$ correspond à des *oscillations dont l'amplitude croît indéfiniment.* Ainsi dans le cas d'une fréquence complexe l'amplitude des oscillations *croît ou décroît exponentiellement en fonction du temps.*

Il est nécessaire de s'habituer à saisir la signification physique des équations écrites sous forme complexe sans avoir à les transcrire sous forme réelle. La forme complexe permet souvent d'éviter des formules compliquées et confère à celles-ci plus de généralité. Dans l'étude de la propagation des ondes on utilise très largement les nombres complexes.

4. On peut soumettre les quantités complexes à de nombreuses opérations mathématiques en procédant comme si c'étaient des quantités réelles. Mais on ne peut le faire que si les opérations sont *réelles* et *linéaires*, i.e. addition, soustraction, multiplication et division par un nombre réel, différentiation et intégration par rapport à une variable réelle, etc. D'une façon générale on dit qu'une opération L est *linéaire* si en l'appliquant à la quantité $\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2$ on obtient pour résultat une expression de la forme

$$L(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 L(z_1) + \alpha_2 L(z_2), \tag{126.4}$$

où z_1 et z_2 sont des quantités quelconques (généralement des quantités complexes) et α_1 et α_2 sont des constantes. En physique seules les *opérations réelles* présentent de l'intérêt, i.e. des opérations qui, appliquées à des *grandeurs réelles*, fournissent des résultats *réels*.

Les expressions complexes ne correspondent elles-mêmes à aucune grandeur physique puisque celles-ci sont toujours réelles et pour raison de commodité seulement sont parfois représentées par les parties réelles des quantités complexes. En physique les opérations mathématiques doivent être définies comme des opérations portant sur des grandeurs physiques réelles. Supposons cependant qu'on doive soumettre une grandeur physique réelle x à une opération linéaire réelle L. Le résultat en sera $L(x)$. On peut aboutir au même résultat en procédant de la manière suivante. Prenons la quantité complexe $x + iy$ et soumettons-la à l'opération L. On obtient ainsi

$$L(x + iy) = L(x) + iL(y).$$

En rejetant la partie imaginaire $i(y)$ on retrouve $L(x)$. Si le calcul par ce deuxième procédé s'avère plus facile, on lui donnera la préférence.

Par exemple, au lieu de différentier la fonction $x = a\cos(\omega_0 t + \delta)$ par rapport à t on peut différentier par rapport à t l'expression complexe (126.2) et (126.3) et ne retenir que la partie réelle du résultat obtenu. Dans les deux cas on aura le même résultat.

Mais on commettrait une erreur grossière en appliquant ce procédé de calcul à des *opérations non linéaires*. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'élever au carré la grandeur réelle x. Le résultat correct est évidemment x^2. Mais si nous appliquons le procédé du calcul complexe on doit remplacer x par $x + iy$; en élevant au carré on obtient $(x^2 - y^2) + i2xy$. La partie réelle est $x^2 - y^2$. Sa valeur dépend non seulement de la partie réelle de l'expression $x + iy$, mais aussi de sa partie imaginaire. Ce résultat est erroné parce que l'élévation au carré est une opération non linéaire.

§ 127. Oscillations forcées d'un oscillateur amorti soumis à l'action d'une force sinusoïdale

1. Les oscillations forcées d'un oscillateur amorti ont pour équation

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X(t), \tag{127.1}$$

où $X(t)$ est la force extérieure, plus précisément le quotient de la force électromotrice par l'inductance de la bobine ou (dans le cas de systèmes mécaniques) le quotient de la force par la masse du corps oscillant. L'équation (127.1) est *linéaire*, i.e. de premier degré par rapport à la variable q et à ses dérivées par rapport au temps. Cette

équation *n'est pas homogène* puisqu'elle comporte $X(t)$ dans le second membre. Les équations linéaires homogènes (i.e. des équations sans second membre) satisfont au *principe de superposition* selon lequel la somme de deux solutions quelconques d'une équation est également une solution de cette équation. Ce principe ne s'applique pas aux équations linéaires non homogènes, quoique la superposition des solutions existe mais *dans un sens différent*. Si le second membre de l'équation (127.1) se présente sous forme d'une somme $X = \sum X_i(t)$ et si $q_i(t)$ est solution de l'équation (127.1) où le second membre a été remplacé par $X_i(t)$, la somme $q = \sum q_i(t)$ sera solution de (127.1) dont le second membre est $X = \sum X_i(t)$. Cette propriété des équations linéaires présente une grande importance en théorie des oscillations, car elle permet de ramener le problème général des oscillations forcées excitées par une *force arbitrairement variable* au problème particulier où les oscillations sont excitées par une *force sinusoïdale*. En effet selon le *théorème de Fourier* toute fonction $X(t)$ de forme suffisamment générale peut être représentée sous forme d'une superposition linéaire de fonctions sinusoïdales (cf. § 128) ou de l'intégrale de ces fonctions par rapport à la fréquence.

Examinons la relation qui existe entre les solutions d'une équation non homogène et de l'équation homogène correspondante. Soit $\bar{q}(t)$ une solution particulière quelconque de l'équation non homogène (127.1). On aura alors $\ddot{\bar{q}} + 2\gamma\dot{\bar{q}} + \omega_0^2\bar{q} = X(t)$. En soustrayant cette expression de (127.1) et en introduisant la notation $Q = q - \bar{q}$ on obtient $\ddot{Q} + 2\gamma\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$. Ce résultat montre que Q est solution de l'équation homogène. Il s'ensuit que $q = \bar{q} + Q$, i.e. *la solution générale de l'équation non homogène* (127.1) *peut être présentée sous forme de la somme d'une solution particulière de la même équation et de la solution générale de l'équation homogène correspondante.*

2. Après ces quelques considérations préliminaires analysons le problème relatif aux oscillations amorties d'un oscillateur soumis à l'action d'une force extérieure. Considérons d'abord le cas particulier où la force d'excitation X est sinusoïdale, i.e. est donnée par l'expression

$$X = X_0 \cos \omega t, \tag{127.2}$$

où X_0 et ω sont des constantes. Le problème consiste à résoudre l'équation

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X_0 \cos \omega t. \tag{127.3}$$

Parmi les différentes solutions particulières de cette équation il en existe une qui varie en fonction du temps *suivant une loi sinusoïdale à la fréquence de la force d'excitation extérieure* ω. Cherchons cette

solution sous forme complexe puisque toutes les opérations mathématiques que nous aurons à utiliser sont linéaires et réelles. Remplaçons le second membre de (127.3) par la quantité complexe $X_0 e^{i\omega t}$, i.e. écrivons

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = X \equiv X_0 e^{i\omega t}. \tag{127.4}$$

Cherchons une solution particulière de la forme $q = q_0 e^{i\omega t}$ d'où $\dot{q} = i\omega q$ et $\ddot{q} = -\omega^2 q$. En portant ces expressions dans (127.4) on trouve

$$q = \frac{X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} e^{i\omega t}. \tag{127.5}$$

Cette solution particulière décrit les *oscillations forcées d'un oscillateur* dont la fréquence est égale à la fréquence ω de l'excitateur. En ajoutant à cette solution particulière (127.5) la solution générale de l'équation homogène correspondante on trouve

$$q = \frac{X_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} e^{i\omega t} + e^{-\gamma t}(C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t). \tag{127.6}$$

Le terme additionnel représente les *oscillations libres* de l'oscillateur. Par un choix convenable des valeurs des constantes C_1 et C_2 on peut satisfaire à n'importe quelles conditions initiales; mais quelles que soient les conditions initiales les oscillations libres *s'atténuent* toujours *suivant une loi exponentielle*, l'amplitude décroissant de e fois au bout du temps $\tau = 1/\gamma$. Le processus d'amortissement des oscillations libres correspond au *régime d'établissement ou régime transitoire* de l'oscillateur, le temps τ étant le *temps d'amortissement* ou le *temps d'établissement*. Si $t \gg \tau$ les oscillations libres s'effacent et ne subsistent que les oscillations forcées *qui ne dépendent absolument pas des conditions initiales*. C'est l'étude des oscillations forcées qui retiendra notre attention.

3. La solution (127.5) qui se présente sous une forme complexe ne décrit les oscillations forcées que de façon symbolique et on ne doit en retenir que la *partie réelle*. Introduisons pour cela la notation

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma = \rho e^{i\delta}, \tag{127.7}$$

où ρ et δ sont des quantités réelles. On a alors $q = \frac{X_0}{\rho} e^{i(\omega t - \delta)}$ et sous forme réelle

$$q = a \cos(\omega t - \delta). \tag{127.8}$$

Pour trouver ρ et δ identifions les parties réelles et imaginaires de (127.7):

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \rho \cos \delta, \quad 2\omega\gamma = \rho \sin \delta,$$

d'où

$$a = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}}, \tag{127.9}$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{127.10}$$

Ces résultats montrent que *les oscillations forcées sont des oscillations harmoniques dont l'amplitude et la phase sont données par* (127.9) et (127.10).

On peut tout aussi bien établir les formules (127.9) et (127.10) à l'aide d'un diagramme vectoriel ; c'est ce que l'on fera au § 129 en prenant pour exemple les courants alternatifs qui sont régis par des relations semblables à celles que nous venons d'étudier.

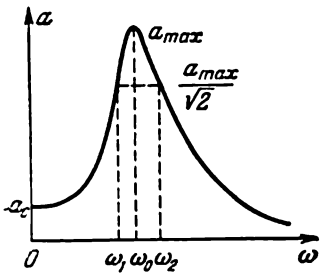


Fig. 301

4. Discutons d'abord la dépendance de l'*amplitude* des oscillations forcées avec la fréquence ω. Nous considérerons ensemble les oscillations électriques et mécaniques en convenant d'attribuer à la grandeur q soit la signification de la *charge d'un condensateur* soit le *déplacement d'un corps oscillant par rapport à sa position d'équilibre*. Maintenons constante l'amplitude X_0 de la force d'excitation et faisons varier sa fréquence ω. Pour $\omega = 0$ nous obtenons le *déplacement statique* du mobile résultant de l'application d'une force constante X_0: $a_0 = X_0/\omega_0$. Lorsqu'on augmente la fréquence ω l'amplitude a du déplacement augmente d'abord, passe par un maximum puis tend asymptotiquement vers zéro (fig. 301). En égalant à zéro la dérivée $da/d\omega$ on constate que l'amplitude a du déplacement (de la charge) atteint sa valeur maximale à la fréquence $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$. Les maximums de l'amplitude de la vitesse (du courant) ωa et de l'amplitude de l'accélération (de la tension $L\ddot{q}$) $\omega^2 a$ correspondent aux fréquences $\omega = \omega_0$ et $\omega = \omega_0^2/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Cherchons encore la fréquence pour laquelle la puissance moyenne fournie par la force X est maximale. La puissance s'exprime par le produit de la force X par la vitesse $\dot{q}$, i.e. $P = X\dot{q}$. Comme la multiplication de deux grandeurs sinusoïdales X et $\dot{q}$ est une opération non linéaire, on doit utiliser une forme réelle de représentation des oscillations, i.e. les formules (127.2) et (127.8). On en déduit

$$P = -\omega a X_0 \cos \omega t \sin(\omega t - \delta) = \frac{\omega a X_0}{2} [\sin \delta - \sin(2\omega t - \delta)].$$

L'expression entre crochets varie en fonction du temps suivant une loi sinusoïdale avec la fréquence 2ω. Sa valeur moyenne dans le temps est égale à zéro, mais cela n'exerce aucune influence sur la valeur de la puissance moyenne qui n'est définie que par le premier terme et est égale à $^1/_2 X_0 \omega a \sin \delta$. Le maximum de la puissance moyenne s'observe à la fréquence à laquelle l'amplitude de la vitesse ωa est maximale, i.e. $\omega = \omega_0$.

Dans le cas particulièrement important où *l'affaiblissement est petit*, les positions des différents maximums sont presque confondues. On peut donc poser que le maximum de l'amplitude de déplacement correspond à la fréquence $\omega = \omega_0$, i.e.

$$a_{\max} = \frac{X_0}{2\omega_0\gamma} = \frac{\omega_0}{2\gamma} a_0. \tag{127.11}$$

Le rapport du maximum d'amplitude $a_{\max}$ à l'élongation statique a_0 est appelé *facteur de mérite de l'oscillateur* ou *du circuit oscillant*. En dénotant le facteur de mérite par Q on a

$$\frac{a_{\max}}{a_0} \equiv Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{d}, \tag{127.12}$$

où d est le décrément logarithmique.

La courbe qui représente la variation de l'amplitude a des oscillations en fonction de la fréquence ω de la force excitatrice extérieure est appelée *courbe de résonance* (cf. fig. 301). Une des principales caractéristiques de la courbe de résonance est la valeur de l'amplitude maximum $a_{\max}$. Une autre caractéristique importante est la *largeur de la courbe de résonance*. Soient ω_1 et ω_2 les valeurs de la fréquence ω pour lesquelles l'énergie des oscillations est deux fois plus petite qu'au maximum de la courbe de résonance. On a alors

$$(\omega_1^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_1^2\gamma^2, \quad (\omega_2^2 - \omega_0^2)^2 = 4\omega_2^2\gamma^2.$$

Si $|\omega_1 - \omega_0| \ll \omega_0$, $|\omega_2 - \omega_0| \ll \omega_0$, on obtient approximativement

$$\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1 = 2\gamma = \omega_0/Q. \tag{127.13}$$

C'est la quantité $\Delta\omega$ qui caractérise la *largeur* (ou *demi-largeur*) de la courbe de résonance. Plus le facteur de mérite de l'oscillateur est grand, plus la courbe de résonance est étroite. On déduit des formules (127.11) et (127.13) le résultat suivant:

$$\Delta\omega \cdot a_{\max} = \omega_0 a_0. \tag{127.14}$$

Plus le maximum de la courbe de résonance est élevé, plus il est aigu et plus la courbe est étroite.

5. Nous voyons ainsi que les oscillations les plus fortes s'observent à la fréquence $\omega = \omega_0$. On appelle phénomène de *résonance* l'excitation de grandes oscillations par une force excitatrice extérieure dont la fréquence est égale ou proche de la fréquence propre

du système oscillant. La nature physique de ce phénomène est extrêmement simple. Pour le montrer nous considérerons au lieu d'une force d'excitation sinusoïdale une succession de *poussées* de courte durée se succédant à intervalles réguliers. Entre deux poussées le système se déplace *librement*. A chaque poussée la vitesse $\dot{q}$ s'accroît par saut de $\Delta\dot{q}$. Si la cadence à laquelle se succèdent les poussées est égale à la période des oscillations propres du système, chaque nouvelle poussée donne lieu à un accroissement de vitesse *de même signe et de même module* que celui produit par la poussée précédente: *chaque nouvelle poussée renforce l'effet des poussées précédentes.* L'énergie apportée au système par l'excitation est alors *maximale.* Les amplitudes des oscillations s'accroîtront jusqu'à ce que les forces de frottement qui augmentent elles aussi ne compensent en moyenne l'action de chaque nouvelle poussée au cours de chaque période. A partir de ce moment le système est le siège des plus grandes oscillations, présentant *la plus grande amplitude de la vitesse* et *la plus grande énergie.* C'est la *résonance.* Une force d'excitation sinusoïdale peut être également considérée comme une suite de poussées identiques. Ces poussées *ne sont plus instantanées* mais ont des *durées* telles que les poussées successives se rejoignent. Cette particularité des forces sinusoïdales ne modifie pas le principe de l'explication que nous avons donnée de la résonance. Lorsque les poussées sont de durée finie, la forme de la courbe de résonance doit dépendre de la *forme de la poussée.* Les poussées sinusoïdales sont caractérisées par le fait que la courbe de résonance qu'elles produisent ne présente qu'un *seul maximum* pour $\omega = \omega_0$. Pour des forces d'excitation non sinusoïdales la situation est différente. Dans l'exemple ci-dessus, où les poussées étaient instantanées, on voyait apparaître des maximums d'amplitude non seulement à la fréquence fondamentale $\omega = \omega_0$, mais aussi à des fréquences plus basses $\omega_0/2$, $\omega_0/3$, . . . A ces fréquences les poussées se suivent à une cadence plus petite, mais chaque nouvelle poussée continue à renforcer l'effet de la précédente. Or c'est la condition essentielle de la résonance. La courbe de résonance correspondante présente plusieurs maximums qui sont cependant moins marqués que le maximum à la fréquence fondamentale.

6. Dans les expériences de démonstration on utilise avantageusement des diapasons dont les facteurs de qualité sont importants. Disposons deux diapasons de mêmes fréquences propres sur des boîtes de résonance (fig. 302) et excitons l'un d'eux. Les ondes sonores que le diapason excité émet agissent périodiquement sur le deuxième diapason et comme sa fréquence propre est la même, il commence à vibrer et à émettre un son. Pour s'en rendre compte il suffit de bloquer avec la main le premier diapason. On entendra alors nettement le son produit par le deuxième. Si la démonstration a lieu dans un grand auditoire on disposera près de l'une des branches du deuxième dia-

pason une petite bille suspendue à un fil. On verra cette bille rebondir sous l'action des vibrations du diapason. Si nous fixons maintenant à l'une des branches d'un diapason un petit poids, les deux diapasons ne seront plus « accordés », i.e. leurs fréquences propres ne coïncideront plus. Si on recommence l'expérience précédente, le deuxième diapason ne répondra plus aux vibrations du premier. Cette

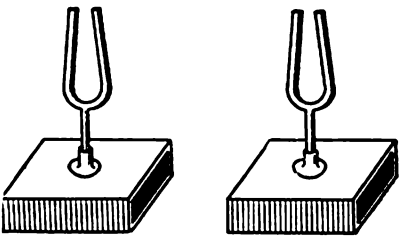


Fig. 302

dernière expérience montre qu'un désaccord minime suffit à détruire la condition de résonance et permet d'autre part de porter un jugement sur le facteur de qualité du système oscillant.

7. On peut réaliser l'analogie électrique de cette expérience à l'aide de circuits oscillants à haute fréquence. On utilise un générateur d'oscillations d'une fréquence de plusieurs mégahertz. La capacité du circuit oscillant du générateur est constituée par un condensateur de capacité variable. On dispose à côté du générateur un deuxième circuit oscillant identique au premier mais incluant une petite lampe électrique. Le rôle des boîtes de résonance est assumé ici par des tiges métalliques fixées aux armatures des condensateurs et disposées parallèlement l'une à l'autre. Ces tiges assurent l'établissement d'une liaison capacitive entre les circuits oscillants : les charges électriques accumulées sur l'une des tiges induisent par influence des charges sur l'autre tige. Lorsque le générateur fonctionne le circuit oscillant est parcouru par des courants de haute fréquence qui excitent des courants dans le deuxième circuit oscillant qui comporte une lampe à incandescence. Si les fréquences propres des deux circuits sont très différentes la lampe ne s'allume pas, même si en augmentant le chauffage de la cathode du tube du générateur on fait croître l'amplitude des oscillations générées. Mais si on fait varier progressivement la capacité du condensateur dans un des circuits oscillants, il arrive un instant où la lampe s'allume. Cela se produit à la résonance, lorsque les fréquences propres des deux circuits deviennent égales ou presque égales.

Cet exemple montre tout l'intérêt du phénomène de résonance. Pour qu'un récepteur radio puisse capter un certain poste d'émission

il faut l'accorder, i.e. faire coïncider la fréquence propre du circuit oscillant du récepteur avec la fréquence des ondes électromagnétiques émises par le poste émetteur. La formule (127.12) montre que *la sensibilité du récepteur est d'autant plus grande que le facteur de qualité de son circuit oscillant est grand. La sensibilité du récepteur est inversement proportionnelle à la bande des fréquences qu'il peut capter; ces deux caractéristiques sont liées par la relation* (127.14). *Un récepteur de haute sensibilité ne peut capter qu'une bande de fréquences très étroite. Plus la sensibilité est grande, moins se feront sentir les signaux émis par des émetteurs travaillant à des fréquences voisines.* Un récepteur de sensibilité infiniment grande ne pourrait recevoir que des signaux d'une fréquence déterminée, celle à laquelle il aura été accordé. Ces différentes corrélations concernent aussi bien les récepteurs radio que tous les autres oscillateurs quelle que soit la nature physique des oscillations dont ils sont le siège.

8. Le phénomène de résonance peut présenter aussi des inconvénients et des dangers et on doit alors chercher à les éliminer. Une grande marge de sécurité (égale à 5-10) prévue dans les calculs statiques des systèmes mécaniques peut être insuffisante si les systèmes sont soumis à l'action de forces périodiques même relativement faibles. Ainsi dans toutes les armées du monde il est interdit aux troupes de traverser les ponts au pas cadencé car dans ce cas le pont est soumis à des chocs périodiques dont la période peut coïncider avec les oscillations propres du pont. Dans ce dernier cas on arrive à la résonance et l'amplitude des vibrations du pont peut augmenter jusqu'à provoquer la rupture du pont. Ces cas étaient assez fréquents au XIXe siècle et c'est pourquoi on interdisait la marche au pas cadencé sur les ponts. Il est évident que la coïncidence des fréquences ne peut suffire à provoquer la rupture d'un pont. Ainsi un garçon qui bombarderait un pont au lance-pierre n'arriverait pas à le faire effondrer aussi précise que soit la cadence du tir. Il existe en effet des forces de frottement et d'autres forces de freinage qui *limitent l'accroissement de l'amplitude des oscillations.* Pour qu'un système mécanique se rompe il faut en plus de la coïncidence des fréquences que chaque poussée soit *assez forte.* Dans le cas des systèmes électriques *on ne peut se contenter de tenir compte des seuls champs statiques* dans les calculs des tensions maximales admissibles. Si le système comporte des capacités et des inductances, on doit envisager l'éventualité de la résonance pour éviter la rupture électrique du système.

9. La courbe de résonance représentée sur la figure 301 et traduisant la formule (127.9) appartient à la famille des *courbes amplitude-fréquence.* Examinons maintenant les *courbes de la famille phase-fréquence* (127.10). Ces courbes caractérisent les variations du déphasage en arrière δ du déplacement q (de la charge) par rapport à la force extérieure X, en fonction de la fréquence ω (fig. 303). Lorsque $\omega \to 0$, $\delta \to 0$; aux basses fréquences q et X oscillent *en phase.*

Lorsque $\omega \to \infty$ le déphasage δ tend vers π ; on dit que les grandeurs concernées oscillent *en opposition de phase*. A la résonance $\operatorname{tg} \delta = \infty$ et $\delta = \pi/2$. Si $\gamma \to 0$ la courbe de résonance phase-fréquence présente une discontinuité pour $\omega = \omega_0$ et se présente sous forme d'une ligne brisée $OABC$: pour $\omega < \omega_0$ q et X oscillent en phase et pour $\omega > \omega_0$ ces grandeurs oscillent en opposition de phase. La ligne brisée $OABC$ représente la *limite* vers laquelle tendent les courbes de résonance lorsque $\gamma \to 0$.

Pour mieux faire comprendre les relations de phase dans le cas d'oscillations forcées nous utiliserons l'exemple du système méca-

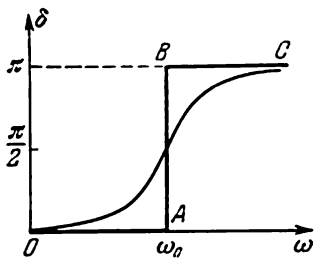


Fig. 303

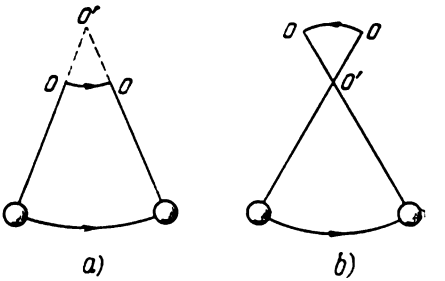


Fig. 304

nique suivant. Soit un pendule pesant simple. Prenons dans la main son fil de suspension au point O et imprimons à ce point de fixation un lent mouvement de va-et-vient (fig. 304, *a*). On produira ainsi des oscillations forcées ; le pendule se comporte comme si sa longueur était devenue plus grande avec un point fixe en O'. Les oscillations de la main (force extérieure) ont une fréquence inférieure à la fréquence propre ω_0 du pendule. Les sens de déplacement de la main et de la bille du pendule coïncident constamment et leurs oscillations ont même phase. Mais si le point O oscille à une fréquence supérieure à ω_0, le pendule se comportera comme si son point de suspension était fixe mais déplacé au-dessous du point O : le point O et la bille se meuvent alors en opposition de phase (fig. 304, *b*).

§ 128. Oscillations forcées excitées par une force non sinusoïdale. Théorème de Fourier

1. Le *théorème de Fourier* (1768-1830) permet de faire l'étude mathématique des oscillations forcées produites et entretenues par une force non sinusoïdale. Selon ce théorème toute fonction périodique de forme assez générale peut être développée en une *série de Fourier*, i.e. être présentée sous forme d'une somme d'un nombre fini ou infini de *fonctions sinusoïdales*. Nous nous contenterons de donner ici l'ex-

pression des *coefficients* de la série de Fourier sans démontrer le théorème.

On appelle *fonction périodique* $f(t)$ toute fonction qui vérifie pour toute valeur de t la condition $f(t) = f(t + T)$, où T est une constante positive différente de zéro que l'on appelle *période de la fonction* f. Si T est la période de la fonction, les multiples entiers $2T$, $3T$, ... le seront aussi puisque $f(t + 2T) = f(t + T + T) = f(t + T) = f(t)$. Parmi toutes ces périodes *la plus petite* est appelée *période fondamentale*; la fréquence correspondante $\Omega = 2\pi/T$ est la *fréquence fondamentale*. Dans ce qui suit nous désignerons par T et Ω la période et la fréquence fondamentales. Le théorème de Fourier affirme que toute fonction périodique de période fondamentale T se laisse représenter par une superposition de sinusoïdes de périodes T, $T/2$, $T/3$, ... ou ce qui revient au même de fréquences $\omega_k = k\Omega$, où $k = 0, 1, 2, \ldots$ Ecrivons cette série de Fourier sous forme complexe :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}, \tag{128.1}$$

la fonction $f(t)$ étant toujours égale à la *partie réelle* de la série figurant dans le second membre. Pour pouvoir calculer les coefficients c_k multiplions les deux membres de (128.1) par $e^{-i\omega_m t}$ et intégrons le résultat entre 0 et T. On trouve

$$\int_0^T f(t)\, e^{-i\omega_m t}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^T e^{i(\omega_k - \omega_m)t}\, dt.$$

En vertu de la périodicité de la fonction exponentielle

$$e^{i(\omega_k - \omega_m)T} = e^{i(k-m)T\Omega} = e^{2\pi(k-m)i} = 1.$$

On en déduit que si $k \neq m$ l'intégrale du second membre est égale à zéro. Dans le cas où $k = m$ cette intégrale est égale à T. Ainsi

$$c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-i\omega_m t}\, dt. \tag{128.2}$$

A l'aide de cette formule on calcule les coefficients c_m des séries de Fourier. Il n'est pas nécessaire d'intégrer entre 0 et T, les limites d'intégration peuvent être quelconques à condition que l'intervalle d'intégration soit égal à T.

2. Appliquons le théorème de Fourier à l'étude des oscillations forcées. Si la « force » extérieure $X(t)$ appliquée à un oscillateur amorti est périodique, on la développera en une série de Fourier et on aura à calculer les oscillations forcées déterminées par chaque terme de la série. La somme des solutions obtenues constitue la solution du problème des oscillations forcées dues à l'application de la force X.

Discutons, par exemple, le phénomène de résonance déterminé par une force périodique ayant le caractère de poussées successives (fig. 305). Notons T la période fondamentale à laquelle se succèdent les poussées. Le développement de la force $X(t)$ sera composé de termes sinusoïdaux de périodes T, $T/2$, $T/3$, . . ., T/m (qu'on appelle harmoniques). La résonance sur le m-ième harmonique a lieu si $T/m = T_0$ ou $T = mT_0$, T_0 étant la période propre du circuit oscillant. Ainsi le système entre en résonance si les poussées se succèdent à des intervalles de temps égaux à T_0, $2T_0$, $3T_0$, . . . Ce résultat s'interprète aisément à l'aide de considérations physiques simples.

3. Il n'est nullement nécessaire que la force $X(t)$ soit une fonction *périodique*. Il suffit qu'elle puisse être représentée par une *somme de termes sinusoïdaux*. Posons

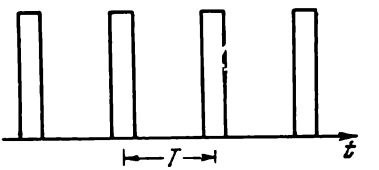


Fig. 305

$$X(t) = A(t)\cos\omega t, \qquad (128.3)$$

où la fonction $A(t)$ *varie lentement en fonction du temps* (lentement par rapport à la quantité $\cos\omega t$ qui est « rapidement » variable). L'oscillation que décrit (128.3) est dite *modulée en amplitude*. L'exemple le plus simple en est la *modulation sinusoïdale*:

$$A(t) = A_0(1 + \alpha\cos\Omega t), \qquad (128.4)$$

où A_0, α et Ω sont des constantes. La grandeur ω est appelée *fréquence porteuse*, α est la *profondeur* (ou *taux*) *de modulation* et Ω est la *fréquence de modulation*. Dans ce cas

$$X = A_0\cos\omega t + \frac{\alpha A_0}{2}[\cos(\omega+\Omega)t + \cos(\omega-\Omega)t], \qquad (128.5)$$

ce qui signifie qu'une oscillation à modulation sinusoïdale est équivalente à la superposition de trois oscillations sinusoïdales de fréquences ω, $\omega + \Omega$, $\omega - \Omega$. Si ces trois fréquences sont commensurables, la force X est périodique. Dans le cas contraire la force X n'est pas périodique. Pour illustrer cette proposition considérons l'expérience d'acoustique suivante. Deux diapasons fixés sur des caisses de résonance sont disposés côte à côte (fig. 302). Nous avons vu plus haut (p. 588) que si on excitait un diapason, l'autre se mettait à vibrer (résonance). Mais si on attachait à une des branches du second diapason un petit poids, celui-ci introduirait un « désaccord » et le second diapason ne « répondrait » plus au premier. Disposons entre les diapasons un disque perforé de trous et mettons-le en rotation. Lorsqu'un trou du disque tournant passe devant les orifices des caisses de résonance, l'onde sonore qui agit sur le deuxième diapason se trouve amplifiée car l'onde sonore est alors modulée en amplitude. En faisant varier la fréquence circulaire du disque on arrive

à trouver la fréquence à laquelle le deuxième diapason se remet à vibrer sous l'action du premier.

L'oscillation modulée (128.3) est souvent appelée *oscillation harmonique* (ou *sinusoïdale*) *à amplitude variable*. Du point de vue de la logique formelle ce terme est contradictoire en soi puisque par définition l'amplitude A et la fréquence ω de la sinusoïde sont des *grandeurs constantes*. Néanmoins dans certains cas ce terme peut être justifié puisque tout dépend de la nature du système récepteur sur lequel agit la force modulée (128.3). Si le récepteur est accordé (i.e. son coefficient d'amortissement γ est petit), il ne répondra pratiquement qu'à une seule fréquence, celle qui coïncide avec sa fréquence propre ω_0. Un tel récepteur permet de sélectionner dans la superpo-

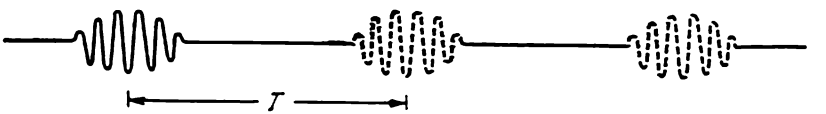


Fig. 306

sition (128.5) des oscillations de fréquence ω, $\omega + \Omega$ ou $\omega - \Omega$. Il est alors inadmissible d'identifier la fonction (128.3) à une seule sinusoïde, car il faut la considérer comme la superposition (128.5) de trois sinusoïdes de fréquences différentes. Si l'accord n'est pas aigu, le récepteur capte simultanément *les trois oscillations* de fréquences ω, $\omega + \Omega$ et $\omega - \Omega$, et les amplifie également. Par superposition de ces trois oscillations il apparaît dans le récepteur une oscillation forcée $\sim A\ (t) \cos \omega t$. Tout se passe *comme si le récepteur était soumis à une force sinusoïdale dont l'amplitude $A\ (t)$ variait dans le temps*. La même situation se retrouve dans le cas d'une modulation de fréquence, où au lieu de l'amplitude A c'est la fréquence ω qui varie. Ces conclusions ne sont valables que si le temps d'établissement des oscillations dans le récepteur $\tau = 1/\gamma$ est petit devant le temps au cours duquel l'amplitude et la phase de la force appliquée varient d'une façon notable. Au cours du temps τ les oscillations forcées arrivent à s'établir dans le récepteur tandis que A et ω restent pratiquement constants. Par conséquent au cours du temps d'établissement τ la force $X = A\ (t) \cos [\omega\ (t)\ t]$ exerce le même effet que si elle était purement sinusoïdale avec $A\ (t)$ et $\omega\ (t)$ constants.

4. Considérons maintenant le cas où la force $X\ (t)$ *n'est pas périodique* mais agit sur le système oscillant pendant un *temps fini*; cette force est représentée, par exemple, par une fonction dont le graphique est donné en trait plein sur la figure 306. Ce cas se ramène à celui d'une force périodique comme nous allons le montrer. Choisissons un intervalle de temps T très grand devant le temps d'amortissement des oscillations libres du système et prolongeons la courbe $X\ (t)$

d'une manière « périodique » afin d'obtenir une fonction de période T comme représenté sur la figure 306. Comme le temps T est quelconque on peut le rendre suffisamment grand pour que le remplacement de la fonction donnée par son étalement périodique n'affecte pratiquement pas le comportement du système oscillant pendant le temps qui nous importe. Si on pose à la limite $T \to \infty$ la grandeur auxiliaire T se trouve éliminée du résultat et celui-ci devient *absolument exact*. En développant en série de Fourier la fonction que nous venons de définir et en posant $\Omega = 2\pi/T$ nous écrirons

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{in\Omega t},$$

où

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X(t)\, e^{-in\Omega t}.$$

Pour passer à la limite nous utiliserons les nouvelles notations: $\omega = n\Omega$, $\Delta\omega = \Omega$. On écrira donc

$$X(t) = \sum \frac{c_n}{\Omega} e^{i\omega t} \Delta\omega.$$

Puisque pour $T \to \infty$ les quantités $\Delta\omega$ tendent vers zéro, nous remplaçons la somme par l'intégrale:

$$X(t) = \int_0^{\infty} a(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{128.6}$$

avec

$$a(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{\Omega} = \frac{1}{T\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{-i\omega t}\, dt,$$

ou

$$a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\, e^{-i\omega t}\, dt. \tag{128.7}$$

C'est l'*intégrale* dite *de Fourier* qui représente la fonction $X(t)$ sous forme d'une *superposition d'un ensemble continu d'oscillations sinusoïdales* dont les fréquences occupent sans discontinuité un intervalle donné. Bien entendu on ne prendra, dans le second membre de (128.6), que la *partie réelle*. Il est évident que le raisonnement ci-dessus ne constitue pas une démonstration rigoureuse de la formule (128.6) et ne sert qu'à établir un lien entre la série et l'intégrale de Fourier. Une démonstration rigoureuse est donnée dans la théorie de l'intégrale de Fourier.

§ 129. La loi d'Ohm en courant alternatif (variant dans le temps suivant une loi sinusoïdale)

1. Considérons un circuit comportant une résistance ohmique R, une bobine d'inductance L et un condensateur C connectés en série et appliquons à ses bornes une force électromotrice sinusoïdale $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos \omega t$ (voir fig. 291). Il s'agit de calculer le courant $\mathcal{J}$ qui circulera dans le circuit sous l'action de cette force électromotrice. Utilisons la représentation complexe et écrivons $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{i\omega t}$. En régime permanent la charge du condensateur s'exprimera par la formule (127.5). En différentiant l'expression (127.5) par rapport au temps et en tenant compte de (122.7), (122.8), (122.9), nous obtenons

$$\mathcal{J} = \frac{\mathscr{E}}{Z}, \quad \mathscr{E} = \mathcal{J}Z, \tag{129.1}$$

où on a utilisé la notation

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{129.2}$$

La formule (129.1) exprime la *loi d'Ohm pour les courants alternatifs* (*plus précisément pour les courants sinusoïdaux*). La grandeur complexe Z appelée *impédance* joue le rôle de résistance. La signification physique de (129.1) apparaîtra pleinement dès qu'on l'écrira sous forme réelle. Mais il faut déterminer d'abord l'*amplitude* et la *phase du courant*. Considérons pour commencer quelques cas particuliers.

2. Premier cas. Le circuit ne contient ni bobine d'inductance, ni condensateur. Puisqu'il n'y a pas d'auto-induction, $L = 0$. L'élimination du condensateur se traduit par ce que les points *3* et *4* sur la figure 291 se superposent et la chute de tension entre ces points est donc égale à zéro. Dans l'équation (122.5) on doit donc supprimer le terme q/C, ce qui d'un point de vue formel conduit à poser $C = \infty$ (et non pas $C = 0$ comme on pourrait le penser). Dans ces conditions la formule (129.1) se trouve ramenée à la forme usuelle de la loi d'Ohm $\mathscr{E} = R\mathcal{J}$. Il n'y a aucun *déphasage* entre le courant et la tension.

3. Deuxième cas. Le circuit est constitué par une inductance pure, sans résistance ni condensateur ($R = 1/C = 0$). Dans ce cas

$$Z = i\omega L, \quad \mathscr{E} = i\omega L\mathcal{J}. \tag{129.3}$$

L'impédance Z est *purement imaginaire*. Cela signifie que le déphasage entre le courant et la tension est égal à 90°. En effet

$$\mathscr{E} = \omega L\mathcal{J}e^{i\frac{\pi}{2}}, \text{ ou } \mathscr{E} = \omega L\mathcal{J}_0 e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Sous forme réelle

$$\mathscr{E} = \omega L \mathscr{J}_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad \mathscr{J} = \mathscr{J}_0 \cos \omega t.$$

Le courant est donc en retard de $\pi/2$ *sur la tension.*

L'amplitude du courant est liée à l'amplitude de la tension par la relation $\mathscr{E}_0 = \omega L \mathscr{J}_0$. La quantité ωL (ou $i\omega L$) est la *réactance inductive*. Sa valeur est d'autant plus grande que la fréquence ω du courant et l'inductance L de la bobine sont grandes. Pour augmenter la réactance inductive on introduit dans la bobine un noyau de fer composé de bandes ou de fils en fer isolés les uns des autres par une couche de laque isolante par exemple. Les bobines à noyaux sont appelées *bobines d'arrêt* (ou *de choc*).

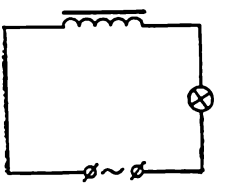


Fig. 307

Connectons en série un rhéostat à lampes et une bobine d'arrêt (fig. 307). Retirons de la bobine son noyau et réajustons la résistance du rhéostat à lampes jusqu'à ce que les lampes d'incandescence fournissent leur débit lumineux normal. Replaçons maintenant le noyau dans la bobine afin d'augmenter la réactance inductive. L'intensité du courant diminue et entraîne une diminution de l'éclat des lampes. Il peut se faire que les lampes s'éteignent. Si on branche le circuit sur une source de courant continu, le fait de retirer et de replacer le noyau dans la bobine n'exercera aucune action sur l'intensité du courant et sur l'éclat des lampes.

Aux hautes fréquences, même lorsque l'inductance L est négligeable, la réactance inductive ωL peut devenir beaucoup plus grande que la résistance ohmique. Relions les extrémités d'une grosse tige de cuivre recourbée (de 5 mm de diamètre) à une source de courant haute fréquence (de l'ordre du mégahertz) et branchons en parallèle une lampe d'éclairage ordinaire d'une résistance de 100 ohms (fig. 308). En comparaison de cette dernière la résistance ohmique de la barre (0,001 ohm en courant continu) est négligeable. Néanmoins la barre de cuivre ne court-circuite pas la lampe qui brille avec éclat parce que l'impédance de la barre est grande.

4. Troisième cas. Le circuit ne comporte ni bobine d'inductance ni résistance ohmique. On a alors

$$Z = -\frac{i}{\omega C}, \quad \mathscr{E} = -\frac{i}{\omega C}\mathscr{J}, \quad \mathscr{J} = i\omega C \mathscr{E}. \qquad (129.4)$$

Ces formules montrent que la phase du courant est en avance de $\pi/2$ sur la tension. L'amplitude du courant est liée à l'amplitude de la tension par la relation $\mathscr{J}_0 = \omega C \mathscr{E}_0$. La quantité $1/(\omega C)$ (ou $-i/(\omega C)$) est appelée *réactance capacitive* du condensateur. Elle est d'autant plus petite que la capacité du condensateur est grande. Il

est clair qu'un condensateur de capacité infinie n'opposera aucune résistance au passage d'un courant alternatif, car autrement des charges électriques de signes contraires se seraient accumulées sur ses armatures. Or si $C = \infty$ l'accumulation de charges ne saurait faire apparaître une différence de potentiel entre les armatures ($V = q/C = 0$). Un condensateur de capacité infinie se comporte de ce point de vue comme un bout de fil dénué de résistance ohmique.

Réalisons le montage représenté sur la figure 309. Branchons le commutateur Com_1 sur la source de courant continu. La lampe L

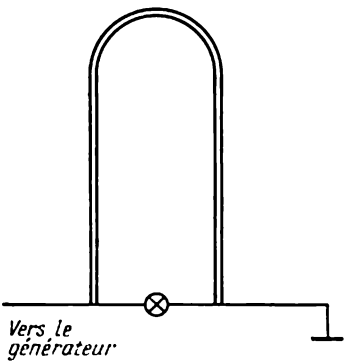


Fig. 308

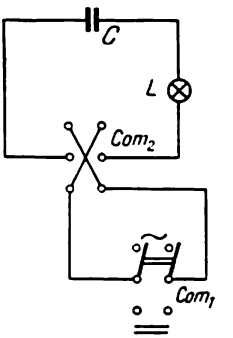


Fig. 309

ne s'allumera pas car le condensateur C présente une résistance infinie. Faisons varier le sens du courant à l'aide du commutateur Com_2. A chaque commutation la lampe est traversée par un courant de charge ou de décharge du condensateur, qui produit une lueur brève. Lorsque la vitesse de commutation devient assez grande, le courant qui traverse le circuit est alternatif et la lampe luit d'un éclat normal et continu. Lorsqu'on branche le commutateur Com_1 sur la source de courant alternatif, la lampe L brille d'un éclat égal. Si on augmente la capacité du condensateur C on réduit la réactance capacitive et l'éclat de la lampe augmente. Une diminution de la capacité du condensateur conduit à un résultat inverse.

5. Examinons maintenant le cas général où R, L et C ont des valeurs quelconques. Représentons l'impédance Z sous la forme

$$Z = \rho e^{i\delta},$$

où ρ et δ sont des nombres réels. On a alors

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{Z} = \frac{\mathcal{E}_0}{\rho} e^{i(\omega t - \delta)} = \mathcal{J}_0 e^{i(\omega t - \delta)},$$

et sous forme réelle

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}_0}{\rho} \cos(\omega t - \delta).$$

Le courant est en retard de δ sur la tension. Pour calculer ρ et δ nous utiliserons la formule (129.2). On trouve

$$\rho e^{i\delta} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires on obtient

$$\rho\cos\delta = R, \quad \rho\sin\delta = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

On en déduit

$$\rho^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2,$$
$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{129.5}$$

On obtient finalement

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}_0\cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{129.6}$$

Conjointement avec (129.5) cette dernière formule exprime sous *forme réelle* la loi d'Ohm en courant alternatif. La forme complexe de cette loi est plus compacte et convient mieux aux calculs:

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \tag{129.7}$$

6. La loi d'Ohm en courant alternatif peut être représentée à l'aide d'un diagramme vectoriel. Pour ce faire récrivons la formule (129.7) sous la forme

$$R\mathcal{J} + i\omega L.\mathcal{J} - \frac{i}{\omega C}.\mathcal{J} = \mathcal{E}. \tag{129.8}$$

Cette formule exprime le fait que la somme des chutes de tension sur la résistance ohmique, sur la bobine d'inductance et sur le condensateur est égale à la tension appliquée au circuit. Sur un diagramme vectoriel ces tensions doivent être considérées non comme des nombres, mais comme des *vecteurs*. La chute de tension sur la résistance ohmique $R\mathcal{J}$ est portée le long de l'axe X, celles qui se produisent sur la bobine d'inductance $\mathcal{J}\,\omega L$ et sur le condensateur $\mathcal{J}\,/(\omega C)$ sont portées le long de l'axe Y, la première dans le sens positif et la seconde dans le sens négatif (fig. 310). Le diagramme vectoriel permet de déterminer l'amplitude et la phase des oscillations. L'amplitude se laisse déterminer en considérant le triangle droit OAB:

$$(R\mathcal{J}_0)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \mathcal{J}_0^2 = \mathcal{E}_0^2.$$

Ce même triangle permet de trouver la tangente de l'angle de déphasage δ. On retrouve ainsi les formules (129.5) et (129.6).

La racine carrée se trouvant au dénominateur de (129.6) représente l'*impédance du circuit*. La résistance ohmique R est la *résistance active* et la quantité $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ est la *réactance* du circuit. On désigne

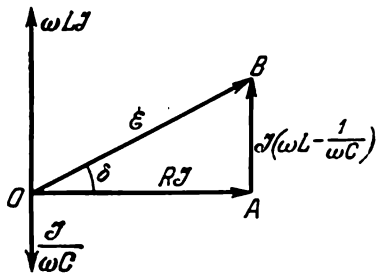


Fig. 310

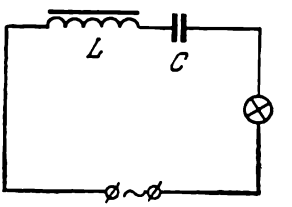


Fig. 311

parfois par réactance la partie imaginaire de l'impédance $i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$.

7. Considérons le cas où la tension extérieure $\mathscr{E}_0 \cos(\omega t + \delta)$ reste constante, mais les paramètres L et C du circuit varient. Lorsque la réactance $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ s'annule, l'impédance atteint sa valeur minimale R. Ce minimum d'impédance correspond à la fréquence de résonance $\omega = \omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$. L'amplitude du courant atteint alors son maximum $\mathcal{J}_{0\ \max} = \mathscr{E}_0/R$. La chute de tension totale dans le circuit sera égale à la chute de tension sur la résistance ohmique $V_R = R\mathcal{J}$. La somme des chutes de tension aux bornes de la bobine d'inductance et du condensateur est alors égale à zéro: $V_L + V_C = 0$, ce qui signifie que V_L et V_C sont égales en module mais de phases opposées. Ainsi à la résonance

$$\left|\frac{V_L}{V_R}\right| = \left|\frac{V_C}{V_R}\right| = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = Q. \qquad (129.9)$$

Si le facteur de qualité (ou de surtension) Q est grand, les tensions V_L et V_C peuvent être plusieurs fois plus grandes que la chute de tension sur la résistance ohmique R et que la tension appliquée $\mathscr{E}$. Cet effet est appelé *résonance de tension*. On doit tenir compte de cet effet dans les calculs de l'isolation des lignes électriques comportant des capacités et des self-inductances, sinon on risque d'avoir une rupture électrique de la ligne.

Pour réaliser une expérience de démonstration de la résonance de tension on utilise un circuit oscillant composé d'une batterie de condensateurs C, d'une bobine de self-inductance L à noyau de fer amovible, ce qui permet de modifier aisément la valeur de L (fig. 311).

En qualité de résistance R on utilise une ou plusieurs lampes d'éclairage montées en parallèle. A l'aide de quatre voltmètres (non indiqués sur la figure) on peut mesurer simultanément les tensions V_L, V_C, V_R (plus exactement leurs amplitudes) ainsi que la tension d'entrée $\mathscr{E}$. L'expérience montre que lorsqu'on applique à l'entrée un courant alternatif, la tension V_R appliquée à la résistance R est plus petite que la tension d'entrée $\mathscr{E}$ par suite de l'existence d'une chute de tension sur la réactance. C'est pour cette raison que l'éclat des lampes est faible et que les amplitudes des tensions V_L et V_C sont différentes. En modifiant la self-inductance L ou la capacité C on arrive à rendre sensiblement égales les amplitudes des tensions V_L et V_C. Comme ces tensions sont en opposition de phase, la réactance est alors nulle, l'intensité du courant est maximale et les lampes brillent avec éclat. Les tensions V_L et V_C sont alors beaucoup plus grandes que la tension d'entrée $\mathscr{E}$, ce qui correspond à l'effet de résonance de tension.

§ 130. Lois de Kirchhoff en courant alternatif

1. *La première loi de Kirchhoff s'applique sans aucune modification aux courants alternatifs.* En effet comme les capacités des nœuds sont négligeables, les charges électriques ne peuvent s'y accumuler. Par conséquent, à tout instant, la somme des intensités des courants arrivant aux nœuds doit être égale à la somme des intensités des courants qui s'en éloignent. *La deuxième loi de Kirchhoff (loi des mailles) s'applique également aux courants alternatifs sinusoïdaux à condition de remplacer partout la résistance ohmique R par l'impédance correspondante Z.* Cette loi découle directement de l'équation de Maxwell

$$\oint E_l\, dl = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Pour le démontrer il suffit de considérer une maille d'un réseau, par exemple celle représentée sur la figure 312. Si nous supposons que le système se trouve dans un état quasi stationnaire l'équation précédente appliquée à la maille donnée s'écrira comme suit :

$$\sum_k \left(\mathscr{I}_k R_k + \frac{q_k}{C_k} - \mathscr{E}_k\right) = -\sum L_k \frac{d\mathscr{I}_k}{dt}.$$

On compte positivement la tension appliquée $\mathscr{E}_k$ si le parcours de la maille commence au pôle négatif et s'achève au pôle positif. L'équation ci-dessus est vérifiée même si le processus n'est pas établi et si les forces électromotrices $\mathscr{E}_k$ varient dans le temps de façon quelconque. Supposons que toutes les forces électromotrices $\mathscr{E}_k$ varient sinusoïdalement en fonction du temps, i.e. sous forme complexe $\mathscr{E}_k \sim e^{i\omega t}$. Si le processus est établi, la variation des charges q_k et des courants

$\mathcal{J}_k = \dot{q}_k$ en fonction du temps sera également sinusoïdale et l'équation précédente s'écrira

$$\sum_k \mathcal{J}_k \left(R_k + i\omega L_k - \frac{i}{\omega C_k}\right) = \sum_k \mathcal{E}_k,$$

ou

$$\sum Z_k \mathcal{J}_k = \sum \mathcal{E}_k. \tag{130.1}$$

Or c'est l'expression de la seconde loi de Kirchhoff.

2. Tous les résultats que l'on peut obtenir en appliquant formellement les lois de Kirchhoff aux courants continus restent en vigueur

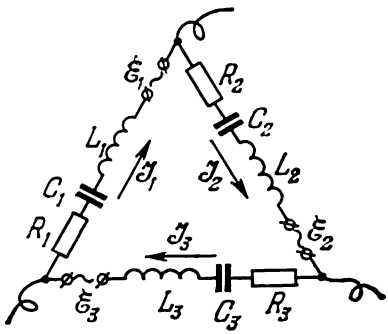


Fig. 312

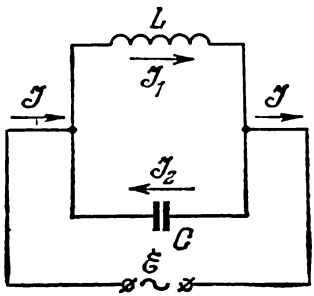


Fig. 313

pour les courants sinusoïdaux établis en les écrivant sous forme complexe. Ainsi, si on considère plusieurs impédances en parallèle, l'admittance résultante sera donnée par la formule

$$\frac{1}{Z} = \sum \frac{1}{Z_k}. \tag{130.2}$$

Considérons une bobine d'inductance et un condensateur montés en parallèle (fig. 313). D'après la première loi de Kirchhoff

$$\mathcal{J} + \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1,$$

et d'après la seconde

$$i\omega L \mathcal{J}_1 - i\frac{\mathcal{J}_2}{\omega C} = 0.$$

Eliminons le courant $\mathcal{J}_2$ entre ces équations. Il vient

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 (1 - \omega^2 LC),$$

ou

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right). \tag{130.3}$$

Si $\omega = \omega_0$, $\mathcal{J} = 0$ et par conséquent $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$. Les courants $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ peuvent être différents de zéro, mais les oscillations dans le circuit sont alors absolument indépendantes du courant extérieur. La raison en est que pour $\omega = \omega_0$ (i.e. lorsque $\omega L = 1/(\omega C)$) l'impédance Z du circuit devient infinie comme le montre la formule (130.2). Le circuit se comporte comme un bouchon étanche qui ne se laisse pas traverser par le courant extérieur; la bobine ne peut être le siège que d'oscillations libres. L'amplitude de ces oscillations se calcule en imposant que la tension aux bornes de la bobine ou du condensateur doit être égale à tout instant à la tension appliquée $\mathcal{E}$. On trouve ainsi

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{E}}{i\omega L}, \quad \mathcal{J}_2 = -\frac{\mathcal{E}}{-i/(\omega C)} = \frac{\mathcal{E}}{i\omega L}.$$

On peut se demander comment il se fait que le circuit oscillant soit parcouru par les courants $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ lorsque son impédance est infinie. Cette question est parfaitement justifiée et les relations que nous avons établies ci-dessus ne peuvent fournir aucune réponse puisqu'elles ne concernent que les *états permanents*. Or ces derniers s'établissent en passant par des *états transitoires* pendant lesquels le courant circulant dans le circuit extérieur n'est pas nul; par suite des charges et des courants pénètrent dans le circuit oscillant qui emmagasine de l'énergie électromagnétique. Ce processus se poursuit jusqu'à ce que les tensions aux bornes de la bobine et du condensateur équilibrent la tension extérieure. A partir de cet instant aucun courant et aucune charge ne pénètrent plus dans le circuit oscillant. Il s'établit dans ce dernier des oscillations libres comme si c'était un *système oscillant autonome*. Mais cette autonomie ne subsiste que tant que la force électromotrice extérieure $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ reste constante. Si on fait varier l'amplitude de $\mathcal{E}_0$ la f.é.m. $\mathcal{E}$ ne compensera plus les tensions aux bornes du condensateur et de la bobine, un courant passera dans le circuit extérieur et provoquera l'établissement d'un nouveau processus oscillatoire.

Il va de soi que si de l'énergie n'est pas fournie de l'extérieur les oscillations non amorties ne pourront subsister que si la résistance ohmique du circuit est nulle. Tenons maintenant compte de la résistance ohmique. Désignons par R la résistance ohmique de la bobine de self-inductance et négligeons les résistances ohmiques de tous les autres conducteurs. On aura alors

$$\mathcal{J}_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + i\omega L}, \quad \mathcal{J}_2 = -i\omega C\mathcal{E},$$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 = \frac{R - i\omega L + i\omega^2 L^2 \omega C + i\omega C R^2}{R^2 + \omega^2 L^2}\,\mathcal{E}.$$

A la résonance $\omega = \omega_0$ et par conséquent $\omega C = 1/(\omega L)$. Dans ces conditions

$$\mathcal{J} = \frac{R + iR\dfrac{R}{\omega L}}{R^2 + \omega^2 L^2}\,\mathcal{E}.$$

Supposons que la résistance R est très petite devant la réactance inductive ωL. Dans ce cas

$$\mathcal{J} \approx \frac{R}{\omega^2 L^2}\,\mathcal{E} = i\,\frac{2\gamma}{\omega}\,\mathcal{J}_1 = i\,\frac{\mathcal{J}_1}{Q},$$

d'où

$$\left|\frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{J}}\right| = Q.$$

Plus le facteur de qualité Q du circuit oscillant est grand, plus le courant $\mathcal{J}$ circulant dans le circuit complet est petit. Ainsi pour $\omega = \omega_0$ un courant de faible intensité $\mathcal{J}$ passant dans un circuit oscillant de grand Q peut y exciter et maintenir un courant de grande intensité. C'est l'effet de *résonance de courants*. Pour l'observer il suffit d'intercaler des ampèremètres dans le circuit de la figure 313 pour mesurer les courants $\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$. Loin de la résonance les intensités de ces courants sont peu différentes. Accordons le circuit à la résonance en modifiant l'inductance de la bobine ou la capacité du condensateur. Les courants $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ deviennent alors presque égaux et le courant $\mathcal{J}$ sera peu différent de zéro.

§ 131. Tensions et courants efficaces

1. Toute différence de phase entre le courant et la tension exerce une influence sur le *travail* et la *puissance des courants alternatifs*. Le travail δA fourni par la force électromotrice $\mathcal{E}$ pendant le temps dt est donné par l'expression $\delta A = \mathcal{E}dq$, où dq est la charge qui a traversé la section droite du conducteur pendant cet intervalle de temps. La puissance instantanée est

$$P = \mathcal{E}\,\frac{dq}{dt} = \mathcal{E}\mathcal{J}. \tag{131.1}$$

Comme la multiplication est une opération non linéaire, on ne doit pas utiliser les expressions complexes et on doit revenir à la forme réelle ; si le courant est sinusoïdal on écrira

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \qquad \mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \cos(\omega t - \delta). \tag{131.2}$$

Il est cependant plus commode de faire les calculs avec des notations complexes en utilisant l'artifice suivant. Notons $\mathcal{E}^*$ et $\mathcal{J}^*$ les grandeurs complexes conjuguées de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{J}$. On aura alors

$$\operatorname{Re}\mathcal{E} = {}^1/_2\,(\mathcal{E} + \mathcal{E}^*), \qquad \operatorname{Re}\mathcal{J} = {}^1/_2\,(\mathcal{J} + \mathcal{J}^*).$$

En portant ces grandeurs réelles dans (131.1) on obtient

$$P = {}^1/_4\,(\mathscr{E}\mathscr{J}^* + \mathscr{E}^*\mathscr{J}) + {}^1/_4\,(\mathscr{E}\mathscr{J} + \mathscr{E}^*\mathscr{J}^*). \qquad (131.3)$$

Nous pouvons poser maintenant $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{i\omega t}$, $\mathscr{J} = \mathscr{J}_0 e^{i(\omega t - \delta)}$ et utiliser la formule $\cos\alpha = {}^1/_2\,(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$. Cela donne

$$P = {}^1/_2\mathscr{E}_0\mathscr{J}_0 \cos\delta + {}^1/_2\mathscr{E}_0\mathscr{J}_0 \cos(2\omega t - \delta).$$

Il est facile d'obtenir cette formule sans avoir recours aux notations complexes. On notera que le second terme du deuxième membre oscille avec une fréquence double 2ω. Sa valeur moyenne dans le temps est égale à zéro. Le premier terme ne dépend pas du temps et représente la *puissance moyenne du courant alternatif*

$$\overline{P} = {}^1/_2\mathscr{E}_0\mathscr{J}_0 \cos\delta. \qquad (131.4)$$

Les grandeurs $\mathscr{E}_0$ et $\mathscr{J}_0$ sont les *amplitudes de la tension et du courant*. En électrotechnique on utilise de préférence les *valeurs* dites *efficaces*, définies par

$$\mathscr{E}^2_{\text{eff}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{E}^2\,dt, \quad \mathscr{J}^2_{\text{eff}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{J}^2\,dt. \qquad (131.5)$$

Pour les courants sinusoïdaux

$$\mathscr{E}_{\text{eff}} = \mathscr{E}_0/\sqrt{2}, \quad \mathscr{J}_{\text{eff}} = \mathscr{J}_0/\sqrt{2}. \qquad (131.6)$$

Après avoir introduit les grandeurs efficaces la formule de la puissance moyenne du courant alternatif s'écrit

$$\overline{P} = \mathscr{E}_{\text{eff}}\mathscr{J}_{\text{eff}} \cos\delta. \qquad (131.7)$$

2. La différence de phase δ exerce également son influence sur les *interactions des courants alternatifs*. Soient deux courants alternatifs $\mathscr{J}_1$ et $\mathscr{J}_2$ parcourant deux fils rectilignes infiniment longs et distants de r. La force instantanée s'exerçant sur l'unité de longueur de chaque fil est

$$F = \frac{2\mathscr{J}_1\mathscr{J}_2}{cr}\,\mu.$$

(On utilise ici le système d'unités gaussien.) Si les courants $\mathscr{J}_1$ et $\mathscr{J}_2$ sont sinusoïdaux et déphasés de δ l'un par rapport à l'autre, la force moyenne est

$$\overline{F} = \frac{2\mu}{cr} = \mathscr{J}_{1\text{eff}}\mathscr{J}_{2\text{eff}} \cos\delta. \qquad (131.8)$$

Suivant la valeur de la différence de phase δ la force moyenne $\overline{F}$ peut être soit une force d'attraction soit une force de répulsion. Si $\delta = \pi/2$, on a $\overline{F} = 0$.

Reprenons l'expérience de E. Thomson que nous avons décrite au § 65. En notant $\mathcal{J}$ le courant dans le bobinage de l'électroaimant, le flux magnétique traversant l'anneau d'aluminium est $\Phi = L_{12}\mathcal{J}$. Supposons que $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 e^{i\omega t}$. La force électromotrice induite dans l'anneau est $\mathcal{E}^{\text{ind}} = -d\Phi/dt = -i\omega L_{12}\mathcal{J}$ et le courant qui y circule est

$$\mathcal{J}' = -\frac{i\omega L_{12}\mathcal{J}}{R+i\omega L},$$

où L est l'inductance et R la résistance ohmique de l'anneau. Si R est négligeable devant la réactance inductive ωL de la bobine

$$\mathcal{J}' = -\frac{L_{12}}{L}\mathcal{J}.$$

Comme les coefficients L_{12} et L sont positifs, les courants $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont en opposition de phase : $\delta = \pi$. La force d'interaction moyenne de l'électroaimant et de l'anneau sera une *force de répulsion*.

§ 132. Processus d'établissement des oscillations

Dans le cas général les oscillations déterminées par une force extérieure se composent des oscillations forcées et des oscillations libres (cf. § 127). Les oscillations propres s'amortissent si le temps t qui s'est écoulé depuis l'instant où la force extérieure a commencé à s'exercer est grand devant le temps d'amortissement $\tau = 1/\gamma$. Examinons cette question de plus près. Pour simplifier nous effectuerons nos calculs en supposant que le coefficient d'amortissement γ est égal à zéro. Il est évident que dans ce cas le processus d'établissement des oscillations ne sera jamais terminé puisque $\tau = 1/\gamma = \infty$. Néanmoins la solution à laquelle on arrive avec $\gamma = 0$ permet de comprendre du point de vue qualitatif ce qui se passe lorsque $\gamma \neq 0$.

Supposons qu'à l'instant $t = 0$ un oscillateur harmonique se trouve soumis à l'action d'une « force » périodique $f = f_0 \cos \omega t$. A un instant $t > 0$ les oscillations seront décrites par l'équation

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t.$$

Si $\omega \neq \omega_0$ la solution générale sera de la forme

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos \omega t + a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t.$$

Les constantes a et b sont déterminées par les conditions initiales. Supposons qu'à l'instant $t = 0$ la coordonnée x et la vitesse $\dot{x}$ soient nulles. Pour cela il faut que $a = -f_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$ et $b = 0$. La solution qui vérifie ces deux conditions sera de la forme

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \qquad (132.1)$$

C'est la superposition de deux oscillations harmoniques dont l'une est une oscillation propre de fréquence ω_0 et l'autre est une oscillation forcée de fréquence ω. La superposition d'oscillations harmoniques de fréquences différentes se rencontre dans les phénomènes les plus divers. Par exemple, le son que l'on entend lorsqu'il est émis par deux diapasons de fréquences propres différentes est une superposition de deux oscillations. Un cas particulièrement important est celui où les fréquences ω et ω_0 sont peu différentes. Dans ce cas il est commode de ramener l'équation (132.1) à la forme

$$x = A(t) \sin \bar{\omega} t, \tag{132.2}$$

où

$$A(t) = \frac{\pm 2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega_m t, \tag{132.3}$$

$$\bar{\omega} = {}^1/_2 (\omega + \omega_0), \quad \omega_m = {}^1/_2 |\omega - \omega_0|. \tag{132.4}$$

Les oscillations définies par (132.2) sont des *oscillations modulées en amplitude* dont la fréquence porteuse est égale à la *fréquence moyenne* $\bar{\omega}$ et dont « la fréquence de modulation » est ω_m. L'allure générale de ces oscillations est illustrée par la figure 314. Dans le cas des

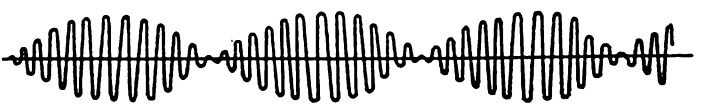


Fig. 314

oscillations harmoniques de l'air, excitées par deux diapasons, l'oreille perçoit généralement l'oscillation résultante comme une oscillation harmonique d'amplitude variable (cf. § 126). L'oreille perçoit un son musical dont l'intensité varie périodiquement avec une période $T_b = \pi/\omega_m$ et dont la fréquence est $\omega_b = 2\pi/T_b = 2\omega_m = |\omega - \omega_0|$. Ce phénomène porte le nom de *battements*; les grandeurs T_b et ω_b sont respectivement la *période* et la *fréquence des battements*. Le fait que l'oreille perçoit les battements comme un son musical d'intensité périodiquement variable tient à ce que l'oreille est un système oscillant dont le facteur de qualité est relativement petit; le temps d'établissement des oscillations dans ce système est petit devant la période des battements T_b.

En réalité les oscillations propres s'amortissent et l'oscillation résultante est une superposition d'une sinusoïde amortie et d'une sinusoïde non amortie. Lorsque les oscillations propres seront amorties il ne subsistera qu'une oscillation sinusoïdale non amortie, ce qui indique que le processus d'établissement des oscillations est ter-

miné. Suivant la valeur du coefficient d'amortissement γ, les processus d'établissement peuvent avoir les allures différentes (fig. 315).

Il nous reste à examiner le comportement du système à la résonance, i.e. lorsque $\omega = \omega_0$. Dans ce cas l'expression (132.1) devient

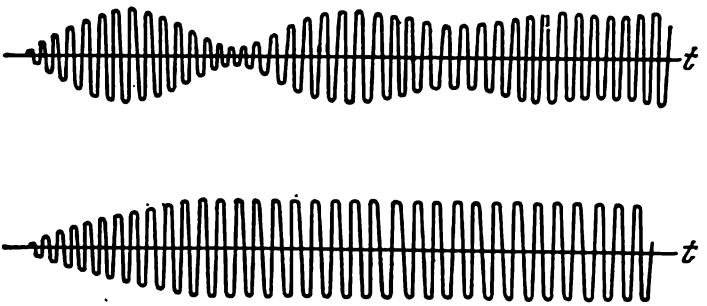


Fig. 315

indéterminée $x = 0/0$. Pour lever cette indétermination il suffit de passer à la limite $\omega \to \omega_0$. En différentiant par rapport à ω on trouve en appliquant la règle de L'Hospital

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} =$$

$$= \lim_{\omega \to \omega_0} \frac{-t \sin \omega t}{-2\omega} = \frac{t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Par conséquent

$$x = \frac{f_0 t}{2\omega_0} \sin \omega_0 t. \qquad (132.5)$$

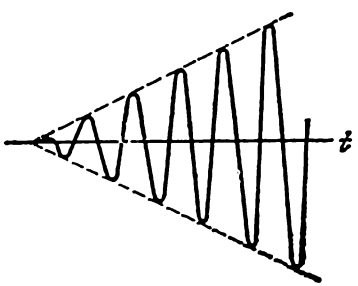


Fig. 316

On peut interpréter cette expression comme représentant une oscillation de fréquence ω_0 dont l'amplitude $A(t) = f_0 t/(2\omega_0)$ croît linéairement en fonction du temps. S'il n'y avait aucune force de frottement ou de freinage, l'amplitude croîtrait indéfiniment (fig. 316). Mais les forces de freinage existent toujours. Lorsque les oscillations sont petites elles sont peu notables, mais à mesure que l'amplitude des oscillations augmente, leur influence se fait sentir de plus en plus. Ce sont ces forces qui finalement mettent une limite à la croissance de l'amplitude des oscillations, et à partir de cet instant leur amplitude reste constante.

PROBLÈMES

1. Dans l'étude des processus quasi stationnaires évoluant dans les circuits oscillants on néglige l'énergie magnétique localisée dans la bobine d'inductance. Le problème n° 2 ci-après permet de se rendre compte que cette approximation

est justifiée. Soit un condensateur plan dont les armatures sont des disques de rayon R distants de d. L'espace entre les armatures est rempli d'un diélectrique homogène de permittivité ε et de perméabilité magnétique μ. Le condensateur est branché dans le circuit de courant alternatif $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \cos \omega t$. En négligeant les effets de bord, calculer les énergies électrique et magnétique localisées dans le condensateur. Trouver le rapport de l'énergie magnétique maximale à l'énergie électrique maximale. Exécuter un calcul numérique en posant $R = 10$ cm, $\nu = 100$ Hz, $\varepsilon = \mu = 1$.

Solution. L'énergie électrique (dans le système gaussien) est

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{2d}{\varepsilon\omega^2 R^2} \mathcal{J}_0^2 \sin^2 \omega t.$$

Le champ magnétique à l'intérieur du condensateur est excité par le courant de déplacement. A la distance r de l'axe du condensateur cette énergie est donnée par l'expression

$$H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}_{\text{dép}} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \mathcal{J},$$

d'où

$$H = \frac{2r}{cR^2} \mathcal{J} = \frac{2r}{cR^2} \mathcal{J}_0 \cos \omega t.$$

L'énergie magnétique localisée dans le condensateur est

$$W_m = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 dV = \frac{\mu d}{4c^2} \mathcal{J}_0^2 \cos^2 \omega t.$$

Le rapport des valeurs maximales de ces énergies est

$$\frac{W_m^{\max}}{W_e^{\max}} = \frac{\varepsilon\mu}{2} \left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2 \approx 0{,}5 \cdot 10^{-11}.$$

2. L'espace intérieur d'un solénoïde long comportant N spires de fils est rempli d'une substance homogène de permittivité diélectrique ε et de perméabilité magnétique μ. La longueur du solénoïde est l et son rayon est R. L'enroulement du solénoïde est parcouru par un courant alternatif $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \cos \omega t$. En négligeant les effets de bord, calculer les énergies magnétique et électrique localisées à l'intérieur du solénoïde ainsi que le rapport de leurs valeurs maximales. Faire un calcul numérique en posant $R = 5$ cm, $\varepsilon = \mu = 1$, fréquence $\nu = 100$ Hz.

Réponse.

$$W_m = \frac{2\pi^2 \mu R^2 N^2}{c^2 l} \mathcal{J}_0 \cos^2 \omega t,$$

$$W_e = \frac{\varepsilon\mu^2\pi^2\omega^2 R^4 N^2}{4c^4 l} \mathcal{J}_0^2 \sin^2 \omega t,$$

$$\frac{W_e^{\max}}{W_m^{\max}} = \frac{\varepsilon\mu}{2} \left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2 \approx 1{,}3 \cdot 10^{-15}.$$

3. Un solénoïde rectiligne constitué par une seule couche de fil d'inductance L exécute des oscillations de torsion harmoniques forcées autour de son axe: $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$. Le solénoïde est relié par des fils souples à un condensateur de capacité C (expérience de Mandelstam et Papalexi). Calculer la tension aux bornes du condensateur à la résonance lorsque la fréquence ω est égale à la fréquence propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ du circuit oscillant. Le rayon du solénoïde

est a, la longueur du fil dont il est fait est l, sa résistance électrique est R (cf. § 97).

Réponse. $V = \frac{m}{e}\frac{lLa\omega^3}{R}\varphi_0 \sin \omega t$, où m est la masse et e la charge de l'électron.

4. Nous avons décrit au § 78 l'expérience d'Einstein et de Haas dans laquelle le phénomène de résonance avait été utilisé pour déterminer le rapport gyromagnétique des atomes. En supposant que le champ magnétique dans lequel s'effectuent les oscillations de torsion du petit cylindre en fer est tellement fort que le cylindre est presque toujours aimanté à saturation et que sa réaimantation se produit presque instantanément lorsque le champ magnétique passe par zéro, calculer l'amplitude φ_0 des oscillations de torsion du cylindre à la résonance (en régime permanent).

Solution. L'équation des oscillations de torsion forcées du cylindre est de la forme (78.2). Pendant la réaimantation on peut négliger tous les moments tendant à mettre le cylindre en rotation à l'exclusion du moment $-V\dot{I}/\Theta\Gamma$. Pendant cet intervalle de temps le cylindre n'arrive pas à tourner d'un angle notable, mais sa vitesse angulaire s'accroît de

$$\Delta\dot{\varphi}_0 = -\frac{V}{\Theta\Gamma}\int \dot{I}\,dt = -2\frac{V}{\Theta\Gamma}I_{\text{sat}}.$$

Ayant acquis cette vitesse angulaire initiale le cylindre exécutera des oscillations libres et amorties

$$\varphi = \frac{\Delta\dot{\varphi}_0}{\omega}e^{-\gamma t}\sin \omega t.$$

Au bout d'une demi-période l'amplitude des oscillations diminuera de $e^{\gamma T/2}$ fois. Mais pendant ce temps le cylindre subira une nouvelle réaimantation qui déterminera un nouvel accroissement de l'amplitude de sa vitesse angulaire $\Delta\dot{\varphi}_0$. La nouvelle amplitude de déviation est maintenant égale à $\frac{\Delta\dot{\varphi}_0}{\omega}(1 + e^{-\gamma T/2})$ et ainsi de suite. L'amplitude des oscillations en régime permanent est donnée par la progression géométrique

$$\varphi_0 = \frac{\Delta\dot{\varphi}_0}{\omega}(1 + e^{-\gamma T/2} + e^{-2\gamma T/2} + \ldots) = \frac{\Delta\dot{\varphi}_0/\omega}{1 - e^{-\gamma T/2}}.$$

Si le coefficient d'amortissement est petit on a

$$\varphi_0 = \frac{2\Delta\dot{\varphi}_0}{\omega T\gamma} = \frac{\Delta\dot{\varphi}_0}{\pi\gamma} = -2\frac{V}{\pi\gamma\Theta\Gamma}I_{\text{sat}}.$$

5. On fait passer une brève impulsion de courant à travers un galvanomètre balistique de constante balistique B; une quantité d'électricité q traverse le galvanomètre pendant la durée de l'impulsion. Au bout d'une demi-période, lorsque le cadre mobile sera revenu dans sa position initiale, on fait passer une deuxième impulsion de courant identique à la première mais de sens contraire et ainsi de suite. Ainsi chaque fois que le cadre mobile passe par sa position d'équilibre le cadre est soumis à des poussées identiques dirigées dans le sens de son mouvement. Calculer l'angle de déviation maximal du cadre en régime oscillatoire permanent. La période des oscillations (amorties) du galvanomètre est T et le décrément logarithmique est d.

Réponse. $\varphi_{\max} = \frac{1}{1 - e^{-Td/2}}\frac{q}{B}$.

6. La bobine d'inductance d'un circuit oscillant de paramètres L, C et $R = 0$ est placée dans un champ magnétique permanent qui excite dans la bobine un flux magnétique permanent Φ_0. A l'instant $t = 0$ on supprime le champ magnétique. Le temps d'évanouissement τ du champ magnétique est petit devant la période des oscillations propres du circuit. Calculer le courant $\mathcal{J}$ circulant dans le circuit en fonction du temps après suppression du champ magnétique.

Réponse. $\mathcal{J} = \frac{\Phi_0}{L} \cos \omega_0 t$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

7. On dispose à côté de la bobine d'un circuit oscillant de paramètres L_1, C, $R = 0$ une deuxième bobine d'inductance L_2. Le coefficient d'inductance mutuelle des bobines est L_{12}. Quelle sera la fréquence de résonance du circuit

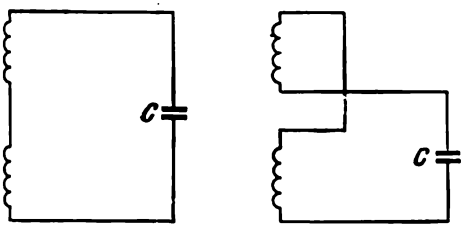


Fig. 317

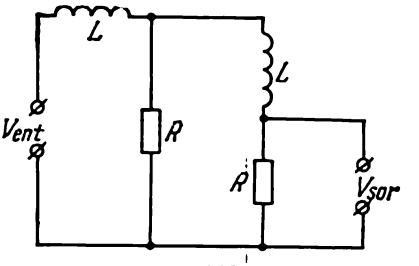


Fig. 318

lorsque la deuxième bobine est court-circuitée? On admettra que la réactance inductive de la deuxième bobine à la fréquence considérée est beaucoup plus grande que sa résistance active. Dans quelles conditions la résonance est-elle irréalisable?

Réponse. $\omega_{\text{rés}} = 1/\sqrt{(L_1 - L_{12}^2/L_2)\, C}$. La résonance est irréalisable si $L_{12}^2 = L_1 L_2$.

8. Un circuit oscillant d'inductance L et de capacité C est le siège d'oscillations non amorties de l'intensité de courant

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \cos \omega t, \quad \omega^2 = 1/(LC).$$

La bobine d'inductance est une hélice rectiligne de grande longueur. Quelles seront les variations de la fréquence, de l'amplitude et de l'énergie des oscillations si à l'instant $t = 0$ on allonge très rapidement la spirale de deux fois (i.e. en un temps petit devant la période des oscillations $T = 2\pi/\omega$)? Expliquer pour quelle raison varie l'énergie des oscillations.

Réponse. La fréquence augmente de $\sqrt{2}$ fois. L'amplitude et l'énergie des oscillations augmentent de deux fois.

9. Deux bobines identiques bobinées sur une carcasse commune sont intercalées en série de deux façons différentes dans un circuit oscillant de capacité C (fig. 317). Les fréquences de résonance de ces deux circuits oscillants sont respectivement égales à ω_1 et ω_2. Calculer les inductances L des bobines ainsi que leur coefficient d'inductance mutuelle L_{12}.

Réponse. $L = \frac{1}{4C}\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2}\right)$, $L_{12} = \frac{1}{4C}\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)$.

10. On désire obtenir, à l'aide du montage représenté sur la figure 318, un déphasage de 90° entre la tension d'entrée V_{ent} et la tension de sortie V_{sor}. Quels doivent être les paramètres R et L si la pulsation de la tension d'entrée est ω? Quelle sera la valeur du rapport des amplitudes des tensions d'entrée et de sortie?

Réponse. $\omega L = R$, $|V_{ent}/V_{sor}| = 3$.

11. Calculer le courant $\mathcal{J}$ circulant (en régime permanent) dans le circuit représenté sur la figure 319. A quelle fréquence ω l'amplitude des oscillations établies sera-t-elle maximale et à quelle autre sera-t-elle minimale? Quelles seront les valeurs maximale et minimale du courant?

Réponse. $\mathcal{J} = \dfrac{V\omega C(1-\omega^2 LC)}{2\omega^2 LC - 1}\sin\omega t$, $\mathcal{J}_{min} = 0$ pour $\omega^2 = 1/(LC)$, $\mathcal{J}_{max} = \infty$ pour $\omega^2 = 1/(2LC)$.

12. Un générateur de force électromotrice sinusoïdale débite sur une résistance active R et sur une réactance X montées en parallèle. Ensuite on fait débiter ce même générateur sur une résistance active r et sur une réactance x montées

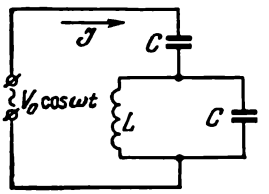


Fig. 319

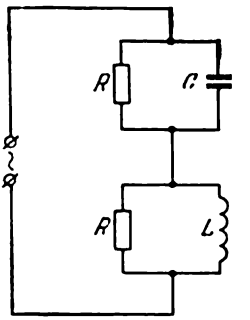


Fig. 320

en série. A quelle condition l'amplitude et la phase du courant seront-elles les mêmes dans les deux cas sachant que X et x sont des grandeurs réelles?

Réponse. $r = \dfrac{X^2}{R^2+X^2}R$, $x = \dfrac{R^2}{R^2+X^2}X$.

13. Trouver les conditions pour lesquelles l'amplitude du courant $\mathcal{J}$ circulant dans le circuit de la figure 320 ne dépendra que de l'amplitude de la

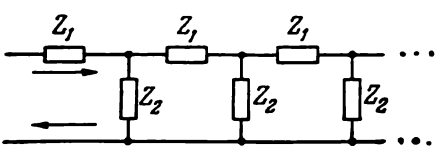


Fig. 321

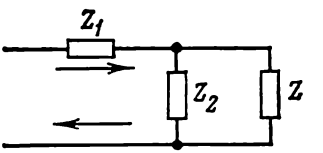


Fig. 322

tension appliquée $V = V_0\cos\omega t$ sans dépendre de la fréquence. Calculer pour ces conditions la différence de phase entre les tensions appliquées aux bornes de la maille RC.

Réponse. $L = R^2C$; $\operatorname{tg}\varphi = -\omega RC$.

14. Calculer l'impédance complexe Z du circuit infini représenté sur la figure 321.

Solution. Supposons que les paramètres du circuit soient tels qu'en appliquant à celui-ci une tension sinusoïdale il sera parcouru par un courant sinusoïdal. On peut alors utiliser la notion d'impédance. Même si on supprime les deux premières mailles Z_1 et Z_2, la chaîne demeurera infinie et on peut la

remplacer par une maille unique d'impédance Z. On aboutit ainsi au circuit représenté sur la figure 322. Comme les impédances Z et Z_2 sont montées en parallèle, leur impédance résultante $ZZ_2/(Z+Z_2)$ est montée en série avec l'impédance Z_1. On doit obtenir en définitive l'impédance Z, i.e.

$$Z=Z_1+\frac{ZZ_2}{Z+Z_2},$$

d'où

$$Z=\frac{Z_1}{2}+\sqrt{Z_1^2/4+Z_1Z_2}.$$

Le signe plus devant la racine carrée indique que seule la racine ayant une partie réelle positive doit être conservée. En effet la racine carrée est l'impédance Z' de la chaîne infinie représentée sur la figure 323; or dans tout système réel la partie active de l'impédance complexe doit être positive.

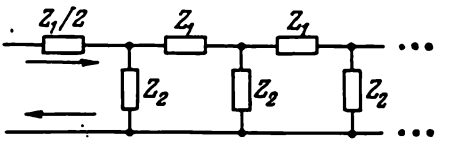


Fig. 323

15. Résoudre le problème précédent en supposant que toutes les impédances composant la chaîne sont purement imaginaires (i.e. sont constituées par des bobines d'inductance et des condensateurs).

Solution. En posant dans le problème précédent $Z_1 = iX_1$ et $Z_2 = iX_2$ on trouve

$$Z=\frac{1}{2}(iX_1\pm\sqrt{-(4X_1X_2+X_1^2)}).$$

Dans le cas où $4X_1X_2+X_1^2<0$ (l'expression sous le signe radical est positive) l'impédance Z comportera une composante réelle et le circuit consommera ou fournira de l'énergie suivant que cette composante réelle est positive ou négative. L'état stationnaire ne pourra s'établir et la solution obtenue dans le problème précédent est inapplicable. Pour obtenir une solution acceptable on devra utiliser les conditions initiales.

Le courant passant dans le circuit ne sera sinusoïdal que si $4X_1X_2+X_1^2\geqslant 0$. Ce n'est qu'à cette condition qu'on peut utiliser la notion d'impédance et la solution obtenue dans le problème précédent. Il s'agit alors de savoir quel signe on doit prendre devant la racine carrée. Supposons que l'impédance Z_1 contient une petite résistance ohmique R_1 et passons à la limite $R_1\to 0$. En posant $Z_1 = iX_1 + R_1$, $Z_2 = iX_2$ et en utilisant la solution du problème précédent on trouve

$$Z'=\frac{1}{2}\sqrt{-(4X_1X_2+X_1^2)+2iR_1(X_1+2X_2)},$$

où $Z' = Z - \frac{1}{2}Z_1$ est l'impédance de la chaîne infinie représentée sur la figure 323. Négligeons les carrés de R_1 dans le calcul de la racine carrée. Dans cette approximation

$$Z'=\frac{i}{2}\left[\sqrt{4X_1X_2+X_1^2}-i\frac{R_1(X_1+2X_2)}{\sqrt{4X_1X_2+X_1^2}}\right].$$

On devra choisir le signe de façon que la partie réelle de cette expression soit positive. Puisque $R_1 > 0$, dans le cas où $X_1 + 2X_2 > 0$, on prendra le signe plus et dans le cas où $X_1 + 2X_2 < 0$ on prendra le signe moins. En posant $R_1 = 0$ on trouve finalement

$$Z = \begin{cases} \frac{i}{2}\left[X_1 + \sqrt{4X_1X_2 + X_1^2}\right], \text{ avec } X_1 + 2X_2 > 0, \\ \frac{i}{2}\left[X_1 - \sqrt{4X_1X_2 + X_1^2}\right], \text{ avec } X_1 + 2X_2 < 0. \end{cases}$$

Si la chaîne ne comporte, par exemple, que des bobines d'inductance, on a $X_1 > 0$, $X_2 > 0$ et on prendra le signe plus devant le radical. Dans ce cas le courant retarde de $\pi/2$ sur la tension. Dans le cas où la chaîne ne comporterait

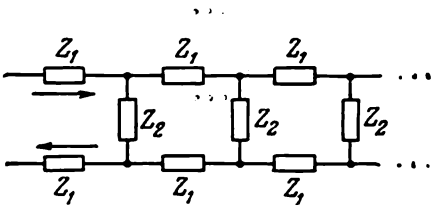


Fig. 324

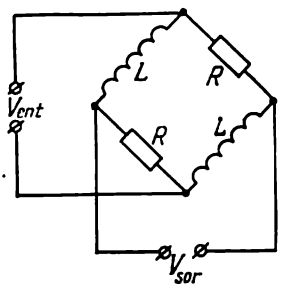


Fig. 325

que des condensateurs, on a $X_1 < 0$, $X_2 < 0$ et c'est le signe moins qui seul peut convenir. Dans ce cas le courant est en avance de $\pi/2$ sur la tension.

16. Calculer l'impédance de la chaîne infinie représentée sur la figure 324.

Réponse. $Z = Z_1 + \sqrt{Z_1^2 + Z_1Z_2}$.

17. On applique une tension sinusoïdale de fréquence ω à l'entrée du circuit représenté sur la figure 325. Etudier la dépendance de l'amplitude et de la phase de la tension de sortie en fonction de la résistance R.

Réponse. A l'entrée et à la sortie les amplitudes sont les mêmes. Le déphasage de la tension de sortie sur la tension d'entrée est

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\omega RL}{\omega^2L^2 - R^2}.$$

18. Un fil rectiligne de grande longueur est parcouru par un courant sinusoïdal $\mathcal{J}$ de fréquence $\nu = 10^8$ Hz. On approche du fil un cadre rectangulaire en fil, de côté $a = 17{,}2$ cm, dans lequel on a intercalé une petite lampe d'éclairage (fig. 326, *a*). Lorsque ce cadre se trouve à une distance $b = 10$ cm du fil, la lampe luit normalement. Calculer la valeur efficace du courant $\mathcal{J}_{eff}$ dans le fil sachant que la lampe luit normalement sous une tension $V = 6$ V. La tension appliquée à la lampe augmentera-t-elle (ou diminuera-t-elle) si le cadre rectangulaire simple est remplacé par un cadre double représenté sur la figure 326, *b*? On négligera la résistance des cadres.

Réponse. $\mathcal{J}_{eff} = \dfrac{V}{4\pi\nu a \ln(a/b + 1)} = 0{,}028$ un. C.G.S.M. $= 0{,}28$ A.

La tension appliquée à la lampe diminuera de

$$\ln\left(\frac{a}{b} + 1\right) \Big/ \ln\frac{(a+b)^2}{b(b+2a)} \approx 2 \text{ fois.}$$

19. Un circuit composé d'une résistance R couplée en série avec une grande inductance L est branché sur une source de courant continu maintenant aux bornes du circuit une tension constante V_0. Pour limiter les surtensions qui apparaissent lorsqu'on coupe le courant, on branche un condensateur C en parallèle

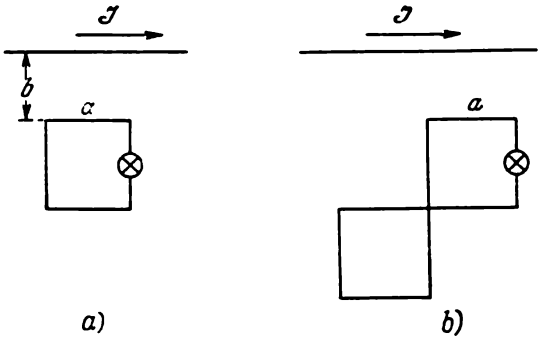


Fig. 326

sur le circuit (fig. 327). Calculer la tension $V(t)$ aux bornes du condensateur lorsqu'on coupe l'alimentation du circuit. Les paramètres du circuit vérifient la condition $4L > CR^2$.

Réponse. $V(t) = V_0 e^{-\gamma t}\left[\cos\omega t + \left(\frac{1}{\omega RC} + \frac{\gamma}{\omega}\right)\sin\omega t\right]$, où $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$, $\gamma = R/(2L)$.

20. A l'instant $t = 0$ on branche un circuit L, C, R (fig. 328) sur une source de f.é.m. continue et constante de résistance interne négligeable. Calculer la

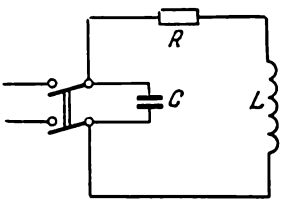


Fig. 327

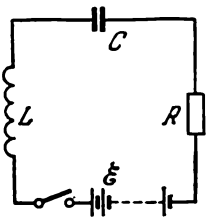


Fig. 328

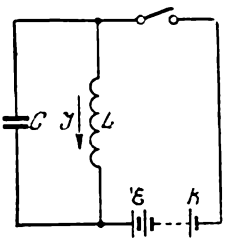


Fig. 329

tension V aux bornes du condensateur C en fonction du temps t. Calculer la tension minimale que doit supporter le condensateur.

Réponse. $V = \mathscr{E}\left[1 - e^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$. La tension minimale du condensateur doit être supérieure à $2\mathscr{E}$.

21. Une bobine d'inductance L, un condensateur de capacité C et une batterie de force électromotrice $\mathscr{E}$ ayant une résistance interne R sont montés en parallèle (fig. 329). Calculer l'intensité $\mathcal{J}(t)$ du courant traversant la bobine aussitôt après branchement de la batterie. Les paramètres L, C, R du circuit vérifient la condition $L < 4CR^2$.

Réponse. $\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}}{R}\left[1 - e^{-\gamma t}\left(\cos \omega t + \frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t\right)\right]$.

22. A l'instant $t = 0$ on branche sur une source de tension sinusoïdale $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \delta)$ un circuit composé d'une résistance R et d'une inductance L montées en série. Calculer l'intensité $\mathcal{J}$ du courant traversant ce circuit en fonction du temps. Dans quelles conditions des oscillations sinusoïdales s'établissent dans le circuit aussitôt après application de la tension?

Réponse.

$$\mathcal{J} = \frac{\mathcal{E}_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\left[R \cos(\omega t + \delta) + \omega L \sin(\omega t + \delta) - e^{-Rt/L}(R \cos \delta + \omega L \sin \delta)\right].$$

La condition demandée est $\operatorname{tg} \delta = -R/(\omega L)$.

23. On insère une lampe d'éclairage et un condensateur dans un circuit à courant alternatif de tension $\mathcal{E} = 440$ V et de fréquence $\nu = 50$ Hz. Quelle est

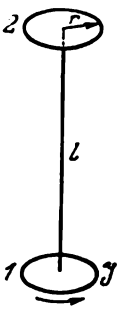


Fig. 330

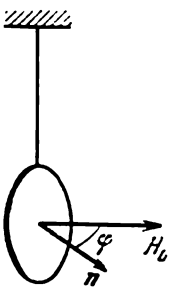


Fig. 331

la capacité du condensateur C si les paramètres nominaux de la lampe d'éclairage sont 220 V et 1 A? Quel est le déphasage entre le courant et la tension totale au circuit?

Réponse. $C = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi\nu R} = 8{,}4$ μF. Le courant est en avance de 60° sur la tension.

24. On insère une lampe d'éclairage et une bobine d'inductance montées en série dans un circuit à courant alternatif de tension $\mathcal{E}_{eff} = 440$ V et de fréquence $\nu = 50$ Hz. La lampe d'éclairage fonctionne normalement sous une tension de 110 V avec une intensité de courant de 1 A. Lorsqu'on remplaça cette lampe par une autre fonctionnant sous 220 V et 0,8 A, cette dernière assurait elle aussi un éclairage normal. Calculer la résistance R et l'inductance L de la bobine.

Réponse. $R = \frac{3}{2}\frac{R_2^2 - 5R_1^2}{R_2 - R_1} = 137$ ohms,

$L = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{16R_1^2 - (R_1 + R_2)^2} = 1{,}16$ H, où $R_1 = 110$ ohms et $R_2 = 275$ ohms sont les résistances de la première et de la seconde lampe.

25. Deux anneaux identiques en fil, de rayon r sont disposés comme indiqué sur la figure 330. La distance l entre les centres des anneaux est grande devant r. L'anneau 1 est constamment parcouru par un courant alternatif $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \cos \omega t$. Calculer le module et la direction de la force d'interaction moyenne $\overline{F}$ s'exerçant entre les anneaux. Chaque anneau a une inductance L et une résistance ohmique R. Considérer deux cas limites: 1) $\omega L \gg R$; 2) $\omega L \ll R$.

Réponse. $\overline{F} = \frac{6\pi^4\omega^2 L r^8 \mathcal{J}_0^2}{R^2+\omega^2L^2}\frac{1}{l^7}$. La force $\overline{F}$ est une force de répulsion. Si $\omega L \gg R$ on a

$$\overline{F} = \frac{6\pi^4 r^8 \mathcal{J}_0^2}{L}\frac{1}{l^7}.$$

Dans l'autre cas limite où $\omega L \ll R$

$$\overline{F} = \frac{6\pi^4\omega^2 L r^8 \mathcal{J}_0^2}{R^2}\frac{1}{l^7}.$$

26. Un anneau en fil métallique d'aire S, de résistance ohmique R et d'inductance L est suspendu à un fil dans un champ magnétique uniforme horizontal $H = H_0 \cos \omega t$; il y est maintenu dans une position telle que l'angle entre le vecteur H_0 et la normale n au plan de l'anneau est égal à φ (fig. 331). Calculer le moment moyen des forces $\overline{M}$ appliqué à l'anneau par le champ magnétique. Déterminer les positions d'équilibre de l'anneau et discuter leur stabilité. Considérer deux cas limites: 1) $\omega L \gg R$; 2) $\omega L \ll R$. Dans quel cas, à L égal, le moment de rotation est le plus petit?

Réponse. $\overline{M} = \frac{\omega^2 S^2 L H_0 \cos\varphi}{2(R^2+\omega^2L^2)}[H_0 n]$. Il existe deux positions d'équilibre: a) le plan de l'anneau est normal au champ magnétique (équilibre instable); b) le plan de l'anneau est parallèle au champ magnétique (équilibre stable).

Si $\omega L \gg R$

$$\overline{M} \equiv \overline{M}_1 = \frac{H_0^2 S^2}{2L}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Si $\omega L \ll R$

$$\overline{M} \equiv \overline{M}_2 = \frac{\omega^2 H_0^2 S^2 L}{2R^2}\sin\varphi\cos\varphi = \overline{M}_1\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2.$$

Le moment de rotation est plus petit dans le second cas.

§ 133. Oscillations auto-excitées. Générateurs à tubes électroniques

1. *On appelle oscillations auto-excitées les oscillations forcées non amorties s'établissant dans des systèmes réels dont la période et l'amplitude ne dépendent pas d'actions extérieures, mais sont déterminées par les propriétés du système auto-oscillant lui-même.* Ces oscillations sont entretenues par l'énergie fournie par une source extérieure, la quantité d'énergie fournie étant réglée par le système oscillant. A la différence des oscillations propres non amorties d'un oscillateur harmonique et des systèmes analogues dont les amplitudes dépendent des conditions initiales, *l'amplitude des oscillations auto-excitées n'en dépend pas.* Les oscillations propres non amorties sont une idéalisation qui ne se réalise jamais pleinement; les oscillations propres réelles sont toujours amorties. *Les oscillations auto-excitées des systèmes réels peuvent exister indéfiniment jusqu'à ce que l'énergie de la source qui entretient les oscillations soit épuisée.*

On peut citer de nombreux exemples de systèmes oscillants auto-excités — les horloges, les instruments de musique à vent et à archet, etc. Dans les montres les oscillations sont excitées et entretenues par la force d'un ressort tendu ou celle d'un poids, dans les instruments de musique à vent elles le sont par un flux d'air, dans le cas du violon, elles le sont par les forces de frottement résultant du mouvement régulier de l'archet, etc. Les sons émis par les fils télégraphiques sous l'action du vent, par les descentes pluviales, par les cordes vocales sont autant d'exemples d'oscillations auto-excitées dues à des forces non périodiques.

Les auto-oscillations peuvent également être excitées et entretenues par des forces périodiques. La période de ces forces n'a cependant aucun rapport avec la période des auto-oscillations qu'elles

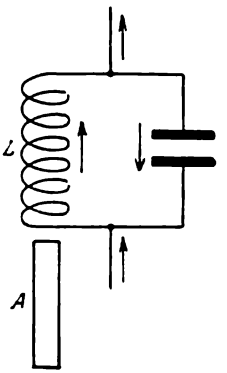


Fig. 332

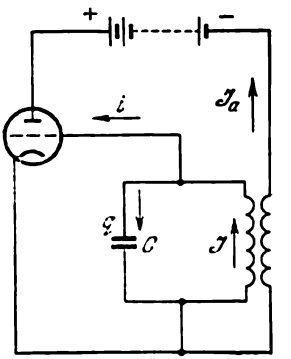


Fig. 333

excitent. Cette proposition est illustrée par une expérience de démonstration réalisée par M. Maklakov, assistant à l'Institut de Physique technique de Moscou. On dispose verticalement une bobine d'inductance L d'un circuit oscillant au-dessus d'une table (fig. 332). Un tube en fer A reposant sur la table pénètre d'en bas dans la bobine. Le tube comporte une fente verticale destinée à réduire les courants de Foucault. Les paramètres du circuit oscillant doivent être tels que la fréquence propre de celui-ci corresponde à celle du réseau urbain (50 Hz). Peu après le branchement sur le réseau, les courants entrent en résonance et le tube de fer est attiré dans la bobine. Mais comme cela fait croître l'inductance de la bobine, le circuit oscillant ne vérifie plus les conditions de la résonance et l'amplitude du courant parcourant la bobine diminue. Le tube de fer sort de la bobine sous l'action de son poids et retourne à sa position initiale sur la table. Aussitôt l'amplitude du courant circulant dans la bobine commence à croître, le circuit oscillant entre à nouveau en résonance et le tube est attiré dans la bobine, etc. Le tube en fer

exécute ainsi des oscillations auto-excitées, i.e. exécute des mouvements périodiques de montée et de descente et à chaque fois il frappe un coup sur la table. La période de ces oscillations mécaniques auto-excitées est des dizaines de fois plus grande que la période du courant alternatif qui les entretient. L'appareil a été appelé *marteau de Maklakov*. On peut aussi brancher en série la bobine et le condensateur.

La théorie rigoureuse des oscillations auto-excitées est fort compliquée car ces oscillations n'étant pas linéaires, sont décrites par des équations non linéaires. Comme *le principe de superposition ne s'applique pas à ces cas*, la solution de ces équations est ardue.

2. Le système auto-oscillant le plus important est le *générateur à tube électronique* qui est largement utilisé en radiotechnique. La figure 333 représente un schéma de montage simple de ce type de générateur. Le circuit oscillant est intercalé dans le circuit de grille de la triode. Une bobine intercalée dans le circuit d'anode est couplée par inductance à la bobine du circuit oscillant. Cette bobine du circuit anodique est appelée *bobine de réaction* et c'est elle qui constitue la base du générateur à lampe. Grâce à cette bobine de réaction le courant circulant dans le circuit oscillant peut agir par induction sur le courant du circuit anodique et celui-ci peut agir sur le premier courant. Dans les générateurs utilisés en pratique on utilise des *tubes multigrilles*, néanmoins pour expliquer le principe de leur fonctionnement nous considérerons le cas simple d'un tube *triode*.

Dans les conditions réelles le circuit oscillant est toujours le siège d'oscillations résultant d'influences extérieures ou de fluctuations thermiques. Notons $\mathcal{J}$ le courant parcourant le circuit oscillant et $\mathcal{J}_a$ le courant dans le circuit anodique. Une partie i du courant circulant dans le circuit oscillant est dirigée vers la grille. Le courant i est petit et nous le négligerons pour la raison suivante. La capacité du condensateur C étant très grande devant la capacité entre le filament et la grille de la triode, la réactance capacitive du condensateur est beaucoup plus petite que la résistance du tube monté en parallèle au condensateur. Dans ces conditions la majeure partie du courant passe par le condensateur. Le courant de grille i, quoique petit, joue un rôle très important puisqu'il modifie la charge et le potentiel de la grille. On peut représenter le courant anodique $\mathcal{J}_a$ en fonction des tensions de grille V_g et d'anode V_a. Comme la grille se trouve beaucoup plus près de la cathode que de l'anode, les variations de son potentiel affectent l'intensité du courant anodique plus fortement que ne le ferait une variation égale du potentiel de l'anode. On peut donc négliger les variations de $\mathcal{J}_a$ dues aux variations du potentiel de l'anode. Dans cette approximation

$$\frac{d\mathcal{J}_a}{dt}=\left(\frac{d\mathcal{J}_a}{dV_g}\right)_{V_a}\frac{dV_g}{dt}=S\,\frac{dV_g}{dt},$$

où S est la pente de la caractéristique de la grille. Lorsque le courant anodique varie, une force électromotrice est induite dans le circuit oscillant :

$$\mathscr{E}^{\text{ind}} = -M\frac{d\mathcal{J}_a}{dt} = -MS\frac{dV_g}{dt}, \tag{133.1}$$

où M est le coefficient d'inductance mutuelle entre la bobine du circuit oscillant et la bobine de réaction. La tension de grille est égale à la tension aux bornes du condensateur, i.e. $V_g = q/C$, où q est la charge de l'armature supérieure du condensateur (dans le cas d'une circulation positive dans le circuit le condensateur est traversé de haut en bas). Ainsi $dV_g/dt = \dot{q}/C = \mathcal{J}/C$ et par suite

$$\mathscr{E}^{\text{ind}} = -\frac{MS}{C}\mathcal{J}. \tag{133.2}$$

Lorsque $M < 0$ $\mathscr{E}^{\text{ind}}$ *et* $\mathcal{J}$ *sont de même signe* et si le circuit ne comporte aucune résistance, les oscillations dans le circuit ne cesseront de croître — il se produit une *auto-excitation des oscillations. Dans le cas où* $M > 0$ *les oscillations dans le circuit sont supprimées par la force électromotrice* $\mathscr{E}^{\text{ind}}$. On peut inverser le signe de M en permutant les fils de connexion de la bobine de réaction ou en la faisant tourner de 180° et réaliser ainsi les deux cas.

Pour définir de façon plus précise les conditions d'auto-excitation du circuit oscillant on doit tenir compte de sa résistance ohmique R. En présence d'une force électromotrice $\mathscr{E}^{\text{ind}}$ l'équation des oscillations excitées dans le circuit oscillant s'écrit

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = -\frac{MS}{C}\dot{q},$$

où L désigne l'inductance du circuit oscillant. En divisant par L et en utilisant les notations

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad 2\delta = \frac{R}{L} + \frac{MS}{LC}, \tag{133.3}$$

on obtient

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{133.4}$$

Si nous supposons que la triode fonctionne sur la partie rectiligne de sa caractéristique, on peut admettre que les grandeurs S et δ sont constantes. Dans ce cas l'équation (133.4) décrit formellement les oscillations libres du circuit oscillant :

$$q = q_0 e^{-\delta t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t), \tag{133.5}$$

où A et B sont des constantes et $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$. Ces oscillations peuvent aussi bien être amorties ($\delta > 0$) que croissantes ($\delta < 0$). La condition de croissance des oscillations $\delta < 0$ peut s'exprimer par

$$M < -CR/S. \tag{133.6}$$

C'est la *condition d'auto-excitation des oscillations qui exige que* $M < 0$; nous avons déjà obtenu cette condition pour le cas où $R = 0$.

3. La théorie ci-dessus est « linéaire » en ce sens qu'elle se fonde sur des équations différentielles linéaires. Mais *elle n'est pas complète et ne décrit correctement que le stade initial du processus* lorsque les oscillations sont petites et que la pente S de la caractéristique de la triode peut être considérée comme constante. La théorie linéaire définit correctement la condition d'auto-excitation des oscillations (133.6), mais ne peut être appliquée à l'étude de l'évolution ultérieure du processus lorsque l'amplitude des oscillations devient

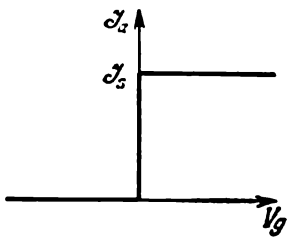


Fig. 334

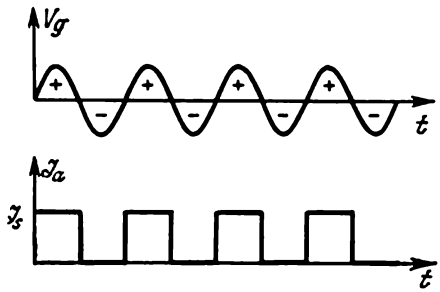


Fig. 335

grande. Cette théorie ne permet pas de prédire quelles seront les oscillations en régime établi. D'après la théorie linéaire, si $\delta < 0$ l'amplitude des oscillations doit croître indéfiniment, si $\delta = 0$ on aurait affaire à des oscillations non amorties dont l'amplitude et la phase *dépendraient uniquement des conditions initiales.* Ces conclusions sont en désaccord avec l'expérience. La raison en est que dans le cas d'oscillations de grande amplitude la pente S de la caractéristique ne peut plus être considérée comme constante et les équations *cessent d'être linéaires. La théorie générale des oscillations auto-excitées et notamment la théorie du générateur à lampes doivent se fonder sur des équations non linéaires susceptibles de décrire toutes les étapes du processus.*

Ecrivons l'équation des oscillations dans un circuit oscillant sous la forme

$$L\dot{\mathcal{J}} + R\mathcal{J} + \frac{q}{C} = -M\frac{d\mathcal{J}_a}{dt}. \qquad (133.7)$$

Supposons pour simplifier que le courant anodique $\mathcal{J}_a$ ne dépende que du signe de la tension de grille V_g. Lorsque $V_g > 0$ la triode est traversée par *le plus grand courant possible* égal au *courant de saturation* $\mathcal{J}_s$. Lorsque $V_g < 0$ le courant anodique $\mathcal{J}_a$ est nul. La caractéristique de grille idéalisée est représentée sur la figure 334 par la ligne brisée grasse (à comparer avec la figure 247). Dans ce

cas l'équation (133.7) devient non linéaire. Cette simplification ne permet pas de faire des calculs exacts, mais permet de dégager *qualitativement* les principales propriétés des oscillations auto-excitées. La figure 335 représente en haut la courbe de variation de la tension de grille V_g et en bas la courbe échelonnée $\mathcal{J}_a(t)$ pour le courant anodique $\mathcal{J}_a$. La dérivée $\dot{\mathcal{J}}_a$ est partout nulle à l'exception de certains points où $\mathcal{J}_a$ varie par saut. Formellement en ces points, la dérivée $\dot{\mathcal{J}}_a$ est infinie, mais en réalité la fonction $\mathcal{J}_a(t)$ est partout continue et dérivable. Les points de discontinuité doivent être remplacés par de petits intervalles de temps τ pendant lesquels le courant anodique varie brusquement d'une quantité $\Delta\mathcal{J}_a = \pm \mathcal{J}_s$ et la dérivée $\dot{\mathcal{J}}_a$ est très grande en valeur absolue. Ces variations du courant anodique déterminent des sauts $\Delta\mathcal{J}$ du courant dans le circuit oscillant. Pour calculer $\Delta\mathcal{J}$ il suffit d'intégrer (133.7) sur un de ces intervalles de temps τ. Comme les valeurs de $\mathcal{J}$ et de q restent finies, lors de cette intégration elles n'apportent à la limite aucune contribution et on trouve

$$L\Delta\mathcal{J} = -M\Delta\mathcal{J}_a. \tag{133.8}$$

Les sauts de courant $\Delta\mathcal{J}$ sont analogues aux poussées de courte durée agissant sur un système oscillant. Si $M < 0$, ces poussées renforcent les oscillations et si $M > 0$, elles les affaiblissent. Entre deux poussées consécutives le système exécute des oscillations libres amorties. Posons que $M < 0$ et supposons qu'avant une poussée donnée l'amplitude des oscillations de courant dans le circuit oscillant est égale à $\mathcal{J}_0$. A la suite d'une poussée elle prend un accroissement $|\Delta\mathcal{J}| = |M\Delta\mathcal{J}_a/L| = |M\mathcal{J}_s/L|$ et devient égale à $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_0 + |M\mathcal{J}_s/L|$. Juste avant la poussée suivante l'amplitude des oscillations est égale à

$$\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1 e^{-\gamma T/2} = \left(\mathcal{J}_0 + \left|\frac{M\mathcal{J}_s}{L}\right|\right) e^{-\gamma T/2},$$

où $\gamma = R/(2L)$ et T est la période des oscillations. Si $\mathcal{J}_2 > \mathcal{J}_0$ l'amplitude des oscillations est croissante. L'amplitude des oscillations prendra une valeur permanente lorsque $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_0$. Cette valeur permanente est

$$\mathcal{J}_0 = \frac{|M\mathcal{J}_s/L|}{e^{\gamma T/2} - 1}. \tag{133.9}$$

La figure 336 illustre l'allure des oscillations en régime permanent (des oscillations auto-excitées). Du fait de l'existence de sauts et de l'amortissement les oscillations *ne sont pas harmoniques*. Supposons cependant que le facteur de surtension Q du circuit oscillant est très grand, i.e. $\gamma T \ll 1$. Dans ces conditions les sauts du courant $\mathcal{J}$ deviennent presque imperceptibles et les oscillations auto-excitées

pratiquement harmoniques d'amplitude

$$\mathcal{J}_0 = \frac{2|M\mathcal{J}_s/L|}{\gamma T} = \frac{2Q}{\pi}\left|\frac{M}{L}\mathcal{J}_s\right|. \qquad (133.10)$$

Il est évident que dans les générateurs à lampes réels dont les caractéristiques sont des courbes monotones, il ne se produit pas de sauts brusques, de sorte que les *oscillations sont continues quoique imparfaitement sinusoïdales.*

4. Pour la génération et l'amplification d'oscillations sinusoïdales et non sinusoïdales on utilise actuellement, à côté des tubes électroniques, des *dispositifs à semiconducteurs* qui présentent certains avantages indiscutables. Les dispositifs à semiconducteurs n'ayant pas de cathode incandescente consomment moins d'énergie que les

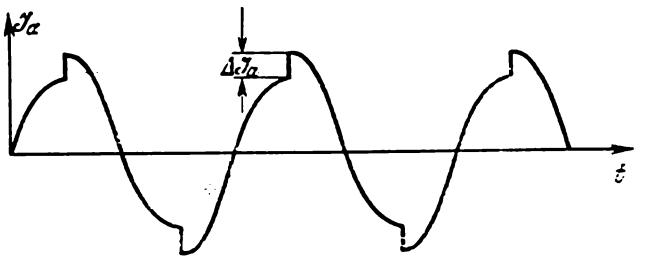


Fig. 336

tubes et n'ont pas d'enceinte évacuée où le vide peut se détériorer en cours d'exploitation. Ils sont donc plus fiables et ont une plus longue durée d'exploitation que les tubes électroniques. Grâce à leurs petites dimensions ils sont irremplaçables dans de nombreux montages radioélectriques, les calculatrices électroniques par exemple. Les dispositifs à semiconducteurs ne sont pas sans inconvénients (variation des propriétés des semiconducteurs avec la température, complication des circuits due à leurs faibles impédances d'entrée, bruits résultant de variations fortuites des voies empruntées par les courants à l'intérieur des résistances). C'est pour cela que chaque fois que les dimensions et le poids ne jouent pas un rôle déterminant, on donne la préférence aux tubes électroniques à vide et à gaz. Sans nous arrêter à ces questions de radiotechnique, quelques remarques s'imposent.

Pour amplifier et générer des oscillations électriques on utilise des dispositifs à semiconducteurs comportant non pas deux électrodes (comme pour le redressement) mais *trois ou plusieurs électrodes.* Examinons la *triode semiconductance* (*transistor*) qui comporte trois électrodes. La triode est constituée par une plaquette monocristalline de germanium ou de silicium qui par dopage par des impuretés de types donneur et accepteur comporte deux zones de conductibilité

déterminée séparées par une zone de conductibilité contraire. On distingue les transistors $n - p - n$ (fig. 337, *a*) où les zones extrêmes sont de type n et la zone intermédiaire (appelée *base*) est de type p et les transistors $p - n - p$ où la base est de type n, les *zones extrêmes* étant de type p (fig. 337, *b*). Le cristal comporte trois contacts métalliques à l'aide desquels on connecte le transistor.

Le champ de contact $\boldsymbol{E}_c$ qui s'établit dans les deux jonctions est dirigé *du semiconducteur de type n vers le semiconducteur de type p* (cf. § 108). Le sens du champ $\boldsymbol{E}_c$ correspond à la *polarisation dans le sens direct* et le sens opposé correspond à la *polarisation dans le sens*

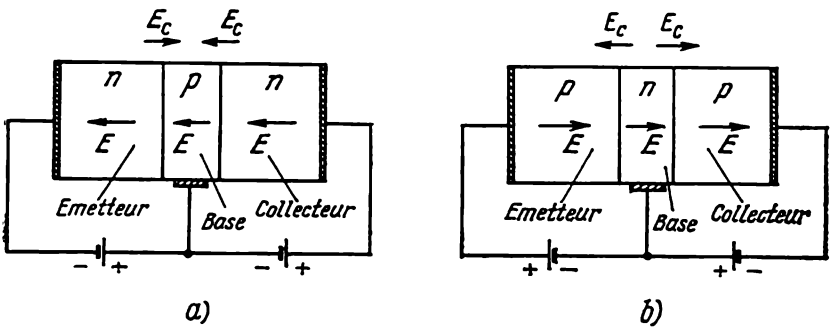


Fig. 337

inverse. Réalisons le montage de la figure 337, *a*. La partie du dispositif qui est polarisée dans le sens direct est l'*émetteur* et celle qui est polarisée dans le sens inverse est le *collecteur*. L'épaisseur de la zone intermédiaire, la base, est toujours petite et ne doit pas dépasser quelques μm (jusqu'à 2-3 dizaines de μm). Le courant électrique dans l'émetteur (fig. 337, *a*) est dû pour l'essentiel à un déplacement d'*électrons*, qui sont ici les *porteurs de charges majoritaires*. Ces électrons traversent la jonction $n - p$ de gauche et pénètrent dans la base ; sous l'action du champ électrique $\boldsymbol{E}$ les électrons se déplacent à travers la base vers le collecteur. L'épaisseur de la base doit être suffisamment petite pour que la majorité des électrons parviennent jusqu'au collecteur. Après avoir traversé la jonction $p - n$ de droite les électrons se trouvent dans le collecteur où ils sont les *porteurs de charges majoritaires* ; de ce fait ils sont à même de modifier le courant passant dans le collecteur. Les mêmes raisonnements s'appliquent à la figure 337, *b*, à cela près que le rôle des électrons y est assumé par les trous. Ainsi toute variation de courant dans le circuit de l'émetteur donne lieu à une variation du courant circulant dans le circuit du collecteur. Le transistor se comporte de ce point de vue comme une triode à vide, l'émetteur faisant fonction de cathode, le collecteur d'anode et la base de grille.

§ 134. Oscillations de relaxation

La figure 338, *a* représente la caractéristique courant-tension d'une lampe au néon (cf. § 117). *Cette caractéristique n'est pas linéaire.* Lorsqu'on augmente la tension V appliquée à la lampe elle s'allume pour une valeur $V = V_2$ en produisant une lumière rouge. Si on augmente encore la tension appliquée, le courant traversant la lampe croît le long de la courbe AB. Si on diminue maintenant la tension dans l'ordre inverse, la lampe s'éteint à une autre tension $V_1 < V_2$. Les valeurs V_2 et V_1 sont appelées *potentiels d'amorçage* et *d'extinction* de la lampe.

Branchons la lampe au néon dans le circuit représenté sur la figure 338, *b*. La résistance R doit être très grande et la force électromotrice $\mathscr{E}$ de la batterie

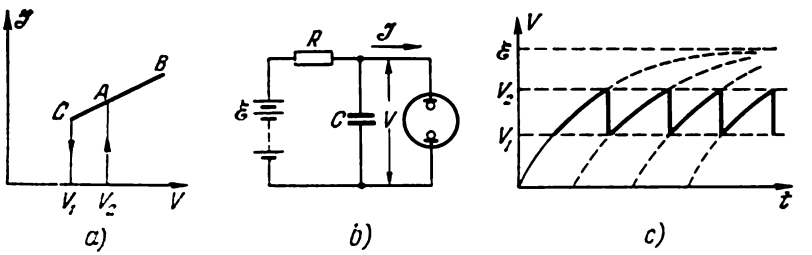


Fig. 338

doit être supérieure à V_2. Lorsqu'on ferme le circuit le condensateur C commence à se charger. La tension aux bornes du condensateur C (égale à la tension V appliquée à la lampe au néon) croît selon la loi

$$V = \mathscr{E}\,(1 - e^{-t/\tau}),$$

où $\tau = RC$ (cf. § 48). Lorsque cette tension atteint la valeur V_2, la lampe s'allumera et sera traversée par un courant. Comme sa résistance devient alors pratiquement nulle, le condensateur se déchargera presque instantanément à travers la lampe. Mais lorsque la tension aux bornes du condensateur tombe jusqu'à la valeur V_1 la lampe s'éteint et ne laisse plus passer le courant. A partir de cet instant le condensateur recommencera à se charger jusqu'à ce que le potentiel V atteigne la valeur V_2. La lampe s'allume à nouveau et le condensateur recommencera à se décharger. Ce processus est périodique de période

$$T = \tau \ln \frac{\mathscr{E} - V_1}{\mathscr{E} - V_2}.$$

La variation de la tension V avec le temps est représentée sur la figure 338, *c* en trait fort (en dents de scie). Si la période T des oscillations est égale ou supérieure à 1 seconde environ, on discernera de brefs éclats de lumière séparés par des pauses prolongées. Si on diminue R ou C on diminuera la période T et l'œil ne discernera plus les éclats lumineux successifs. Dans le cas considéré les oscillations auto-excitées apparaissent parce qu'il y a un *temps de relaxation* (*mise au repos*) du circuit $\tau = RC$. C'est pour cela que ces oscillations sont appelées *oscillations de relaxation*.

Les dents de la courbe en dents de scie représentée sur la figure 338, *c* ne sont pas rectilignes. Or, pour de nombreuses applications, notamment dans les oscillographes cathodiques, il est nécessaire d'avoir des variations de tension en *dents de scie rectilignes*, ce qui signifie que sur chaque dent la variation de la

tension en fonction du temps doit être linéaire. On y arrive en intercalant dans le circuit, en plus de la lampe au néon, un *second élément non linéaire*, une triode ou mieux une pentode (fig. 339, *a*). Le tube est alors traversé par un courant anodique $\mathcal{J}_a = \dot{q}$, pratiquement indépendant de la tension anodique. De ce fait pendant la charge du condensateur sa charge doit varier en fonction du

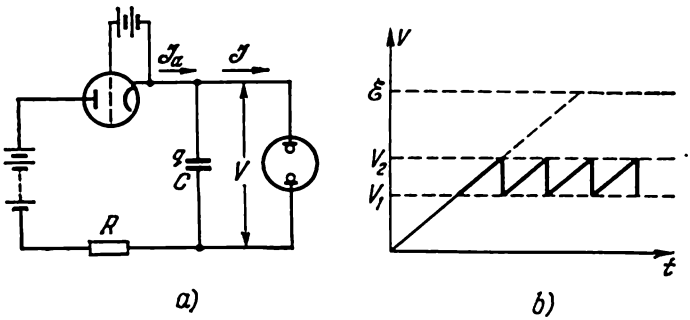


Fig. 339

temps suivant une loi linéaire: $q = \mathcal{J}_a t + \text{const}$. La tension V aux bornes du condensateur C variera aussi suivant une loi linéaire (cette tension est égale à la tension appliquée à la lampe au néon). On obtient ainsi des dents de scie rectilignes (fig. 339, *b*).

§ 135. Excitation paramétrique des oscillations

1. Supposons qu'à l'aide d'un mécanisme adéquat (un moteur électrique par exemple) on fasse varier périodiquement l'inductance L ou la capacité C (ou les deux) d'un circuit oscillant. Les oscillations libres de ce système vérifient l'équation (cf. § 122)

$$\frac{d\Phi}{dt} + R\mathcal{J} + \frac{q}{C} = 0, \tag{135.1}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(L\frac{dq}{dt}\right) + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \tag{135.2}$$

Si $R = \text{const}$ c'est une *équation différentielle linéaire à coefficients périodiques*; si R est fonction du courant $\mathcal{J}$ cette équation devient non linéaire. Une équation analogue décrit le mouvement du système mécanique connu sous le nom de *balançoire*. La personne se trouvant sur la balançoire modifie périodiquement les paramètres du système en élevant et en abaissant successivement le centre de masse de son corps. Dans certaines conditions tous les systèmes de ce type deviennent *instables*. un écart fortuit à l'état d'équilibre provoque l'apparition et le renforcement des oscillations. Comme cet effet est déterminé par les variations des paramètres du système, on dit qu'il s'agit d'une *excitation paramétrique des oscillations* et les oscillations résultantes sont dites *paramétriques*.

Pour trouver les conditions d'excitation des oscillations paramétriques il faut étudier les solutions des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. La résolution de ces équations constitue souvent un problème mathématique ardu et généralement on n'arrive pas à trouver une solution de forme analytique. D'ailleurs les équations linéaires ne permettent de déterminer que les *conditions d'excitation des oscillations*; la question de l'*établissement de leur amplitude permanente* ne peut être tranchée car aux grandes amplitudes les équations différentielles deviennent *essentiellement non linéaires*. Nous n'examinerons ici que l'excitation des oscillations paramétriques dans le cas simple où les paramètres du système varient *par saut* et restent constants pendant les intervalles entre les sauts. On peut, par exemple, à des intervalles de temps réguliers rapprocher et écarter très rapidement les armatures d'un condensateur plan, ou bien allonger et comprimer une hélice en fil jouant le rôle de bobine d'auto-inductance d'un circuit oscillant; on réalisera ainsi des variations par saut des grandeurs C et L. Lorsqu'on dit très rapidement ou par saut on entend par là que la charge q du condensateur ne varie pratiquement pas pendant la durée Δt de variation des paramètres. Il en résulte que pendant le même intervalle de temps Δt le flux magnétique Φ embrassé par la bobine d'auto-inductance restera lui aussi constant. En effet, en intégrant par parties l'équation (135.1) sur le temps Δt on obtient

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{d\Phi}{dt}\,dt + \int_t^{t+\Delta t} R\mathcal{J}\,dt + \int_t^{t+\Delta t} \frac{q}{C}\,dt = 0,$$

et si la résistance R est constante

$$\Delta\Phi + R\Delta q + \int \frac{q}{C}\,dt = 0.$$

Comme par hypothèse la variation Δq de la charge pendant le temps Δt est négligeable, et la charge q reste finie, il résulte de la dernière relation ci-dessus que $\Delta\Phi = \text{const}$ si on fait tendre Δt vers zéro. Ce résultat reste valable si R dépend de l'intensité de courant.

2. Après ces quelques remarques, considérons un circuit oscillant et commençons à modifier par saut, à intervalles réguliers, l'inductance L du circuit, la capacité C restant invariable. L'inductance prendra ainsi deux valeurs; nous noterons L_1 la plus grande et L_2 la plus petite de ces valeurs. Les valeurs correspondantes de la fréquence propre du circuit oscillant seront notées $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1C}$ et $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2C}$. Les périodes des oscillations propres sont T_1 et T_2. Nous poserons pour simplifier que la résistance ohmique du circuit est nulle. Le circuit est toujours parcouru par des courants excités

par des actions extérieures fortuites ou résultant de fluctuations thermiques. Posons qu'au début $L = L_1$. A l'instant où le courant circulant dans la bobine a sa valeur maximale $\mathcal{J}_{10}$ et la charge du condensateur est égale à zéro, diminuons par saut l'inductance de la valeur L_1 à la valeur L_2. Comme le flux magnétique reste constant, le courant augmente jusqu'à la valeur $\mathcal{J}_{20} = \frac{L_1}{L_2}\mathcal{J}_{10}$. A partir de cet instant commencent les oscillations libres du courant $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{20} \cos \omega_2 t$. Après un temps $t = T_2/4$, le courant $\mathcal{J}$ devient nul et à cet instant augmentons par saut l'inductance L jusqu'à sa valeur initiale L_1. Puisqu'aucun courant ne circule dans la bobine pendant cette brusque variation d'inductance, l'amplitude des oscillations reste la même, mais leur fréquence doit varier. Les oscillations de courant vérifient l'équation $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{20} \sin \omega_1 t$. (Convenons de repérer chaque fois le temps t à partir du dernier saut d'inductance.) A l'instant $t = T_1/4$, lorsque le courant atteint sa valeur maximale $\mathcal{J}_{10}$ réduisons de nouveau l'inductance de L_1 jusqu'à L_2. De ce fait l'amplitude des oscillations prend la valeur $\mathcal{J}_{30} = (L_1/L_2)\,\mathcal{J}_{20} = (L_1/L_2)^2\,\mathcal{J}_{10}$. Nous continuerons à modifier ainsi l'inductance en diminuant L chaque fois que le courant atteint sa valeur maximale et en l'augmentant lorsque le courant passe par la valeur zéro. L'amplitude des oscillations augmentera alors indéfiniment suivant la progression géométrique

$$A_0 = A_{10}\left[1 + \frac{L_1}{L_2} + \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 + \ldots\right],$$

quoique le système ne contienne aucune source de courant ou de tension. Une telle excitation des oscillations est appelée *résonance paramétrique*. Ce type de résonance apparaît lorsque les paramètres du système varient avec une fréquence *double* de la fréquence propre du système. Il est facile de voir qu'une résonance paramétrique se manifeste aussi si on diminue la fréquence de variation des paramètres de 2, 3, . . . fois. Mais dans ce dernier cas la résonance sera moins aiguë.

On observerait un phénomène analogue si on faisait varier par saut et avec la même période la *capacité du condensateur*. Lors des variations de la capacité la *charge q du condensateur* reste constante et c'est la tension V à ses bornes qui varie : $V = q/C$. A l'instant où la charge prend sa valeur maximale on doit diminuer C pour augmenter la tension V. A l'instant où q passe par zéro, on doit redonner à C sa valeur initiale. Ainsi les oscillations de la tension V se renforcent à chaque variation de la capacité C et leur amplitude croît suivant une progression géométrique.

3. Ces résultats s'interprètent aisément en se plaçant au point de vue de l'*énergétique* du processus. L'énergie du condensateur est

$W_e = q^2/(2C)$ et celle de la bobine d'auto-inductance est $W_m = \Phi^2/(2L)$. Pour exciter des oscillations paramétriques on doit diminuer C à l'instant où la charge du condensateur atteint sa valeur maximale et diminuer L lorsque l'intensité du courant parcourant le circuit est maximale. Lors de ces variations l'énergie électrique augmente de $\Delta W_e = q^2\Delta\left(\frac{1}{2C}\right)$ et l'énergie magnétique augmente de $\Delta W_m = \Phi^2\Delta\left(\frac{1}{2L}\right)$. On doit faire reprendre à C et L leurs valeurs initiales aux instants où q et L s'annulent, puisqu'alors les énergies électrique et magnétique restent constantes. Cela signifie qu'on injectera périodiquement de l'énergie dans le système oscillant avec une intensification d'oscillations. Pour bien saisir que l'énergie électrique du condensateur augmente lorsqu'on diminue sa capacité il suffit de considérer un condensateur plan. Des forces d'attraction coulombiennes s'exercent entre ses armatures; lorsqu'on les écarte l'une de l'autre, la capacité du condensateur diminue et on fournit du travail à l'encontre de ces forces. C'est ce travail qui fait croître l'énergie du condensateur. Un effet analogue se manifeste dans le cas d'une hélice en fil électrique parcourue par un courant. Lorsqu'on l'allonge on diminue son inductance L et on fournit simultanément du travail contre les forces d'Ampère s'exerçant entre ses spires. On produit ainsi un travail extérieur positif qui sert à augmenter l'énergie magnétique du courant.

Les mêmes considérations s'appliquent à la mise en oscillations d'une balançoire. Pour le montrer considérons un pendule simple oscillant au bout d'un fil dont l'extrémité supérieure passe à travers un petit orifice d'un axe fixe. Raccourcissons le fil chaque fois que le pendule passe par sa position d'équilibre et allongeons-le d'autant chaque fois qu'il passe par les positions extrêmes. Dans le premier cas on fournit au pendule un travail positif, on lui fournit donc de l'énergie, et dans le second cas le travail extérieur étant négatif, on enlève au pendule une certaine quantité d'énergie. Le travail positif est plus grand en valeur absolue que le travail négatif puisque la tension du fil est maximale lorsque le pendule passe par la position médiane, et que cette tension doit non seulement équilibrer le poids du pendule, mais encore lui communiquer une accélération. Dans les positions extrêmes la tension du fil est minimale puisque dans ces positions elle ne doit équilibrer que la composante du poids dirigée suivant le fil de suspension. Par conséquent si les variations de longueur du fil sont égales, la force de tension produit un travail plus grand dans la position médiane que dans les positions extrêmes du pendule. Le pendule reçoit donc dans la position médiane plus d'énergie qu'il n'en restitue dans les positions extrêmes. C'est pour cette raison que les oscillations seront paramétriquement intensifiées. Une personne qui se balance sur une balançoire se comporte comme un pendule:

elle se ramasse dans les positions extrêmes et se détend en passant par la position médiane.

4. L'existence d'une résistance ohmique dans un circuit oscillant ne crée aucune difficulté tant qu'elle reste constante. Il suffit alors de remarquer qu'entre les instants de variation des paramètres les oscillations libres sont maintenant amorties. Si les pertes d'énergie déterminées par l'amortissement sont inférieures à l'énergie qui est communiquée au système pendant le même intervalle de temps, les oscillations seront intensifiées et leur amplitude augmentera suivant une progression géométrique. Si le système était toujours régi par une équation différentielle linéaire et si la condition énergétique ci-dessus était satisfaite, l'amplitude des oscillations devrait augmenter jusqu'au claquage du condensateur ou de l'isolation des fils de connexion. *La théorie fondée sur des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques ne permet pas d'expliquer l'existence d'oscillations paramétriques permanentes.* Pour obtenir des oscillations d'amplitude permanente on doit insérer dans le circuit des conducteurs à *caractéristique non linéaire*, par exemple une bobine à noyau de fer, des lampes à incandescence, etc. Les équations différentielles deviennent alors *non linéaires* et leur résolution permettrait de trouver aussi bien les conditions d'excitation d'oscillations permanentes que leurs amplitudes.

5. Toutes ces considérations sont confirmées par l'expérience. La figure 340 donne une vue d'ensemble de la *machine paramétrique à capacité de L. I. Mandelstam et N. D. Papalexi.* Le condensateur comporte deux systèmes d'armatures,

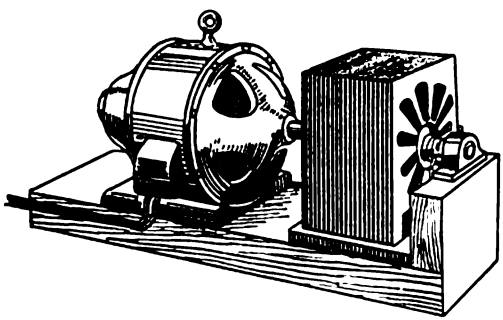


Fig. 340

l'un fixe (stator) et l'autre mobile (rotor). Le stator se compose de 26 plaques d'aluminium carrées comportant des encoches radiales disposées de façon symétrique; le rotor est constitué de 25 plaques rondes en aluminium avec des encoches identiques à celles des plaques du stator. A l'aide d'un moteur électrique le rotor peut être mis en rotation à une vitesse atteignant 4000 tours/mn. La capacité du condensateur variant périodiquement, on arrive à exciter ainsi des oscillations paramétriques du courant. Pour rendre le système non linéaire on insère en parallèle avec le condensateur la chaîne de six lampes au néon. Dans

ce cas la tension aux bornes du condensateur est stable et atteint 600 à 700 volts. Si on supprime les lampes au néon la tension ne s'établit pas et continue à croître jusqu'à 2000-3000 V et on voit alors des étincelles jaillir entre les armatures du

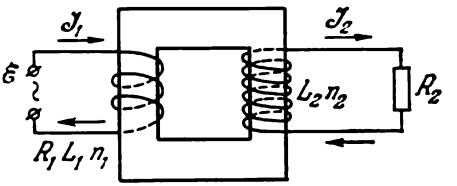


Fig. 341

condensateur. On peut réaliser une expérience analogue avec une machine à inductance où on ferait périodiquement varier l'inductance du circuit.

§ 136. Théorie du transformateur

1. Un transformateur est composé d'un circuit magnétique formé de tôles empilées portant deux enroulements: le *primaire* et le *secondaire* (fig. 341). L'équation des oscillations d'un tel système est

$$R_1\mathcal{J}_1=\mathcal{E}-\dot{\Phi}_1,\quad R_2\mathcal{J}_2=-\dot{\Phi}_2, \tag{136.1}$$

où l'indice 1 dénote les grandeurs se rapportant à l'enroulement primaire et l'indice 2 dénote les grandeurs relatives au secondaire. Pour simplifier nous négligerons les fuites du flux magnétique traversant le circuit magnétique du transformateur. Dans ce cas

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2}=\frac{n_1}{n_2}, \tag{136.2}$$

où n_1 et n_2 désignent les nombres de spires des enroulements primaire et secondaire. En écrivant cette relation sous la forme $n_1\Phi_2 = n_2\Phi_1$ et en différentiant cette expression par rapport au temps, on constate que les dérivées du flux magnétique vérifient une relation identique:

$$\frac{\dot{\Phi}_1}{\dot{\Phi}_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Cela permet d'éliminer les flux magnétiques entre les équations (136.1). On obtient alors

$$R_1\mathcal{J}_1-\frac{n_1}{n_2}R_2\mathcal{J}_2=\mathcal{E}. \tag{136.3}$$

Cette dernière équation montre que la présence du secondaire modifie le courant circulant dans le primaire. La seule équation (136.3) ne saurait suffire pour calculer deux grandeurs inconnues $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$. Pour établir une seconde équation supposons que le transformateur est *parfait*, i.e. que son circuit magnétique n'est pas ferromagnétique (ce qui n'est pas vrai dans le cas réel). Dans ce cas la relation entre les flux magnétiques et les courants devient linéaire:

$$\Phi_1 = L_1\mathcal{J}_1 + L_{12}\mathcal{J}_2,$$
$$\Phi_2 = L_{21}\mathcal{J}_1 + L_2\mathcal{J}_2,$$

où L_1 est l'inductance de l'enroulement primaire, L_2 celle du secondaire, et $L_{12} = L_{21}$ est le coefficient d'inductance mutuelle des deux enroulements. Compte tenu de (136.2) *quels que soient les courants* $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ la relation suivante est vérifiée:

$$n_2 (L_1 \mathcal{J}_1 + L_{12}\mathcal{J}_2) = n_1 (L_{21}\mathcal{J}_1 + L_2\mathcal{J}_2).$$

En identifiant les coefficients de $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{J}_2$ on trouve

$$n_1 L_{21} = n_2 L_1, \qquad n_2 L_{12} = n_1 L_2, \tag{136.4}$$

et par suite

$$L_{12} L_{21} = L_1 L_2. \tag{136.5}$$

Si on utilise encore le théorème de réciprocité ($L_{12} = L_{21}$) on obtient

$$L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}. \tag{136.6}$$

Le système d'équations (136.1) peut s'écrire maintenant

$$\begin{aligned} R_1 \mathcal{J}_1 &= \mathcal{E} - L_1 \dot{\mathcal{J}}_1 - \sqrt{L_1 L_2}\, \dot{\mathcal{J}}_2, \\ R_2 \mathcal{J}_2 &= -\sqrt{L_1 L_2}\, \dot{\mathcal{J}}_1 - L_2 \dot{\mathcal{J}}_2. \end{aligned} \tag{136.7}$$

Si nous supposons que la force électromotrice $\mathcal{E}$ varie dans le temps de façon sinusoïdale, i.e. $\mathcal{E} \sim e^{i\omega t}$, les équations des oscillations en régime permanent seront

$$\begin{aligned} (R_1 + i\omega L_1)\, \mathcal{J}_1 + i\omega \sqrt{L_1 L_2}\, \mathcal{J}_2 &= \mathcal{E}, \\ i\omega \sqrt{L_1 L_2}\, \mathcal{J}_1 + (R_2 + i\omega L_2)\, \mathcal{J}_2 &= 0. \end{aligned} \tag{136.8}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \frac{R_2 + i\omega L_2}{R_1 R_2 + i\omega (L_1 R_2 + L_2 R_1)}\, \mathcal{E}, \\ \mathcal{J}_2 &= \frac{-i\omega \sqrt{L_1 L_2}}{R_1 R_2 + i\omega (L_1 R_2 + L_2 R_1)}\, \mathcal{E}. \end{aligned} \tag{136.9}$$

Ces formules résolvent le problème du transformateur. Dans le cas pratiquement important où la résistance ohmique R_1 du circuit primaire est petite devant la réactance inductive ωL_1, on peut la négliger, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \frac{R_2 + i\omega L_2}{i\omega L_1 R_2}\, \mathcal{E}, \\ \mathcal{J}_2 &= -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\, \frac{\mathcal{E}}{R_2} = -\frac{n_2}{n_1}\, \frac{\mathcal{E}}{R_2}. \end{aligned} \tag{136.10}$$

Cette dernière relation tient compte de ce que l'inductance des enroulements est proportionnelle au carré du nombre de spires. Cette formule exprime bien le principe du transformateur. Si la résistance R_2 était branchée directement sur la source de f.é.m. $\mathcal{E}$, le courant aurait été égal à $\mathcal{E}/R_2$. En insérant le transformateur entre elles on obtient le courant n_2/n_1 fois plus grand ou n_1/n_2 fois plus petit. On exprime généralement ce résultat d'une façon différente. La quantité $V_2 = R_2 \mathcal{J}_2$ représente la chute de tension sur la résistance R_2. On l'appelle tension aux bornes du secondaire. On tire de la seconde formule (136.10)

$$V_2 = -\frac{n_2}{n_1}\, \mathcal{E}. \tag{136.11}$$

Le transformateur élève la tension de n_2/n_1 fois ou l'abaisse de n_1/n_2 fois. C'est ce qui détermine l'augmentation ou la diminution du courant passant dans la résistance R_2.

2. Pour calculer le courant $\mathcal{J}_1$ il est plus commode d'utiliser le diagramme vectoriel (diagramme de Fresnel). Nous ne considérerons que le cas où $R_1 = 0$. La première équation (136.8) s'écrit alors

$$L_1\mathcal{J}_1+\sqrt{L_1L_2}\,\mathcal{J}_2=\frac{\mathcal{E}}{i\omega}.$$

Si $R_2 = \infty$, on a $\mathcal{J}_2 = 0$. Le courant du primaire s'appelle alors *courant à vide du transformateur*. Notons-le $\mathcal{J}_0$. Dans le cas considéré ($R_1 = 0$) $\mathcal{J}_0 = \mathcal{E}/(i\omega L_1)$ et par suite $L_1\mathcal{J}_1 + \sqrt{L_1L_2}\,\mathcal{J}_2 = L_1\mathcal{J}_0$ ou

$$n_1\mathcal{J}_1 + n_2\mathcal{J}_2 = n_1\mathcal{J}_0. \tag{136.12}$$

Le courant à vide $\mathcal{J}_0 = -i\mathcal{E}/(\omega L_1)$ retarde de $\pi/2$ sur la tension. Si on représente sur un diagramme vectoriel la tension par un segment horizontal orienté vers la droite, le courant à vide $\mathcal{J}_0$ sera représenté par un segment dirigé suivant la verticale descendante (fig. 342). D'après (136.10) le courant $\mathcal{J}_2$ sera représenté sur ce diagramme par un segment horizontal orienté vers la gauche. Au lieu de porter sur le diagramme le courant lui-même, il est préférable de porter le produit de ce courant par le nombre de spires correspondant (nombre d'*ampères-tours*). Selon (136.12) la quantité $n_1\mathcal{J}_1$ sera représentée par un vecteur qui est égal à la différence géométrique des vecteurs $n_1\mathcal{J}_0$ et $n_2\mathcal{J}_2$. Si la charge du transformateur augmente (i.e. si la résistance R_2 diminue) le courant $\mathcal{J}_2$ augmente comme l'indiquent les formules (136.10). Le courant $\mathcal{J}_1$ augmentera lui aussi, mais comme le courant à vide ne varie pas, il ressort de la figure 342 que le déphasage φ entre le courant $\mathcal{J}_1$ et la tension $\mathcal{E}$ doit diminuer. Cela conduit à une augmentation de la puissance consommée.

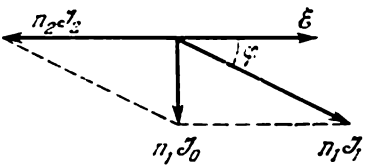


Fig. 342

3. Calculons la puissance électrique moyenne P_0 dans le primaire. En posant que la résistance R_1 est quelconque, écrivons le courant $\mathcal{J}_1$ sous la forme

$$\mathcal{J}_1=\frac{a+ib}{c+id}\,\mathcal{E}.$$

On détermine les constantes a, b, c, d en identifiant cette formule avec (136.9). En multipliant le numérateur et le dénominateur par $c - id$ on obtient

$$\mathcal{J}_1=\frac{(ac+bd)+i\,(bc-ad)}{c^2+d^2}\,\mathcal{E}.$$

Le cosinus de l'angle de déphasage entre $\mathcal{J}_1$ et $\mathcal{E}$ est

$$\cos\varphi=\frac{ac+bd}{|(ac+bd)+i\,(bc-ad)|},$$

la puissance moyenne est

$$P_0=\frac{1}{2}\,|\mathcal{E}\mathcal{J}_1|\cos\varphi=\frac{1}{2}\,\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\,|\mathcal{E}|^2.$$

Portons dans cette expression les valeurs des coefficients a, b, c et d et introduisons le rapport de la réactance inductive du circuit à la résistance ohmique correspondante:

$$\alpha_k=\frac{\omega L_k}{R_k}. \tag{136.13}$$

On trouve ainsi

$$P_0 = \frac{1}{2}\,\frac{1+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}{1+(\alpha_1+\alpha_2)^2}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{R_1}, \tag{136.14}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\alpha_1}{1+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}. \tag{136.15}$$

La phase du courant retarde sur celle de la tension d'un angle $|\varphi|$.

La puissance moyenne *dissipée dans le primaire* est $P_1 = {}^1/_2 R_1 \,|\mathscr{J}_1|^2$ et celle dissipée dans le secondaire est $P_2 = {}^1/_2 R_2 \,|\mathscr{J}_2|^2$. Le calcul donne

$$P_1 = \frac{1+\alpha_2^2}{1+(\alpha_1+\alpha_2)^2}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{R_1}, \quad P_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_1\alpha_2}{1+(\alpha_1+\alpha_2)^2}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{R_1}. \tag{136.16}$$

Ainsi $P_0 = P_1 + P_2$, résultat correct. Si les paramètres du primaire ($\mathscr{E}$, R_1, α_1) sont maintenus constants, la puissance P_2 consommée dans le secondaire est maximale lorsque $\alpha_2 = \sqrt{\alpha_1^2+1}$ ou de façon approchée lorsque $\alpha_2 = \alpha_1$, puisque dans les cas pratiquement importants $\alpha_1 \gg 1$. La valeur maximale de P_2 est approximativement égale à

$$P_{2\,\max} \approx \frac{1}{8}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{R_1}. \tag{136.17}$$

La puissance du courant dans le primaire est alors égale à $P_0 = \frac{1}{4}\frac{|\mathscr{E}|^2}{R_1}$, donc deux fois plus grande. Ainsi le rendement du transformateur n'est égal qu'à 50 %. Dans le cas général le rendement est défini par la formule

$$\eta = \frac{P_2}{P_0} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{1+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}. \tag{136.18}$$

oi α_1 est fixe, le rendement sera maximal pour $\alpha_2 = 1$, i.e. lorsque la résistance Shmique du secondaire est égale à sa réactance inductive. Le rendement maximal correspondant est $\eta_{\max} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+2}$. Si $\alpha_1 \gg 1$, on a $\eta_{\max} \approx 1$. La puissance consommée dans le secondaire est alors

$$P_2 \approx \frac{1}{2}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\alpha_1 R_1} = \frac{1}{2}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1} \approx P_0. \tag{136.19}$$

La puissance à vide du transformateur $P_0^{(0)}$ se déduit de (136.14) en y posant $\alpha_2 = 0$, ce qui donne

$$P_0^{(0)} = \frac{1}{2(\alpha_1^2+1)}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{R_1} \approx \frac{|\mathscr{E}|^2}{2\alpha_1^2 R_1}, \tag{136.20}$$

$$\frac{P_0}{P_0^{(0)}} = \frac{1+\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}{1+(\alpha_1+\alpha_2)^2}\,(1+\alpha_1^2) \approx \alpha_1\alpha_2. \tag{136.21}$$

Les formules approchées sont toujours établies en posant $\alpha_1 \gg 1$. La dernière formule suppose en outre que $\alpha_1 \gg \alpha_2$ (afin que le rendement soit grand). A puissance P_2 maximale, $\alpha_1 = \alpha_2$ et on tire de (136.21)

$$\frac{P_0}{P_0^{(0)}} \approx \frac{\alpha_1^2}{2}. \tag{136.22}$$

Ce résultat montre que si le transformateur est chargé jusqu'à sa puissance maximale, la puissance du courant dans le primaire augmente de $\alpha_1^2/2$ fois par rapport à la puissance à vide; dans le cas d'une charge assurant le rendement maximal ($\alpha_2 = 1$) la puissance du primaire augmente de α_1 fois.

4. On utilise les transformateurs non seulement pour élever ou abaisser une tension alternative, mais aussi pour assurer le *transport de l'énergie électrique à grande distance*. Pour expliquer ce problème considérons deux transformateurs

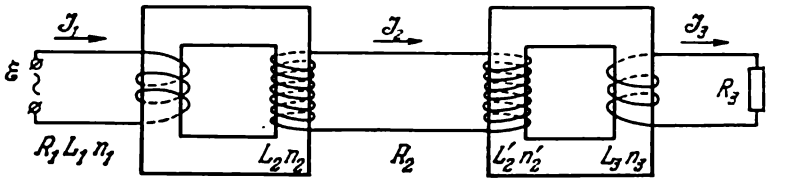


Fig. 343

accouplés dont les paramètres sont indiqués sur la figure 343. Ecrivons les équations des oscillations électriques dans ces deux transformateurs:

$$\begin{aligned} R_1\mathcal{J}_1 &= \mathcal{E} - L_1\dot{\mathcal{J}}_1 - \sqrt{L_1L_2}\,\dot{\mathcal{J}}_2, \\ R_2\mathcal{J}_2 &= -\sqrt{L_1L_2}\,\dot{\mathcal{J}}_1 - L_2\dot{\mathcal{J}}_2 - L_2'\dot{\mathcal{J}}_2 - \sqrt{L_2'L_3}\,\dot{\mathcal{J}}_3, \\ R_3\mathcal{J}_3 &= -\sqrt{L_2'L_3}\,\dot{\mathcal{J}}_2 - L_3\dot{\mathcal{J}}_3. \end{aligned} \tag{136.23}$$

Pour alléger les formules nous supposerons que la résistance ohmique R_1 est très petite: $R_1 = 0$. Si la force électromotrice $\mathcal{E}$ est sinusoïdale, nous obtenons en régime permanent

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &= \frac{(\alpha_2\alpha_3 - 1) - i(\alpha_2 + \alpha_2' + \alpha_3)}{\alpha_2' + \alpha_3 - i}\,\frac{\mathcal{E}}{\omega L_1}, \\ \mathcal{J}_2 &= -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\,\frac{\alpha_3 - i}{\alpha_2' + \alpha_3 - i}\,\frac{\mathcal{E}}{R_2}, \\ \mathcal{J}_3 &= \sqrt{\frac{L_2}{L_1}\,\frac{L_3}{L_2'}}\,\frac{\alpha_2'}{\alpha_2' + \alpha_3 - i}\,\frac{\mathcal{E}}{R_3}, \end{aligned} \tag{136.24}$$

où on a utilisé les notations suivantes:

$$\alpha_2 = \frac{\omega L_2}{R_2}, \quad \alpha_2' = \frac{\omega L_2'}{R_2}, \quad \alpha_3 = \frac{\omega L_3}{R_3}. \tag{136.25}$$

R_2 désigne ici la somme des résistances du secondaire du premier transformateur, du primaire du second transformateur et des fils de connexion. Si $R_2 = 0$, on a $\alpha_2' = \infty$ et on déduit de la dernière formule (136.24) que

$$\mathcal{J}_3 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}\,\frac{L_3}{L_2'}}\,\frac{\mathcal{E}}{R_3} = \frac{n_2}{n_1}\,\frac{n_3}{n_2'}\,\frac{\mathcal{E}}{R_3}. \tag{136.26}$$

La signification de cette formule est évidente. Le premier transformateur élève la tension de n_2/n_1 fois et le second de n_3/n_2' fois, de sorte que la tension à la sortie du second transformateur est égale à $\frac{n_2}{n_1}\frac{n_3}{n_2'}\mathcal{E}$. Si les transformateurs sont identiques ($n_1 = n_3$, $n_2 = n_2'$), on a $\mathcal{J}_3 = \mathcal{E}/R_3$. A la sortie du second transformateur le courant $\mathcal{J}_3$ est alors le même que si la source de tension $\mathcal{E}$ était branchée directement sur la résistance R_3.

La puissance du courant dans le circuit primaire est

$$P_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2\alpha_3(\alpha_2'+\alpha_3)+\alpha_2}{(\alpha_2'+\alpha_3)^2+1}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1}. \tag{136.27}$$

Les puissances absorbées sont

$$P_1 = 0.$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2(\alpha_3^2+1)}{(\alpha_2'+\alpha_3)^2+1}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1}, \tag{136.28}$$

$$P_3 = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2\alpha_2'\alpha_3}{(\alpha_2'+\alpha_3)^2+1}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1}.$$

Si $R_3 = 0$, on a $\alpha_2 = \infty$, $\alpha_2' = \infty$, avec $\alpha_2/\alpha_2' = L_2/L_2'$, i.e. α_2 et α_2' sont des infiniment grands du même ordre. Par suite $P_2 = 0$, $P_3 = P_0$. Toute l'énergie produite dans le circuit primaire est distribuée sans pertes aux consommateurs.

Si tous les paramètres de tous les enroulements, sauf le dernier, sont constants, la puissance absorbée P_3 est maximale pour $\alpha_3 = \sqrt{1+\alpha_2'^2}$, ou en approximation pour $\alpha_3 = \alpha_2'$. Ainsi

$$P_{3\,\max} \approx \frac{\alpha_2\,|\mathscr{E}|^2}{8\omega L_1}. \tag{136.29}$$

Comme la même puissance est dissipée dans la ligne de transport, le rendement n'est que de 50 %. Dans le cas général le rendement

$$\eta = \frac{P_3}{P_0} = \frac{\alpha_2'\alpha_3}{1+\alpha_3(\alpha_2'+\alpha_3)} \tag{136.30}$$

devient maximal pour $\alpha_3 = 1$. En remarquant que $\alpha_2' \gg 1$ le rendement maximal $\eta_{\max} \approx 1$. Dans ce cas

$$P_0 = \frac{\alpha_2}{2}\,\frac{\alpha_2'+\alpha_3+1}{(\alpha_2'+\alpha_3)^2+1}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1} \approx \frac{\alpha_2}{2\alpha_2'}\,\frac{|\mathscr{E}|}{\omega L_1},$$

$$P_3 = \frac{\alpha_2}{2}\,\frac{\alpha_2'}{(\alpha_2'+\alpha_3)^2+1}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1} \approx \frac{\alpha_2}{2\alpha_2'}\,\frac{|\mathscr{E}|}{\omega L_1} \approx P_0. \tag{136.31}$$

Enfin la puissance à vide du transformateur ($\alpha_3 = 0$) est

$$P_0^{(0)} = \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2'^2}\,\frac{|\mathscr{E}|}{\omega L_1} \approx \frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2}{\alpha_2'^2}\,\frac{|\mathscr{E}|^2}{\omega L_1}. \tag{136.32}$$

Par conséquent dans les conditions du rendement maximal

$$\frac{P_3}{P_0^{(0)}} \approx \alpha_2'. \tag{136.33}$$

§ 137. Oscillations à deux degrés de liberté

1. Nous allons étudier ici les oscillations électriques dans deux circuits oscillants couplés par inductance (fig. 344). Nous supposerons qu'il n'y a ni résistances ohmiques ni forces extérieures s'exerçant sur le système (oscillations libres). Comme les oscillations qu'exécute un circuit exercent une influence sur les oscillations qu'exécute

l'autre circuit, on les appelle *oscillations de circuits couplés*. Ces oscillations sont décrites par les équations différentielles

$$\begin{aligned} &\frac{Q_1}{C_1}+L_1\dot{\mathcal{J}}_1+L_{12}\dot{\mathcal{J}}_2=0,\\ &\frac{Q_2}{C_2}+L_2\dot{\mathcal{J}}_2+L_{21}\dot{\mathcal{J}}_1=0 \end{aligned} \tag{137.1}$$

ou

$$\begin{aligned} &L_1\ddot{Q}_1+L_{12}\ddot{Q}_2+\frac{Q_1}{C_1}=0,\\ &L_{21}\ddot{Q}_1+L_2\ddot{Q}_2+\frac{Q_2}{C_2}=0. \end{aligned} \tag{137.2}$$

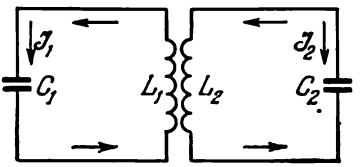


Fig. 344

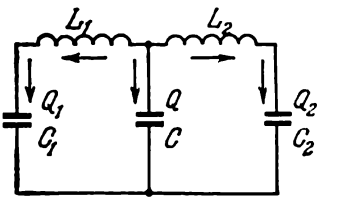


Fig. 345

En résolvant ces équations par rapport aux dérivées on les met sous la forme

$$\begin{aligned} &\ddot{Q}_1+a_{11}Q_1+a_{12}Q_2=0,\\ &\ddot{Q}_2+a_{21}Q_1+a_{22}Q_2=0, \end{aligned} \tag{137.3}$$

où on a utilisé les notations suivantes:

$$\begin{aligned} &a_{11}=\frac{L_2}{C_1(L_1L_2-L_{12}L_{21})},\quad a_{12}=-\frac{L_{12}}{C_2(L_1L_2-L_{12}L_{21})},\\ &a_{21}=-\frac{L_{21}}{C_1(L_1L_2-L_{12}L_{21})},\quad a_{22}=\frac{L_1}{C_2(L_1L_2-L_{12}L_{21})}. \end{aligned} \tag{137.4}$$

Avant de poursuivre notre étude considérons deux circuits oscillants à couplage par capacité (fig. 345). Dans ce cas

$$\begin{aligned} &\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q}{C}+L_1\dot{\mathcal{J}}_1=0,\\ &\frac{Q_2}{C_2}+\frac{Q}{C}+L_2\dot{\mathcal{J}}_2=0. \end{aligned} \tag{137.5}$$

En différentiant ces équations par rapport au temps et en remarquant que $\mathcal{J}=\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2$ ou $\dot{Q}=\dot{Q}_1+\dot{Q}_2$ on obtient

$$\begin{aligned} &\ddot{\mathcal{J}}_1+a_{11}\mathcal{J}_1+a_{12}\mathcal{J}_2=0,\\ &\ddot{\mathcal{J}}_2+a_{21}\mathcal{J}_1+a_{22}\mathcal{J}_2=0, \end{aligned} \tag{137.6}$$

où on a introduit les notations suivantes:

$$a_{11}=\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C}\right),\quad a_{12}=\frac{1}{L_1C},$$
$$a_{21}=\frac{1}{L_2C},\qquad a_{22}=\frac{1}{L_2}\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C}\right). \tag{137.7}$$

Nous voyons que les oscillations dans les deux systèmes sont décrites par des systèmes d'équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients constants *de même type*. On obtient des équations de ce même type dans l'étude des petites oscillations de systèmes mécaniques à deux degrés de liberté, par exemple de deux *pendules couplés*. Il est par conséquent logique d'étudier ensemble ces différents systèmes couplés. Pour ce faire nous remplacerons les systèmes non définis par un système dont la configuration est caractérisée par deux coordonnées quelconques x_1 et x_2 vérifiant le système d'équations différentielles

$$\ddot{x}_1+a_{11}x_1+a_{12}x_2=0,$$
$$\ddot{x}_2+a_{21}x_1+a_{22}x_2=0, \tag{137.8}$$

où les a_{ik} sont des coefficients constants. Les valeurs de ces coefficients ainsi que la signification physique des coordonnées x_1 et x_2 doivent être précisées dans chaque cas concret.

2. Cherchons d'abord une solution particulière du système d'équations (137.8):

$$x_1=A_1e^{i\omega t},\quad x_2=A_2e^{i\omega t}, \tag{137.9}$$

où A_1 et A_2 sont des constantes. En portant (137.9) dans (137.8) on obtient

$$(a_{11}-\omega^2)A_1+a_{12}A_2=0,$$
$$a_{21}A_1+(a_{22}-\omega^2)A_2=0. \tag{137.10}$$

Ce système d'équations linéaires homogènes ne possède une solution non nulle que si

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\omega^2 \end{vmatrix}=0. \tag{137.11}$$

C'est une équation de second degré en ω^2. Dénotons ses racines par ω_1^2 et ω_2^2. On démontre aisément que dans le cas des systèmes électriques considérés plus haut ces deux racines sont réelles et positives. Dans le cas d'un système quelconque on doit imposer que les racines soient réelles et positives, condition que doivent vérifier les coefficients a_{ik}. On trouve pour ω quatre valeurs: $\pm\omega_1$ et $\pm\omega_2$. La prise en compte de ω négatifs n'apporte aucun élément nouveau. Comme les coefficients des équations (137.8) sont *réels*, nous n'avons à considérer que les *solutions réelles*. Or les parties réelles des expressions $Ae^{i\omega t}$

et $Ae^{-i\omega t}$ sont de la forme $C \cos(\omega t + \delta)$, où C et δ sont des constantes arbitraires. Il s'ensuit que sans porter préjudice à la généralité de la démonstration on peut se contenter des racines positives ω_1 et ω_2.

Les équations (137.10) laissent apparaître que les coefficients A_1 et A_2 ne sont pas indépendants. Leur rapport est univoquement défini par les valeurs des coefficients a_{ik} et par la fréquence ω:

$$h \equiv \frac{A_2}{A_1} = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}}. \tag{137.12}$$

Aux deux valeurs de ω correspondent donc deux valeurs du rapport h, que nous noterons h_1 et h_2. Nous avons trouvé ainsi deux solutions particulières du système (137.8).

Première solution: $x_1 = e^{i\omega_1 t}$, $x_2 = h_1 e^{i\omega_1 t}$.

Deuxième solution: $x_1 = e^{i\omega_2 t}$, $x_2 = h_2 e^{i\omega_2 t}$.

La solution générale est représentée par la *combinaison linéaire* de ces solutions particulières avec des coefficients constants, i.e.

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{i\omega_2 t}, \\ x_2 &= h_1 C_1 e^{i\omega_1 t} + h_2 C_2 e^{i\omega_2 t}, \end{aligned} \tag{137.13}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes complexes arbitraires qui déterminent les *amplitudes* et les *phases des oscillations*; on les détermine à partir des *conditions initiales*, à savoir de x_1 et de x_2 et de leurs dérivées à l'instant $t = 0$.

Introduisons les notations

$$\xi_1 = C_1 e^{i\omega_1 t}, \quad \xi_2 = C_2 e^{i\omega_2 t}. \tag{137.14}$$

On obtient

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad x_2 = h_1 \xi_1 + h_2 \xi_2, \tag{137.15}$$

$$\xi_1 = \frac{h_2 x_1 - x_2}{h_2 - h_1}, \quad \xi_2 = \frac{-h_1 x_1 + x_2}{h_2 - h_1}. \tag{137.16}$$

Ces relations montrent qu'on peut prendre ξ_1 et ξ_2 pour *nouvelles coordonnées* définissant la *configuration du système*. Les coordonnées ξ_1 et ξ_2 exécutent des oscillations harmoniques respectivement de fréquences ω_1 et ω_2. Ces coordonnées sont appelées *coordonnées normales* et les oscillations correspondantes sont appelées *oscillations normales* (ou *principales*) ou *modes*. Ainsi dans le cas général *les oscillations d'un système couplé sont représentées par la superposition de deux oscillations normales de fréquences* ω_1 et ω_2.

3. Considérons un système couplé symétrique tel que $a_{11} = a_{22}$ et $a_{12} = a_{21}$. Dans les exemples cités (cf. fig. 344 et 345) ce cas correspond à l'identité des paramètres des deux circuits oscillants.

L'équation (137.11) se réduit alors à $(\omega^2 - a_{11})^2 = a_{12}^2$ et par suite

$$\omega_1^2 = a_{11} + a_{12}, \quad \omega_2^2 = a_{11} - a_{12},$$
$$h_1 = 1, \qquad h_2 = -1,$$
$$x_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad x_2 = \xi_1 - \xi_2,$$
$$\xi_1 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \xi_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

Par exemple, pour le système représenté sur la figure 345, on trouve

$$\omega_1^2 = \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{2}{C}\right), \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_1 C_1}.$$

La signification de cette formule s'interprète aisément. Supposons, par exemple, que le système n'exécute que des oscillations normales de fréquence ω_2, les oscillations de fréquence ω_1 n'étant pas excitées. Cela implique que $2\xi_1 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 = \mathcal{J} = 0$, ce qui signifie que le condensateur C n'est traversé pas aucun courant. Le condensateur C n'exerce donc aucune influence sur les oscillations de fréquence ω_2 et le système se comporte comme un circuit oscillant unique où les bobines d'inductance et les condensateurs sont montés en série. L'inductance totale de ce circuit unique est égale à $2L_1$, sa capacité totale est égale à $C_1/2$ et sa fréquence propre est $\omega = 1/\sqrt{L_1 C_1} = \omega_2$.

4. On observe un effet intéressant dans le cas symétrique lorsque le couplage des sous-systèmes constituant un système complexe est *lâche*. Le coefficient a_{12} étant alors petit, les fréquences ω_1 et ω_2 des oscillations normales sont peu différentes ; l'une est un peu plus grande et l'autre est un peu plus petite que la fréquence propre de l'un des sous-systèmes $\omega_0 = \sqrt{a_{11}}$. Les oscillations des coordonnées x_1 et x_2 sont représentées par la superposition des oscillations normales de fréquences peu différentes. Pendant plusieurs oscillations les deux coordonnées x_1 et x_2 oscillent comme si le couplage n'existait pas. L'existence d'un couplage lâche conduit à l'apparition de *battements* schématisés par la figure 314. Lorsque l'amplitude de la coordonnée x_1 passe par un maximum, l'amplitude de x_2 passe par zéro et inversement. La démonstration de cet effet est facile à faire en utilisant deux pendules simples à couplage lâche. Après avoir lancé le premier pendule on constate que l'amplitude de ses oscillations diminue lentement et que le deuxième pendule se met en mouvement. Au cours d'une dizaine de périodes les oscillations du premier pendule s'amortissent complètement et celles du second deviennent maximales. Ensuite ce sont les oscillations du second pendule qui s'amortissent et le premier pendule se remet en mouvement ; au bout du même nombre de périodes l'amplitude du premier pendule reprendra sa valeur initiale. Dans la suite du temps le transfert du mouvement d'un pendule à l'autre s'effectuera périodiquement jusqu'au moment où les oscillations cesseront sous l'action des forces de frottement.

5. L'étude des oscillations propres amorties des systèmes couplés se fait comme dans le cas d'oscillations non amorties. Il suffit d'introduire dans les équations (137.6) des termes linéaires contenant les dérivées premières $\dot{x}_1$ et $\dot{x}_2$. On peut également étudier des oscillations forcées en introduisant des forces extérieures s'exerçant sur le système. On procédera alors, comme on l'a fait dans le cas d'un système à un degré de liberté. Lorsque le nombre de degrés de liberté n est supérieur à deux, on doit utiliser n coordonnées pour définir la configuration du système. Si les coordonnées sont décrites par des équations linéaires de même type que (137.8) toute oscillation du système pourra être représentée par une superposition d'*oscillations normales* caractérisées par n *fréquences*. Si certaines fréquences coïncident, on dit qu'il y a *dégénérescence*. Le cas dégénéré se laisse ramener à un cas non dégénéré en « levant la dégénérescence », i.e. en modifiant légèrement les coefficients des équations pour revenir ensuite à la limite aux valeurs initiales de ces coefficients.

§ 138. L'équation d'onde

1. Il a déjà été question des *perturbations* ou *ondes électromagnétiques* au § 83. Nous y avons considéré une onde plane pour montrer la manière dont les ondes électromagnétiques étaient générées et nous y avons calculé la vitesse de leur propagation. Nous revenons à cette question afin d'en donner une formulation mathématique à la fois plus simple et plus systématique. Nous examinerons en outre quelques nouveaux problèmes, mais nombre de questions relatives à la théorie de la propagation des ondes (réflexion, réfraction, interférences, diffraction, dispersion, etc.) sont passées sous silence, leur étude détaillée étant reportée au tome suivant.

Commençons par examiner un système mécanique simple présentant des analogies avec le cas étudié. Frappons sur une corde tendue ; l'ébranlement produit se propage du point de frappe sous forme de deux ondes transversales dans des directions opposées. Considérons l'onde (ou la perturbation) qui se propage vers la droite. Prenons pour axe X la position de la corde tendue non perturbée afin de pouvoir définir tout point matériel de la corde par l'abscisse x qu'il avait sur la corde non perturbée ; la perturbation sera caractérisée alors par le déplacement s de ce point par rapport à sa position d'équilibre ; s sera une fonction de la coordonnée x du point et du temps t : $s = s(x, t)$. Cette fonction dépend d'une certaine combinaison de x et de t et non pas de chacune de ces variables prises isolément. Nous préciserons plus bas la forme de cette combinaison. Sur la figure 346 en haut on a représenté la position de la corde perturbée à l'instant $t = 0$. Cette forme initiale de la corde peut être représentée par l'équation $s(\xi, 0) = f(\xi)$, où ξ est l'abscisse d'un point maté-

riel quelconque A (ξ) de la corde. Au bout d'un temps t la perturbation se sera déplacée vers la droite d'une distance $OO' = vt$, où v est la *vitesse de propagation de la perturbation*. Cela signifie que le déplacement s (x, t) que subit le point A (x) de coordonnée x à l'instant t est le même que le déplacement qu'avait subi le point A (ξ) de coordonnée ξ à l'instant $t = 0$, à condition que $x - \xi = vt$, ce qui implique que $s(x, t) = s(\xi, 0) = f(\xi) = f(x - vt)$. Ainsi en omettant x et t dans l'écriture de la fonction s (x, t) le déplacement s est donné par

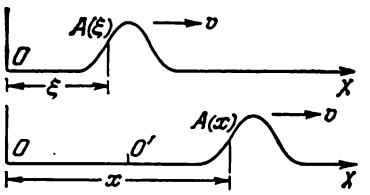


Fig. 346

$$s = f(x - vt). \qquad (138.1)$$

On voit que si la perturbation se propage à droite, le déplacement s ne dépend que de la combinaison des variables $x - vt$. Si cette combinaison reste constante, le déplacement s restera constant. Cela signifie que l'équation $x - vt = \text{const}$ est l'*équation du front de propagation de la perturbation*. En la différentiant par rapport au temps t, il vient $dx/dt = +v$, ce qui confirme que v est la vitesse de propagation du front de l'onde.

On s'assure de la même façon qu'une perturbation qui se propage à gauche est décrite par l'équation

$$s = f(x + vt). \qquad (138.2)$$

Si la perturbation se propage simultanément vers la gauche et la droite

$$s = f_1(x - vt) + f_2(x + vt). \qquad (138.3)$$

La forme des fonctions f_1 et f_2 dépend des *conditions initiales*, i.e. de la forme de la corde à l'instant de l'ébranlement initial et de la répartition initiale des vitesses, et peut donc être très variée.

2. On peut établir une équation *ne contenant pas les conditions initiales* et de ce fait convenant à la description de la propagation de n'importe quelles ondes le long de la corde. Une telle forme de l'équation est analogue aux équations de Newton en mécanique qui ne contiennent pas elles non plus les conditions initiales. L'indépendance vis-à-vis des conditions initiales tient à ce qu'il s'agit d'une équation *différentielle* (comme l'équation exprimant la deuxième loi de Newton). Pour établir cette équation on différentie (138.1) d'abord par rapport à x, puis par rapport à t:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial (x - vt)}{\partial t} = -vf',$$

où f' désigne la dérivée par rapport à $x - vt$ dont dépend la fonction f. En éliminant f' entre ces équations, on obtient

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial s}{\partial t}.$$

Cette équation ne contient pas les conditions initiales, mais elle ne décrit que les *perturbations qui se propagent à droite* du point d'ébranlement ; celles qui se propagent à gauche ont la même équation mais avec le signe plus devant le second membre. Pour établir une équation qui serait valable pour les deux perturbations, ainsi que pour leur superposition (138.3), il suffit de différentier une seconde fois, ce qui donne

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = f'', \quad \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -vf''\frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = v^2 f'',$$

et après élimination de f''

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0. \qquad (138.4)$$

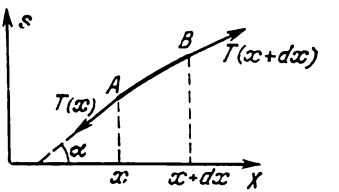


Fig. 347

Il est facile de se rendre compte que cette équation décrit correctement la perturbation (138.2) et la perturbation générale (138.3). L'équation différentielle (138.4) est appelée *équation de l'onde* et s'applique à toutes les perturbations pouvant se propager dans une corde.

L'expression (138.3) où f_1 et f_2 sont des fonctions arbitraires est *solution générale* de l'équation de l'onde (138.4). Pour le démontrer introduisons de nouvelles variables indépendantes $\xi = x - vt$ et $\eta = x + vt$. Avec ces variables l'équation (138.4) s'écrit

$$\frac{\partial^2 s}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Elle a pour solution générale $s = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, ce qui démontre notre proposition. Il s'ensuit que tout processus pouvant être décrit par l'équation de l'onde (138.4) est constitué dans le cas général par deux perturbations qui se propagent le long de l'axe X avec la vitesse v dans des sens opposés.

3. Donnons deux exemples d'application de l'équation (138.4). Etablissons d'abord l'équation des petites oscillations transversales qu'exécute une corde élastique tendue en partant des équations de la mécanique. Posons que l'élasticité de la corde résulte uniquement de sa *tension* T, l'élasticité de la forme étant tenue pour négligeable. Un élément AB de la corde (fig. 347) est soumis à une force de tension $T(x)$ dirigée vers la gauche. Sa composante verticale est $-T(x)\operatorname{tg}\alpha = T(x)\frac{\partial s}{\partial x}$ (le sens positif est celui d'une verticale ascendante). Une force analogue s'exerce sur l'autre extrémité de

l'élément AB. La résultante de ces deux forces est

$$\left(T\frac{\partial s}{\partial x}\right)_B-\left(T\frac{\partial s}{\partial x}\right)_A=\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial s}{\partial x}\right)dx.$$

Si les oscillations sont petites, l'angle α est petit, ce qui permet de ne pas tenir compte des variations de la tension T le long de la corde. Dans cette approximation l'expression précédente se réduit à $T\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}dx$. On peut ainsi négliger les variations de la densité linéique δ de la corde accompagnant ses allongements et ses contractions. En égalant le produit de la masse $\delta\, dx$ de l'élément AB par son accélération $\partial^2 s/\partial t^2$ à la force appliquée, il vient

$$\delta\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}.$$

C'est la même équation que (138.4) et par suite on trouve que la vitesse de déplacement transversal v de la corde est

$$v=\sqrt{T/\delta} \tag{138.5}$$

Nous avons établi cette formule par un procédé différent dans le t. I, § 84. On peut établir de la même façon les vitesses de propagation des perturbations élastiques dans les tiges cylindriques, dans les milieux élastiques illimités, ainsi que dans les liquides et les gaz (cf. t. I, §§ 81, 83, 85).

Le deuxième exemple concerne un plasma de conductibilité relativement grande soumis à l'action d'un champ magnétique permanent B. Considérons un tube de force de petite section. Si le plasma se déplace transversalement par rapport à la direction du champ magnétique, du fait de la grande conductibilité du plasma, le flux magnétique embrassé par la section droite du tube de force se conserve (cf. § 71). Les lignes de force magnétiques sont pour ainsi dire *gelées dans la substance* et se déplacent avec celle-ci. Comme la tension maxwellienne $\tau = B^2/(8\pi)$ s'exerce le long d'un tube de force magnétique, des *perturbations transversales* analogues à celles qui existent dans une corde tendue peuvent se propager le long des lignes de force magnétiques. Ces perturbations sont dites *magnétohydrodynamiques* ou *ondes d'Alfven* (né en 1908), savant qui avait prédit théoriquement leur existence. Les ondes magnétohydrodynamiques diffèrent cependant des ondes dans une corde tendue. Cette différence tient à ce qu'un tube de force magnétique est soumis non seulement à une tension longitudinale, mais encore à une pression latérale de même module (fig. 348, *a*). On arrive à éliminer simplement cette pression latérale en appliquant aux bases d'un tube de force une tension τ et une pression égale à τ. L'application de ces contraintes ne change rien à l'affaire car elles se compensent mutuellement, mais le système des tensions maxwelliennes se réduit alors à la tension longitu-

dinale $2\tau = B^2/(4\pi)$ et à la pression tridimensionnelle τ (fig. 348, *b*). Comme cette dernière n'exerce aucune influence sur la propagation des perturbations transversales, on peut utiliser la formule (138.5) en y posant $T = 2S\tau$, $\delta = S\rho$, où S est l'aire de la section droite du tube de force magnétique et ρ la densité du plasma. On trouve ainsi la vitesse de propagation des ondes magnétohydrodynamiques:

$$v = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}. \tag{138.6}$$

4. L'équation (138.4) est l'équation d'onde à une dimension puisqu'elle ne concerne que la propagation des ondes *le long d'une seule*

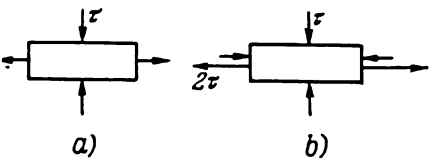


Fig. 348

direction et que la grandeur s qui caractérise le processus ne dépend que d'une seule coordonnée spatiale x et du temps t. Les processus ondulatoires se propageant dans l'espace sont régis par l'équation d'onde « *tridimensionnelle* »

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0. \tag{138.7}$$

Nous n'utiliserons cette équation qu'exceptionnellement.

§ 139. Ondes électromagnétiques planes

1. Posons qu'une perturbation électromagnétique se propage dans un milieu homogène illimité *sans subir d'absorption*, ce qui signifie que quelle que soit la perturbation, aucune chaleur par effet Joule ne sera dégagée dans le milieu considéré. Par conséquent la quantité $jE = \lambda E^2$ doit être nulle quel que soit le champ E. Ce n'est possible que si $\lambda = 0$, i.e. si le milieu est un diélectrique. Supposons encore que le milieu ne contient aucune charge électrique volumique. Dans ces conditions les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \frac{1}{c}\dot{D}, & \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c}\dot{B}, \\ \operatorname{div} D &= 0, & \operatorname{div} B &= 0. \end{aligned} \tag{139.1}$$

Considérons une solution particulière correspondant au cas où toutes les grandeurs concernées ne dépendent que de x et de t. En écrivant

les équations sous forme analytique, nous obtenons dans ce cas particulier

$$\frac{\partial H_z}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial D_y}{\partial t},\quad \frac{\partial H_y}{\partial x}=\frac{1}{c}\frac{\partial D_z}{\partial t},$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t},\quad \frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t},\tag{139.2}$$
$$\frac{\partial D_x}{\partial x}=\frac{\partial D_x}{\partial t}=\frac{\partial B_x}{\partial x}=\frac{\partial B_x}{\partial t}=0.$$

Les quatre dernières équations montrent que D_x et B_x sont indépendants de x et de t et sont donc des grandeurs constantes. Elles représentent les *champs statiques* qui se superposent au champ alternatif de la perturbation électromagnétique. Ces champs statiques sont sans action sur la propagation de la perturbation et peuvent donc être rejetés sans que la généralité des résultats en soit affectée. Les quatre équations restantes forment deux groupes d'*équations indépendantes*. L'un de ces groupes contient les composantes y du champ électrique et les composantes z du champ magnétique, tandis que l'autre contient les composantes z du champ électrique et les composantes y du champ magnétique. Comme ces deux groupes d'équations sont *de même type*, il suffit de ne considérer qu'un seul groupe. Nous prendrons le système d'équations contenant E_y et H_z. A l'aide des relations $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$, nous mettrons ces équations sous la forme

$$\frac{\partial H}{\partial x}=-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t},\quad \frac{\partial E}{\partial x}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\tag{139.3}$$

(nous avons omis les indices y et z en admettant que le vecteur $\boldsymbol{E}$ est parallèle à l'axe Y et le vecteur $\boldsymbol{H}$ est parallèle à l'axe Z). En différentiant la première équation par rapport à t, la seconde par rapport à x et en éliminant H, on obtient

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0.\tag{139.4}$$

On trouve de même

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=0,\tag{139.5}$$

où on a utilisé la notation

$$v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}.\tag{139.6}$$

Ainsi les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ vérifient une *seule et même équation d'onde*. Ce fait démontre que la perturbation considérée est composée d'ondes planes se propageant le long de l'axe X avec la vitesse v. La perturbation est transversale, i.e. les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ sont orthogonaux à l'axe X le long duquel se propage la perturbation. Considérons l'onde

qui se propage dans le sens positif de l'axe X :

$$E = f(x - vt), \quad H = g(x - vt). \tag{139.7}$$

On a alors $\partial E/\partial t = -vf'$, $\partial H/\partial x = g'$, de sorte qu'après substitution de ces quantités dans la première équation (139.3) on trouve $g' = \frac{\varepsilon v}{c} f'$. En intégrant cette équation et en omettant les constantes d'intégration (qui représentent les champs statiques sans intérêt dans le présent cas) on trouve $g = \frac{\varepsilon v}{c} f$ ou $H = \frac{v}{c} D$. En procédant de la même façon avec la deuxième équation (139.3) on trouve

$$H = \frac{v}{c} D, \quad E = \frac{v}{c} B, \tag{139.8}$$

ce qui s'écrit sous forme vectorielle

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c} [\boldsymbol{v}\boldsymbol{D}], \quad \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} [\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}], \tag{139.9}$$

où $\boldsymbol{v}$ est le vecteur vitesse de propagation de la perturbation électromagnétique.

Les vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$ (ainsi que les vecteurs $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{v}$) sont *rectangulaires* et *forment un trièdre de référence direct*. Leurs positions respectives sont représentées sur la figure 349, *a*. Cette disposition des

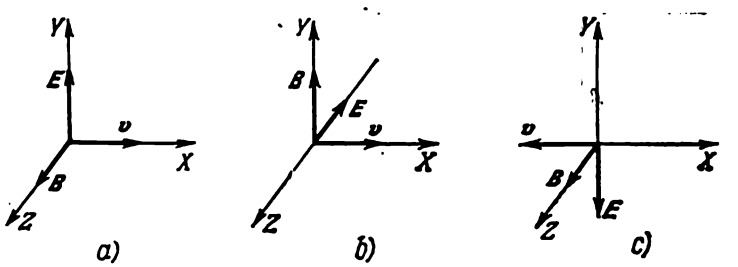


Fig. 349

vecteurs en trièdre direct est une *propriété inhérente* aux ondes électromagnétiques progressives et ne dépend d'aucun système de coordonnées. Faisons tourner les trois vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$ de la figure 349, *a* de 90° autour de l'axe X. On arrive à la disposition de la figure 349, *b*. Le vecteur $\boldsymbol{E}$ est maintenant parallèle à l'axe Z et le vecteur $\boldsymbol{B}$ est parallèle à l'axe Y. A cette disposition correspond le second groupe des équations du système (139.2). Ce résultat montre qu'il n'était pas nécessaire d'étudier spécialement ce deuxième groupe d'équations. Si on fait tourner les trois vecteurs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{v}$ de la figure 349, *a* de 180° autour de l'axe Z, on obtient la disposition de la figure 349, *c* qui caractérise une onde qui se propage vers la gauche. Il est donc inutile d'étudier cette onde.

2. La forme de la fonction f (ou g) d'une onde électromagnétique progressive plane dépend des *conditions initiales* et peut être quelconque. Sont particulièrement importantes les *ondes sinusoïdales* ou *monochromatiques*. Ces ondes sont définies par les équations

$$E = E_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right), \quad H = H_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right), \tag{139.10}$$

où E_0 et H_0 sont des constantes que l'on appelle *amplitudes de l'onde*. Avec la notation

$$k = \omega / v, \tag{139.11}$$

on a

$$E = E_0 \cos (\omega t - kx), \quad H = H_0 \cos (\omega t - kx). \tag{139.12}$$

La grandeur k est le *nombre d'onde*. Si on fixe la coordonnée x on obtient des fonctions sinusoïdales du temps qui caractérisent des oscil-

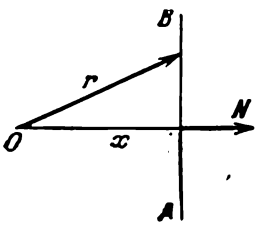


Fig. 350

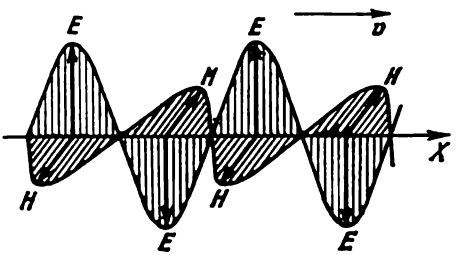


Fig. 351

lations harmoniques de fréquence circulaire ω. D'autre part, si on fixe le temps t on obtient des équations caractérisant une répartition sinusoïdale du champ E, H dans l'espace à l'instant considéré. La période spatiale du champ E, H porte le nom de *longueur d'onde* λ:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{\nu}. \tag{139.13}$$

Une onde électromagnétique monochromatique progressive peut être décrite par une *équation vectorielle* ne contenant pas de coordonnées. On utilise pour cela le vecteur unitaire N de la normale au front de l'onde AB, i.e. au plan de phase constante $\omega t - kx = \text{const}$. La figure 350 montre qu'on a alors $x = (Nr)$ et par suite $kx = (kr)$, où $k = kN$ est le *vecteur d'onde*. On trouve ainsi

$$E = E_0 \cos (\omega t - kr), \quad H = H_0 \cos (\omega t - kr), \tag{139.14}$$

et en notation complexe

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kr)}, \quad H = H_0 e^{i(\omega t - kr)}. \tag{139.15}$$

Dans ces formules E_0 et H_0 peuvent être des *nombres complexes*, ce qui implique l'indication des phases initiales. Or, du fait des relations (139.8) ou (139.9), dans une onde monochromatique progressive les vecteurs électrique et magnétique oscillent toujours *en phase*. La figure 351 illustre l'aspect spatial d'une telle onde à un instant donné. Pour se faire une idée de l'évolution du champ dans le temps, il faut se représenter que l'image de la figure 351 se déplace d'un mouvement uniforme de vitesse v vers la droite. Pour obtenir une onde qui se propagerait à gauche il suffit d'inverser le sens de l'un des vecteurs E ou H.

§ 140. Ondes stationnaires

1. Supposons qu'une onde sinusoïdale transversale $s_1 = a \cos(\omega t - kx)$ se propage de gauche à droite le long d'une corde tendue. Si on change le signe de kx on obtient l'onde $s_2 = a \cos(\omega t + kx)$ qui se propage de droite à gauche. Une telle onde pourrait être obtenue en réalisant la réflexion de la première onde sur l'extrémité de la corde. L'onde s_1 est dite *onde incidente* et l'onde s_2 est dite *onde réfléchie*. Si on convient de placer l'origine des coordonnées en un point de la corde où les ondes incidente et réfléchie sont en phase, il devient inutile de faire figurer une phase supplémentaire dans l'équation de l'onde réfléchie. C'est ce que nous ferons dans ce qui suit. Supposons que la réflexion soit totale, i.e. les amplitudes des ondes incidente et réfléchie sont égales. La superposition de ces ondes donne naissance à une perturbation

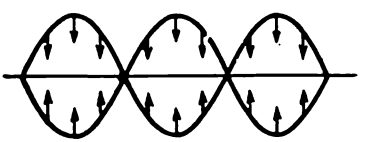


Fig. 352

$$s = s_1 + s_2 = 2a \cos kx \cos \omega t \qquad (140.1)$$

qu'on appelle *onde stationnaire*. Dans cette perturbation tout point d'abscisse x de la corde exécute une oscillation harmonique de fréquence ω et d'amplitude $2a \cos kx$. L'amplitude s'annule là où $\cos kx = 0$. Ces points sont appelés *nœuds de déplacement* (ou *nœuds de repos*). Au milieu de la distance séparant deux nœuds voisins l'amplitude $2a \cos kx$ est maximale ; ce point est appelé *ventre de déplacement*. La distance Δx entre deux nœuds ou deux ventres est définie par la condition $k\Delta x = \pi$, d'où $\Delta x = \pi/k = \lambda/2$. Tous les points se trouvant entre deux nœuds voisins oscillent en phase et passent simultanément par les positions d'équilibre ou par les maximums. Lorsqu'on traverse un nœud le signe de s s'inverse, ce qui signifie que la phase de l'oscillation change par saut de π. Mais ces sauts de la phase ne portent pas atteinte à la continuité du processus oscillatoire car ils se produisent là où l'amplitude de l'oscillation est nulle. La figure 352 illustre l'état oscilla-

toire d'une onde stationnaire; les deux sinusoïdes représentent les positions extrêmes de déplacement de la corde; les fléchettes indiquent le sens des déplacements dans ces positions extrêmes. Tout se passe comme si les nœuds subdivisaient la corde en des zones autonomes, animées d'*oscillations harmoniques indépendantes*. Aucun mouvement et donc aucune énergie ne sont transmis par les nœuds, ce qui signifie que la perturbation ne se propage pas le long de la corde. C'est pour cette raison que les perturbations définies par l'équation (140.1) sont appelées *ondes stationnaires*. Notons qu'aux nœuds de déplacement les dérivées $\partial s/\partial x$ sont maximales et aux ventres ces dérivées sont nulles (ces dérivées représentent les *déformations de la corde*). Les nœuds de déplacement sont des *ventres de déformation* et les ventres de déplacement sont des *nœuds de déformation*.

2. Les raisonnements ci-dessus supposaient implicitement que la corde était de longueur infinie. Dans ce cas la fréquence ω et par suite la longueur d'onde $\lambda = vT$ peuvent être quelconques. Mais si les extrémités de la corde sont fixées la situation est complètement différente. Si on excite une perturbation dans une corde à extrémités fixes et si on l'abandonne à elle-même, la perturbation se propagera dans les deux sens et se réfléchira sur les extrémités fixes de la corde. La corde sera le siège d'un *mouvement transitoire* compliqué. *Un mouvement stationnaire sous forme d'onde stationnaire n'est réalisable qu'à des fréquences définies*. En effet sur les extrémités fixes de la corde doivent être vérifiées des *conditions aux limites* bien déterminées: en ces points le déplacement s doit être nul à tout instant. Cela signifie que si la corde est le siège d'une onde stationnaire, ses extrémités doivent être des nœuds de déplacement. On en conclut que la longueur l de la corde doit contenir un nombre entier de demi-longueurs d'onde: $l = n\lambda/2$, autrement dit

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \quad \omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{\pi v}{l} n. \tag{140.2}$$

Comme le nombre entier n peut être quelconque, il existe une infinité d'ensembles de types d'ondes stationnaires auxquels correspond une suite discrète de fréquences. Ces oscillations sont appelées *oscillations propres*, *normales* (ou *principales*) de la corde. Leur signification est la même que celle des oscillations normales ou modes que nous avons définis au § 137 pour des systèmes discrets. Dans une corde le nombre de types d'oscillations normales est infiniment grand. Cela tient à ce que nous avons assimilé la corde à un système continu possédant un *nombre infini de degrés de liberté*. L'oscillation propre de fréquence minimale $\omega = \pi v/l$ est désignée sous le nom d'*oscillation fondamentale* et toutes les autres oscillations propres sont appelées *harmoniques*.

Ces considérations s'appliquent aux oscillations longitudinales et transversales des tiges élastiques, à la différence près que le spec-

tre des oscillations propres réalisables y est plus riche. Cela tient à ce que les extrémités d'une tige peuvent être soit *fixes*, soit *libres*. Dans le premier cas on arrive aux mêmes résultats que dans celui d'une corde tendue. Dans le deuxième cas les extrémités de la tige doivent être des *ventres de déplacement* et à cela près les résultats sont les mêmes. Enfin on peut envisager le cas où une extrémité de la tige est fixe et l'autre est libre. Dans ce cas l'oscillation fondamentale se réalise si la longueur d'onde est égale au quart de la longueur de la tige. Les longueurs d'onde des autres oscillations propres sont définies par la formule

$$l = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} n, \qquad (140.3)$$

où n est un nombre entier. Les figures 353, *a* et *b* représentent les deux premières oscillations propres d'une tige dont les extrémités sont fixes dans un cas et libres dans l'autre cas. La figure 353, *c* illustre le cas d'une tige dont une extrémité est fixe et l'autre libre.

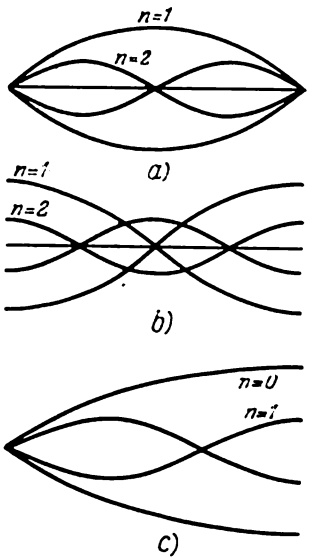


Fig. 353

Pour observer commodément les différents types d'oscillations propres d'une corde tendue, on fixe l'extrémité M d'un cordon de caoutchouc à un mur et on tient à la main son autre extrémité N (fig. 354). En communiquant au cordon, à la main, un ébranlement de fréquence adéquate à la tension du cordon, on arrive à exciter la vibration fondamentale et plusieurs harmoniques. La main tenant le cordon ne se trouve pas au nœud M' mais s'en trouve déplacée. Le rapport OA/NP (fig. 354) est d'autant plus grand que l'écart entre le nœud M' et la position où la main tient le cordon est petit. Cela signifie qu'à amplitude constante des oscillations de la main, les oscillations excitées dans le cordon seront d'autant plus fortes que le point d'application de la force d'excitation est proche d'un nœud de l'onde stationnaire. A l'aide d'une force infiniment petite on peut exciter une oscillation d'amplitude finie si le point d'application de la force se trouve infiniment près d'un nœud. Mais dans ce cas la longueur du cordon comportera un nombre entier de demi-lon-

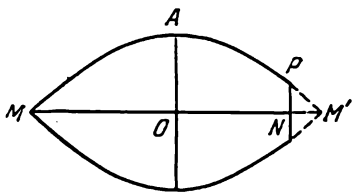


Fig. 354

gueurs d'onde et la fréquence de la force d'excitation sera confondue avec l'une des fréquences propres du cordon. Par conséquent la forte excitation d'oscillations qui en résulte est un phénomène de résonance.

3. Toutes les considérations développées pour le cas de cordes et de tiges s'appliquent aux *ondes électromagnétiques*, à cette différence près que l'onde électromagnétique est définie non pas par un

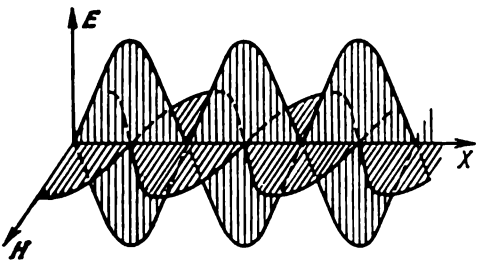


Fig. 355

vecteur, mais par deux vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ rectangulaires. Posons que l'onde électromagnétique se propage dans le sens positif de l'axe X et qu'elle est définie par les équations

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad H_z = H_0 \cos(\omega t - kx).$$

Pour en déduire l'onde qui se propagerait en sens inverse il suffit d'inverser le signe de k et celui de l'un des vecteurs $\boldsymbol{E}$ ou $\boldsymbol{H}$. On obtient ainsi (vecteur $\boldsymbol{H}$ inverse)

$$E_y = E_0 \cos(\omega t + kx), \quad H_z = -H_0 \cos(\omega t + kx).$$

La superposition de ces deux ondes conduit à

$$E_x = 2E_0 \cos kx \cos \omega t, \quad H_y = 2H_0 \sin kx \sin \omega t. \quad (140.4)$$

Ces équations définissent une *onde électromagnétique stationnaire*. Cette onde se compose de deux ondes stationnaires, l'une *électrique* et l'autre *magnétique*. Les équations (140.4) montrent que les oscillations du champ électrique sont déphasées de $\pi/2$ par rapport aux oscillations du champ magnétique. En outre les ventres du champ électrique sont confondus avec les nœuds du champ magnétique et ses nœuds avec les ventres du champ magnétique (fig. 355). Le vecteur de Poynting s'annule aux nœuds (et donc aux ventres) des champs électrique et magnétique. Par conséquent l'énergie électromagnétique ne peut être transférée à travers un nœud. L'énergie oscille entre un nœud (un ventre) du champ électrique et un ventre (un nœud) du champ magnétique.

§ 141. Champ de rayonnement du dipôle de Hertz

1. Le dispositif le plus simple pouvant rayonner des ondes électromagnétiques est le dipôle ponctuel dont le moment dipolaire varie rapidement au cours du temps. C'est le *dipôle de Hertz*, appelé ainsi en l'honneur du savant qui calcula pour la première fois le champ électromagnétique du dipôle ponctuel. En théorie du rayonnement le problème du rayonnement du dipôle de Hertz présente une importance particulière, et ce pour la raison suivante. Tout système rayonnant réel, une antenne parcourue par un courant électrique, peut être décomposé en pensée en une multitude de courants élémentaires qui rayonnent chacun à la manière d'un dipôle de Hertz. Par superposition des champs électromagnétiques de ces éléments de courant on calcule le champ électromagnétique du système rayonnant tout entier. Avant d'exposer la solution du problème de rayonnement du dipôle de Hertz, il est utile de rappeler quelques formules mathématiques que nous aurons à utiliser.

2. Soit la fonction $f = f(r, t - r/v)$, où r est la distance à l'origine des coordonnées, r le rayon vecteur mené par cette origine et v une vitesse constante. Adoptons la notation $t' = t - r/v$. Les dérivées partielles de f par rapport à x, à t et t' constants, sont liées par la relation

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{t'} + \left(\frac{\partial f}{\partial t'}\right)_r \left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right)_t.$$

Comme $(\partial r/\partial x) = x/r$ on en tire

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{t'} - \frac{x}{rv}\frac{\partial f}{\partial t},$$

puisque la signification des dérivées implique que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t'}\right)_r = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Dans ce qui suit nous omettrons l'indice t et nous remplacerons l'indice t' par un prime placé à côté du symbole de la dérivée par rapport à la coordonnée si la dérivation se fait à $t' = \text{const}$. Avec ces conventions on écrira

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial' f}{\partial x} - \frac{x}{rv}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Ainsi les opérateurs $\partial/\partial x$ et $\partial'/\partial x$ sont liés par la relation

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial'}{\partial x} - \frac{x}{vr}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{141.1}$$

et les opérateurs ∇ et ∇' par la relation

$$\nabla = \nabla' - \frac{r}{vr}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{141.2}$$

En multipliant l'opérateur ∇ d'abord de façon scalaire, puis vectoriellement par la fonction vectorielle $A\left(r,\ t-\frac{r}{v}\right)$ on obtient

$$\operatorname{div} A = \operatorname{div}' A - \frac{(r\dot{A})}{vr}, \tag{141.3}$$

$$\operatorname{rot} A = \operatorname{rot}' A - \frac{[r\dot{A}]}{vr}. \tag{141.4}$$

En utilisant les relations $\operatorname{div} r = 3$, $\operatorname{div}(\varphi A) = \varphi \operatorname{div} A + (A \operatorname{grad} \varphi)$, $\operatorname{rot} r = 0$, $\operatorname{rot}(\varphi A) = \varphi \operatorname{rot} A + [\operatorname{grad} \varphi \cdot A]$ et en supposant que le vecteur g ne dépend que de t', on tire de (141.3) et (141.4)

$$\begin{gathered}
\operatorname{div} \frac{g}{r^n} = -n\frac{(gr)}{r^{n+2}} - \frac{(\dot{g}r)}{vr^{n+1}}, \\
\operatorname{div} \frac{(gr)r}{r^{n+2}} = -(n+2)\frac{(gr)}{r^{n+2}} - \frac{(\dot{g}r)}{vr^{n+1}}, \\
\operatorname{rot} \frac{g}{r^n} = n\frac{[gr]}{r^{n+2}} + \frac{[\dot{g}r]}{vr^{n+1}}, \\
\operatorname{rot} \frac{(gr)r}{r^{n+2}} = \frac{[gr]}{r^{n+2}}.
\end{gathered} \tag{141.5}$$

3. Passons maintenant à l'étude du champ de rayonnement du dipôle de Hertz. Posons que le dipôle est fixe et placé dans un milieu homogène de permittivité diélectrique ε et de perméabilité magnétique μ. Confondons l'origine des coordonnées avec la position du dipôle. Si le moment dipolaire p était constant, le vecteur induction D aurait été déterminé par la formule d'électrostatique

$$D = \frac{3(pr)}{r^5}r - \frac{p}{r^3}.$$

A petite distance du dipôle cette formule reste valable même si le moment dipolaire p varie en fonction du temps. Mais à grande distance r du dipôle cette formule cesse d'être valable puisque pour parcourir cette distance, une perturbation électromagnétique se propageant à la vitesse v mettra un temps fini r/v au cours duquel le moment dipolaire p pourrait varier de façon notable. Pour tenir compte de la vitesse finie de propagation des perturbations électromagnétiques, on attribuera au moment dipolaire p figurant dans la formule précédente la valeur qu'il avait à l'instant $t' = t - r/v$, où le signal avait été émis, et non pas sa valeur à l'instant de l'observation t à la distance r. Mais la formule que l'on obtiendra ainsi ne vérifiera pas les équations de Maxwell. En effet si le vecteur D varie en fonction du temps, cela implique l'existence d'un courant de déplacement passant au travers du cercle MN et de tout autre contour con-

tenu dans le plan de MN (fig. 356). Le courant de déplacement excitera un champ magnétique dont les lignes de force embrassent le vecteur $\boldsymbol{p}$, ce qui crée un flux magnétique variable à travers tout contour contenu dans le plan méridien OPQ; il en résultera l'apparition d'un champ électrique contenu dans ce même plan. Ce champ électrique créera à son tour un courant de déplacement à travers tout cercle centré sur l'axe du vecteur $\boldsymbol{p}$. Un champ magnétique auxiliaire apparaîtra aussitôt et excitera un nouveau champ électrique et ainsi de suite. Par raison de symétrie le vecteur $\boldsymbol{D}$ du champ total doit être contenu dans un des plans méridiens et les lignes de force du vecteur $\boldsymbol{H}$ seront des cercles coaxiaux centrés sur l'axe du vecteur $\boldsymbol{p}$.

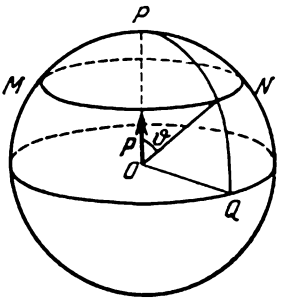


Fig. 356

4. Calculons le vecteur $\boldsymbol{D}$. A petite distance du dipôle l'expression définissant $\boldsymbol{D}$ doit se ramener à la formule de l'électrostatique selon laquelle $\boldsymbol{D}$ décroît en raison inverse du cube de la distance r. A cette expression de l'électrostatique on doit ajouter des termes dépendant des dérivées du vecteur $\boldsymbol{p}$ par rapport au temps et décroissant plus lentement avec la distance. En décomposant tous les termes suivant les directions de $\boldsymbol{r}$ et de $\boldsymbol{p}$, nous chercherons $\boldsymbol{D}$ sous la forme

$$\boldsymbol{D}=\left[\frac{3(\boldsymbol{pr})}{r^5}\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right]+\left[a\frac{(\dot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r})}{vr^4}\boldsymbol{r}+b\frac{\dot{\boldsymbol{p}}}{vr^2}\right]+$$
$$+\left[f\frac{(\ddot{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{r})}{v^2r^3}\boldsymbol{r}+h\frac{\ddot{\boldsymbol{p}}}{v^2r}\right], \qquad (141.6)$$

où a, b, f, h sont des facteurs constants sans dimension parce qu'on a introduit les facteurs v et v^2 dans les dénominateurs de tous les termes additionnels. L'expression de $\boldsymbol{D}$ ne peut contenir de termes d'ordre zéro ou d'ordre positif en r, car ils ne sauraient vérifier la condition à l'infinie où le champ électromagnétique doit devenir nul. De même elle ne peut contenir de termes contenant r à des puissances négatives plus grandes, car dans ce cas on ne retrouverait pas le champ statique à la limite $r \to 0$. On admet que les valeurs de $\boldsymbol{p}$ et de ses dérivées par rapport au temps correspondent non pas à l'instant t, mais à un instant antérieur $t' = t - r/v$, ceci afin de tenir compte de la vitesse de propagation v du champ électromagnétique. Ces considérations ne constituent nullement une démonstration de la validité de l'expression postulée de $\boldsymbol{D}$. Sa validité ne sera prouvée que lorsqu'on aura démontré que les expressions de tous les vecteurs du champ électromagnétique vérifient le système d'équations de Maxwell. C'est ce qu'on fera plus loin.

Le calcul de la divergence de D par les formules (141.5) donne

$$\operatorname{div} D = -2(1+b)\frac{(\dot{p}r)}{vr^4} - (a+b-f+h)\frac{(\ddot{p}r)}{v^2r^3} - (f+h)\frac{(\dddot{p}r)}{v^3r^2} = 0.$$

Comme les vecteurs $\dot{p}$, $\ddot{p}$ et $\dddot{p}$ sont indépendants, les facteurs de cette expression doivent être égaux à zéro, ce qui implique que

$$b = -1, \quad h = -f, \quad a - 2f = 1. \tag{141.7}$$

La relation $h = -f$ indique que le dernier terme de (141.6) est un vecteur orthogonal à r; pour le vérifier il suffit de former le produit scalaire de ce vecteur par le vecteur r. Il en résulte que le flux de ce vecteur à travers n'importe quelle partie d'une sphère centrée à l'origine des coordonnées doit être nul.

Afin de pouvoir déterminer les facteurs a et f il faut connaître la forme de l'expression définissant le champ magnétique H. Calculons le flux $\Phi_{él}$ du vecteur D à travers la partie de la sphère délimitée par le cercle MN (cf. fig. 356). Pour ce faire, multiplions (141.6) par le vecteur unitaire r/r puis intégrons sur la surface de cette partie de la sphère. Compte tenu de (141.7) on obtient

$$\Phi_{él} = \left(\frac{2p}{r} + \frac{a-1}{v}\dot{p}\right)\pi \sin^2\vartheta.$$

Le champ H se trouve défini par l'équation

$$\oint H\,dl = \frac{1}{c}\dot{\Phi}_{él}$$

si on intègre le long du même cercle MN. On trouve ainsi

$$H = \left(\frac{\dot{p}}{cr^2} + \frac{a-1}{2cvr}\ddot{p}\right)\sin\vartheta,$$

et sous forme vectorielle

$$H = \frac{[\dot{p}r]}{cr^3} + \frac{a-1}{2cvr^2}[\ddot{p}r]. \tag{141.8}$$

Le premier terme exprime la loi de Biot et Savart. L'équation $\operatorname{div} H = 0$ se trouve automatiquement vérifiée puisque le champ magnétique est à symétrie axiale et que ses lignes de force sont des cercles dont les centres se trouvent sur l'axe du dipôle (cf. § 53). Il nous reste à trouver le facteur a. Pour ce faire et pour parachever la démonstration nous utiliserons la dernière des équations de Maxwell que nous écrirons comme suit:

$$\operatorname{rot} D = -\frac{\varepsilon\mu}{c}\dot{H}. \tag{141.9}$$

Le calcul de rot D par la formule (141.5) donne

$$\operatorname{rot} D = (a-3)\frac{[\dot{p}r]}{vr^4} - \frac{[\ddot{p}r]}{v^2r^3} - f\frac{[\dddot{p}r]}{v^3r^2}.$$

D'autre part, on déduit de la formule (141.8) et de la relation $c^2 = \varepsilon\mu v^2$

$$-\frac{\varepsilon\mu}{c}\dot{H} = -\frac{[\ddot{p}r]}{v^2r^3} - \frac{a-1}{2v^3r^2}[\dddot{p}r].$$

En identifiant avec l'expression précédente on trouve $a = 3$, $f = 1$. Ces valeurs vérifient également la dernière équation du système (141.7). Ainsi on a satisfait à toutes les conditions du problème et le champ du dipôle de Hertz se présente en définitive sous la forme suivante:

$$D = \left[\frac{3(pr)}{r^5}r - \frac{p}{r^3}\right]_{t-\frac{r}{v}} + \left[\frac{3(\dot{p}r)}{vr^4}r - \frac{\dot{p}}{vr^2}\right]_{t-\frac{r}{v}} + \left[\frac{(\ddot{p}r)}{v^2r^3}r - \frac{\ddot{p}}{v^2r}\right]_{t-\frac{r}{v}},$$

$$H = \frac{1}{cr^3}[\dot{p}r]_{t-\frac{r}{v}} + \frac{1}{cvr^2}[\ddot{p}r]_{t-\frac{r}{v}}. \tag{141.10}$$

L'indice $t - r/v$ dont sont affectés tous les termes sert à rappeler que les valeurs du moment dipolaire p et de ses dérivées par rapport au temps doivent correspondre non pas à l'instant t mais à l'instant antérieur $t - r/v$. Ce « retard » du champ d'un dipôle oscillant témoigne de ce que le champ électromagnétique se propage sous forme d'une perturbation avec la vitesse v.

Les formules (141.10) avaient été établies en supposant implicitement que les vecteurs $\dot{p}$ et $\ddot{p}$ avaient la même direction que le vecteur p, sans que cette hypothèse fût utilisée. De ce fait les formules finales (141.10) sont vérifiées que les directions des vecteurs p, $\dot{p}$, $\ddot{p}$ soient confondues ou non.

5. Le champ décrit par les équations (141.10) peut être décomposé en trois parties d'après la façon dont elles décroissent en fonction de la distance du dipôle r. Pour r petit, lorsque le retard est insignifiant, c'est le premier terme qui prédomine. Ce terme décroît en raison inverse du cube de la distance r et sa valeur instantanée est égale au champ du dipôle statique de moment p. Les termes suivants, l'un électrique et l'autre magnétique, dépendent de $\dot{p}$ et décroissent en raison inverse du carré de la distance r. A petite distance du dipôle le terme magnétique exprime la loi de Biot et

Savart et représente le champ magnétique de l'élément de courant $\dot{p}$. Le terme électrique ne se laisse pas interpréter aussi simplement. Enfin les deux derniers termes, l'un électrique et l'autre magnétique, dépendent de la dérivée seconde du vecteur p. Ces termes décroissent en raison inverse de la distance r, donc plus lentement que tous les autres termes. Pour r grand ce sont ces termes qui deviennent à tel point prédominants qu'on peut négliger tous les autres termes. Dans ce cas on dit qu'il s'agit de la *zone d'onde* du dipôle rayonnant. Si on néglige tous les termes décroissant rapidement, le *champ dans la zone d'onde est*

$$D=\left[\frac{(\ddot{p}r)}{v^2r^3}r-\frac{\ddot{p}}{v^2r}\right]_{t-\frac{r}{v}}=\frac{1}{v^2r^3}[[\ddot{p}r]r]_{t-\frac{r}{v}},$$
$$H=\frac{1}{cvr^2}[\ddot{p}r]_{t-\frac{r}{v}}. \tag{141.11}$$

On en déduit

$$D=\frac{c}{v}[HN],\quad H=\frac{v}{c}[ND], \tag{141.12}$$

où $N=r/r$ est un vecteur unitaire dirigé suivant le rayon vecteur r. Les vecteurs D et H sont mutuellement perpendiculaires et sont tous deux perpendiculaires au rayon vecteur r (fig. 357). Le vecteur D est contenu dans le plan du méridien et le vecteur H sera dirigé le long d'une parallèle si on prend pour axe polaire la direction du vecteur $\ddot{p}$ (à l'instant $t-v/r$). Le champ obtenu dans la zone d'onde est appelé *onde électromagnétique sphérique* *). Dans la zone d'onde les relations entre les vecteurs électrique et magnétique sont les mêmes que pour une onde électromagnétique plane (cf. § 139). Ce résultat est bien naturel puisqu'à grande distance de la source de rayonnement une petite plage du front d'onde sphérique doit se comporter pratiquement comme si elle était plane.

6. Le vecteur densité du flux d'énergie électromagnétique est $S=\frac{c}{4\pi}[EH]=\frac{c}{4\pi\varepsilon}[DH]$. En y portant la valeur de D tirée de (141.12) on obtient

$$S=\frac{c^2}{4\pi\varepsilon v}H^2N,$$

*) Cette dénomination ne correspond pas exactement à la réalité. La symétrie sphérique se rapporte non pas au champ électromagnétique du dipôle, mais à la *forme des fronts d'onde*, i.e. des surfaces jusqu'où parvient simultanément la perturbation : les fronts d'onde sont des sphères dont les centres se trouvent à l'emplacement du dipôle à l'instant de l'émission.

et compte tenu de l'expression (141.11) pour H

$$S = \frac{\sin^2\vartheta}{4\pi\varepsilon v^3 r^2}\,\ddot{p}^2_{t-\frac{r}{v}}\,N, \tag{141.13}$$

où ϑ est l'angle polaire (angle entre les vecteurs $\ddot{p}$ et r).

La formule (141.13) démontre qu'un dipôle oscillant rayonne de l'énergie électromagnétique dans l'espace environnant. Le flux d'énergie est dirigé *suivant le rayon* et sa densité *varie en raison inverse du carré de la distance r*. Le rayonnement *n'est pas isotrope*

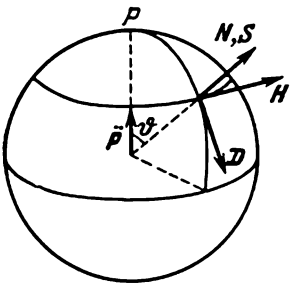


Fig. 357

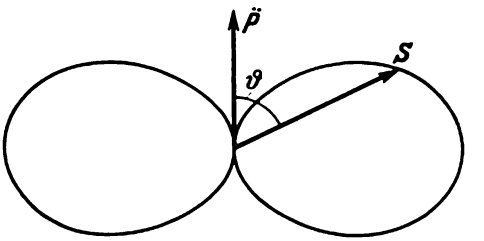


Fig. 358

et présente un maximum pour $\vartheta = 90°$. Le long de la direction du vecteur $\ddot{p}$ le rayonnement est nul. La figure 358 donne une représentation schématique du « diagramme directionnel » du rayonnement du dipôle de Hertz. La puissance de rayonnement totale, i.e. l'énergie totale $-d\mathscr{E}/dt$ rayonnée par unité de temps, s'obtient en multipliant le module de l'expression (141.13) par l'élément de surface de la sphère $2\pi r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta$ et en intégrant le résultat sur toutes les directions :

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2}{3\varepsilon v^3}\,\ddot{p}^2_{t-\frac{r}{v}}. \tag{141.14}$$

7. Jusqu'ici nous n'avons introduit dans le calcul aucune hypothèse sur la nature des variations du moment dipolaire p au cours du temps. Nous allons supposer maintenant que le vecteur p excite des oscillations sinusoïdales $p = p_0 e^{i\omega t}$. On a alors $\dot{p} = i\omega p$ et $\ddot{p} = -\omega^2 p$. En remplaçant le temps t par $t - r/v$ le facteur exponentiel devient $e^{i\omega(t-r/v)} = e^{i(\omega t - kr)}$, où $k = \omega/v$ est le nombre d'onde. On déduit de (141.10)

$$D = \left[\left(\frac{3(p_0 r)}{r^5}\,r - \frac{p_0}{r^3}\right) + ik\left(\frac{3(p_0 r)}{r^4}\,r - \frac{p_0}{r^2}\right) - \right.$$
$$\left. - k^2\left(\frac{(p_0 r)}{r^3}\,r - \frac{p_0}{r}\right)\right] e^{i(\omega t - kr)}$$

et une formule analogue pour H. Cette formule permet de préciser dans quelles conditions l'approximation électrostatique est valable et dans quelles autres il suffit de considérer le champ d'ondes qui varie en raison inverse de la distance r. En effet le rapport de chaque terme de la somme obtenue au terme précédent est de l'ordre de kr. Si $kr \ll 1$ c'est l'*approximation électrostatique* qui convient. C'est la *condition de l'état quasi stationnaire* qu'on peut exprimer par $r \ll \lambda$, où $\lambda = 2\pi/k$ est la longueur d'onde. Si $kr \gg 1$, i.e. $r \gg \lambda$, il suffit de considérer le *champ d'ondes*. La condition $r \gg \lambda$ définit la *zone d'onde* du dipôle oscillant de Hertz.

Pour un dipôle oscillant suivant une loi sinusoïdale la formule (141.14) s'écrit

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2\omega^4}{3\varepsilon v^3} p_0^2 \cos^2(\omega t - kr). \tag{141.15}$$

En prenant la moyenne sur une période T, la puissance rayonnée moyenne est

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{\omega^4}{3\varepsilon v^3} p_0^2. \tag{141.16}$$

La puissance de rayonnement est proportionnelle à la *quatrième puissance de la fréquence* ω. C'est pour cela qu'on utilise des *ondes courtes* pour accroître la puissance des postes émetteurs. La fréquence du courant alternatif du réseau urbain est $\nu = 50$ Hz et la longueur d'onde correspondante est $\lambda = \frac{c}{\nu} = 6 \cdot 10^7$ km. Les courants de cette fréquence ne rayonnent pratiquement pas. Mais si $\lambda = 1$ km, à amplitude égale la puissance rayonnée s'accroîtra de $(6 \cdot 10^7)^4 \approx 10^{31}$ fois!

8. Les résultats que nous venons d'obtenir permettent de calculer le champ électromagnétique d'une charge ponctuelle isolée e en mouvement. Pour effectuer ce calcul nous supposerons que le dipôle est composé de deux charges ponctuelles: e et $-e$ dont la seconde est *infiniment lourde*. Cette seconde charge peut être considérée comme fixe, elle ne créera donc qu'un champ électrostatique coulombien. Si on retranche ce champ du champ total créé par le dipôle, il ne subsistera que le champ créé par la charge mobile e. Exprimons le moment dipolaire par $\boldsymbol{p} = e(\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}')$, où $\boldsymbol{R}$ est le rayon vecteur de la charge e et $\boldsymbol{R}'$ celui de la charge $-e$. Comme $\boldsymbol{R}' = \text{const}$, on a $\dot{\boldsymbol{p}} = e\dot{\boldsymbol{R}} = e\boldsymbol{v}$ et $\ddot{\boldsymbol{p}} = e\dot{\boldsymbol{v}}$, où $\boldsymbol{v}$ est la vitesse et $\dot{\boldsymbol{v}}$ l'accélération de la charge e. La puissance rayonnée est par suite

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2e^2}{3\varepsilon v^3} \dot{\boldsymbol{v}}^2. \tag{141.17}$$

Ainsi *une charge électrique en mouvement accéléré rayonne de l'énergie électromagnétique.*

Il est évident que la formule (141.17) n'est vérifiée que dans l'*approximation non relativiste* puisqu'elle est fondée sur les lois de la cinématique non relativiste.

PROBLÈMES

1. Trouver le champ que rayonne dans un milieu homogène un dipôle magnétique ponctuel de moment magnétique $\mathfrak{M}$.

Solution. Il résulte des équations de Maxwell

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$$

qu'à la limite $r \to 0$ le champ cherché est représenté par la formule (141.10) en y effectuant les substitutions

$$p \to \mathfrak{M}, \qquad D \to B, \qquad H \to -E.$$

2. Un solénoïde infiniment long est parcouru par un courant alternatif Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est $H = \frac{4\pi}{c} i$, i étant le courant par unité de longueur du solénoïde. Si on enfile sur le solénoïde une spire en fil, celle-ci sera traversée par un flux magnétique variable et un courant y sera induit. Or à l'emplacement de la spire le champ magnétique est nul et il n'existe donc aucune raison pour qu'un courant induit apparaisse dans la spire. Donner une explication à ce paradoxe.

Réponse. Le champ magnétique d'un courant alternatif n'est pas nul en dehors du solénoïde (voir problème suivant).

3. Calculer les intensités des champs magnétique et électrique à l'extérieur d'un solénoïde rectiligne de section infiniment petite et de longueur infiniment grande parcouru par un courant alternatif (cf. problème précédent). On ne considérera que l'approximation quasi stationnaire en supposant que la distance R jusqu'à l'axe du solénoïde est petite devant la longueur d'onde λ mais grande devant les dimensions transversales du solénoïde.

Solution. Utilisons les formules donnant le champ électromagnétique du dipôle magnétique ponctuel. Les termes statiques nous sont inutiles et nous négligerons aussi les termes en $\ddot{\mathfrak{M}}$ qui n'importent que dans la zone d'onde. En outre, dans l'approximation donnée, on peut négliger le retard. Avec toutes ces simplifications

$$B = \frac{3(\dot{\mathfrak{M}}r)}{vr^4} r - \frac{\dot{\mathfrak{M}}}{vr^2}, \qquad E = -\frac{1}{cr^3}[\dot{\mathfrak{M}}r]. \tag{141.18}$$

Décomposons le solénoïde infini en cylindres infiniment courts de hauteur dx. Chacun d'eux constitue un dipôle magnétique ponctuel de moment dipolaire $d\mathfrak{M} = \frac{Si}{c} dx$, où S est l'aire de la section droite du solénoïde. Après avoir calculé les champs magnétique et électrique de chacun de ces courants circulaires, on obtient après intégration sur la longueur infinie du solénoïde:

$$B = \frac{\pi S}{2vcR}\frac{di}{dt}, \qquad E = -\frac{2S}{Rc^2}\frac{di}{dt}$$

(on suppose que $\mu = 1$). Le champ magnétique est parallèle à l'axe du solénoïde. Les lignes de force du champ électrique sont des cercles coaxiaux centrés sur

l'axe du solénoïde. Lors de l'intégration sur la longueur infinie du solénoïde les termes statiques figurant dans l'expression du champ électromagnétique du dipôle magnétique ponctuel n'apportent aucune contribution au résultat. C'est pour cette raison qu'ils ne figurent pas dans (141.18).

§ 142. Expériences de démonstration des ondes électromagnétiques

1. Les ondes électromagnétiques ont été obtenues et étudiées pour la première fois par Heinrich Hertz en 1887-1888. Le *vibrateur de Hertz*, qui servait à l'excitation des ondes électromagnétiques, était composé de deux tiges métalliques identiques V et V séparées par un petit espacement où pouvaient jaillir des étincelles (éclateur à étincelles) (fig. 359, à gauche). Les deux tiges étaient reliées à un inducteur I. Lorsque la tension appliquée à l'éclateur à étincelles devenait suffisante pour donner lieu à une décharge disruptive, une étincelle électrique fermait le circuit du vibrateur. A ce moment des oscillations électriques propres amorties de haute fréquence apparaissaient dans le vibrateur; les nœuds de ces oscillations se trouvaient aux extrémités des tiges. C'est l'oscillation propre fondamentale qui était la plus intense et son ventre se trouvait au milieu du vibrateur. Sa longueur d'onde était approximativement égale au double de la distance explosive. Les oscillations propres de fréquences supérieures étaient faibles et ne jouaient pratiquement aucun rôle. Pour empêcher l'écoulement des courants rapidement variables du vibrateur dans la bobine d'inductance on interpose entre celle-ci et le vibrateur une bobine de choc D. Comme nous l'avons indiqué au début du paragraphe précédent le vibrateur que nous venons de décrire peut être assimilé à un système de dipôles de Hertz ponctuels dont les rayonnements s'additionnent pour donner le champ de rayonnement du vibrateur.

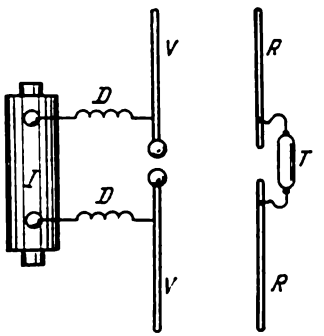


Fig. 359

Pour détecter les ondes électromagnétiques Hertz utilisait des *résonateurs* de différentes formes. Le résonateur le plus simple et le plus commode est le *résonateur rectiligne ouvert* (fig. 359, à droite). Sa forme et ses dimensions doivent être les mêmes que celles du vibrateur rayonnant afin que leurs fréquences propres soient les mêmes. Lorsque l'onde électromagnétique parvient jusqu'au résonateur, elle excite dans celui-ci des courants de hautes fréquences. L'intensité de ces courants est grande lorsque les fréquences propres du vibrateur et du résonateur sont égales (effet de résonance). Hertz constatait l'apparition de ces courants en observant l'apparition

d'une petite étincelle passant à travers un tout petit éclateur se trouvant au milieu du résonateur ou la luminosité d'un petit tube à décharge T inséré entre les deux moitiés du résonateur.

2. Le défaut de l'appareillage de Hertz consistait en ce que les oscillations libres excitées dans le vibrateur *s'amortissaient rapidement* et que leur puissance était faible. Ces défauts sont éliminés lorsqu'on utilise les *générateurs à tubes électroniques* qui permettent de produire des oscillations *sinusoïdales de toute puissance*. On peut les utiliser à la place de l'inducteur I pour exciter des oscillations

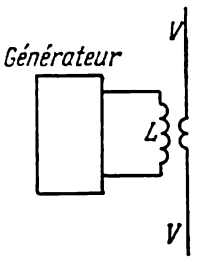


Fig. 360

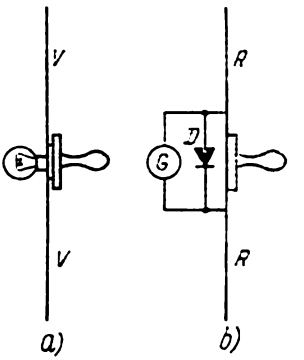


Fig. 361

non amorties dans le vibrateur. Pour ce faire on peut placer par exemple entre les extrémités VV du vibrateur une ou plusieurs spires de fil de cuivre couplées par inductance avec la bobine d'auto-induction L du générateur (fig. 360).

Pour détecter le rayonnement du vibrateur on branche une petite lampe électrique entre les bords du résonateur récepteur (fig. 361, *a*). Ce procédé est particulièrement bien adapté aux expériences de démonstration lorsque la distance entre les vibrateurs et le résonateur est petite et que les oscillations excitées dans le résonateur sont fortes. Pour pouvoir détecter des oscillations plus faibles on introduit dans le résonateur un *détecteur à cristal D* et on connecte à ses bornes un galvanomètre à courant continu G (fig. 361,*b*). La résistance du détecteur dépend du sens du courant. Lorsque le courant passe dans le sens direct, la résistance du détecteur est petite et la tension à ses bornes est petite. Si le courant passe dans le sens inverse, la tension aux bornes du détecteur augmente notablement. Dans le cas d'un courant alternatif le détecteur fait apparaître une composante continue de la tension, de sorte que le galvanomètre est traversé par un courant *de même sens*. C'est ce procédé qu'on utilisera dans la plupart des expériences décrites ci-dessous

On peut aussi remplacer le détecteur par un *cohéreur*, i.e. un petit tube de verre rempli de limaille de fer oxydée. Son fonctionnement sera expliqué par l'expérience suivante.

3. On dispose un vibrateur à étincelle excité par un inducteur dans une pièce contiguë à la salle de cours où se trouve le résonateur avec le cohéreur (fig. 359, à gauche). On insère dans le circuit du cohéreur C, une batterie et un ampèremètre (fig. 362). A l'état normal la résistance de la limaille de fer est très grande et l'ampèremètre n'indique aucun courant. Lorsqu'on branche l'inducteur les ondes électromagnétiques émises par le vibrateur et atteignant le cohéreur

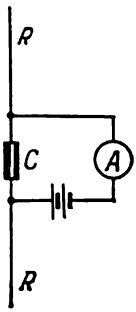


Fig. 362

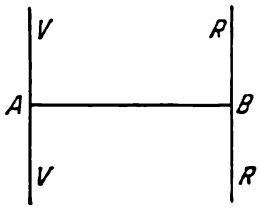


Fig. 363

y font apparaître de petites étincelles entre la limaille. Celle-ci subit un *frittage* qui détermine une forte diminution (de plusieurs centaines de fois) de la résistance électrique. Un courant fourni par la batterie traverse alors l'ampèremètre et ce courant continue à passer lorsqu'on débranche l'inducteur. Mais si on donne de petits chocs sur le cohéreur, la cohésion entre les grains de limaille résultant du frittage est rompue, la résistance du cohéreur augmente fortement et aucun courant ne passe plus par l'ampèremètre. Celui-ci indiquera à nouveau le passage d'un courant dès qu'on branchera l'inducteur qui actionnera le vibrateur électromagnétique.

4. Dans une autre expérience les oscillations dans le vibrateur sont excitées par un générateur à lampes sur une longueur d'onde $\lambda = 3$ m et une fréquence $\gamma = 10^8$ Hz (le schéma du montage est donné sur la figure 360). La réception des ondes émises est assurée par un résonateur muni d'une lampe d'éclairage (cf. fig. 361, *a*). La longueur du vibrateur, égale à celle du résonateur, est $\lambda/2 = 1{,}5$ m. On dispose le résonateur et le vibrateur à une certaine distance parallèlement l'un à l'autre et perpendiculairement à la droite AB passant par leurs centres (fig. 363). Dans ces conditions la lampe d'éclairage brille avec éclat. Si on fait tourner le résonateur autour de l'axe AB, l'éclat de la lampe diminue et disparaît pour un angle de rotation égal à 90°. Une rotation du résonateur autour

d'un axe orthogonal au plan de la figure l'amenant dans une position parallèle à la droite AB conduit aussi à l'extinction de la lampe. Cela tient à ce que les ondes électromagnétiques émises par le vibrateur sont *polarisées rectilignement*, i.e. le vecteur électrique de l'onde au point B est parallèle à l'axe du vibrateur. Seule la composante du vecteur électrique *parallèle à l'axe du résonateur* excite des courants dans le résonateur. Cette composante et donc les courants qu'elle excite sont proportionnels au cosinus de l'angle α que font entre eux les axes du vibrateur et du résonateur. Par conséquent la chaleur de Joule libérée dans la lampe doit être proportionnelle au carré du cosinus du même angle. Si on déplace le résonateur de

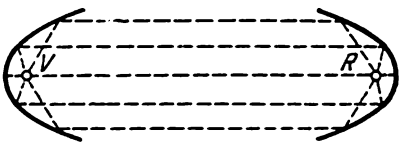


Fig. 364

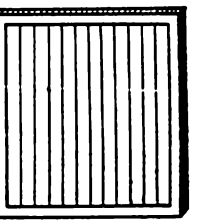


Fig. 365

réception parallèlement à lui-même le long de la droite AB, à mesure qu'on l'éloigne du vibrateur l'éclat de la lampe passe par un maximum puis par un minimum. Cette diminution de l'éclat de la lampe résulte de ce que les ondes émises par le vibrateur sont réfléchies par les murs du local où s'établit une sorte d'onde stationnaire présentant des nœuds et des ventres. L'éclat de la lampe est plus fort aux ventres du champ électrique qu'à ses nœuds.

5. Hertz obtenait des *ondes guidées* semblables à des faisceaux lumineux parallèles en utilisant la réflexion des ondes électromagnétiques sur les surfaces métalliques. Des feuilles métalliques incurvées en forme de cylindres paraboliques faisaient fonction de miroirs. Leurs dimensions étaient plusieurs fois plus grandes que la longueur de l'onde électromagnétique afin d'obtenir une réflexion régulière relativement peu affectée par la diffraction. Il disposait sur l'axe focal de l'un des miroirs un petit vibrateur et un résonateur de réception sur l'axe focal de l'autre miroir. Les ondes électromagnétiques émises par le vibrateur, après avoir été réfléchies par le miroir, se propageaient sous forme d'un faisceau dirigé parallèlement à l'axe optique principal du miroir. Dans le cas où les concavités des miroirs se faisaient face et que leurs axes optiques étaient confondus, le faisceau d'ondes dirigé était réfléchi par le second miroir et se concentrait en son foyer où il excitait de fortes oscillations électriques dans le résonateur (fig. 364, le vibrateur V et le réso-

nateur R sont perpendiculaires au plan de la figure). Si on déplaçait de côté le second miroir le faisceau ne le rencontrait plus et ne pouvait donc exciter des oscillations dans le résonateur. Cette expérience démontre que *la propagation des ondes électromagnétiques est rectiligne*. Si on fait tourner l'un des miroirs (avec le vibrateur ou le résonateur) autour de l'axe optique principal VR, à la réception, l'intensité du signal diminuera et deviendra nulle lorsque le résonateur se trouvera dans une position rectangulaire par rapport au résonateur. Ce résultat s'interprète exactement comme dans le cas de l'expérience décrite plus en haut (point 4).

6. Si on interpose sur le trajet du faisceau d'ondes, entre les miroirs, une feuille de verre, d'ébonite ou d'un diélectrique quelconque, ainsi que des feuilles métalliques, on constatera que les diélectriques se laissent traverser par les ondes électromagnétiques, tandis que les métaux leur sont imperméables. Ce comportement des métaux tient à deux causes intimement liées. La première est que *les métaux réfléchissent fortement les ondes électromagnétiques* et la seconde est que le champ électrique de l'onde électromagnétique qui pénètre à faible profondeur dans les métaux y excite des courants électriques dont l'énergie se transforme en chaleur par effet Joule, ainsi sur une longueur égale à l'épaisseur du métal l'onde est *complètement absorbée*.

7. On peut remplacer la feuille métallique par un réseau de fils de cuivre rectilignes et parallèles (fig. 365). En plaçant ce réseau sur le trajet d'un faisceau d'ondes électromagnétiques dans une position telle que les fils soient parallèles au vibrateur et au résonateur, on constate que les ondes sont arrêtées par le réseau. Cela tient à ce que des courants électriques sont excités le long des fils et l'énergie électromagnétique y est dissipée par effet Joule. Dans le cas où les fils du réseau sont perpendiculaires au vibrateur et au résonateur, ils seront perpendiculaires au vecteur électrique E. Aucun courant n'est alors excité dans les fils et l'onde électromagnétique passe au travers du réseau comme à travers une feuille diélectrique. Cette expérience fournit une nouvelle preuve de la polarisation rectiligne des ondes émises par le vibrateur (cf. point 4 ci-dessus). Notons que le réseau de fils se comporte comme une *plaque* lorsque la distance entre les fils est petite devant la longueur d'onde. La particularité du réseau est qu'il se comporte comme une plaque *anisotrope*. Cette question sera discutée dans le tome IV consacré à l'optique.

Faisons tourner les deux miroirs autour de leur axe optique commun et plaçons le vibrateur et le résonateur en position orthogonale. Le récepteur ne décèlera alors aucun signal. Mais si on interpose entre le vibrateur et le résonateur un réseau de fils métalliques incliné par rapport à l'émetteur et au récepteur, ce dernier décèlera un signal. Pour expliquer ce résultat, décomposons le vecteur électri-

que devant le réseau en une composante parallèle et une composante normale aux fils. Cette dernière passera au travers du réseau et comme son champ électrique a une composante parallèle à l'axe du résonateur, celle-ci y excitera des oscillations.

8. Si on dirige une onde électromagnétique réfléchie par le miroir parabolique au foyer duquel se trouve le vibrateur sur un miroir plan *AB* (feuille métallique plane, fig. 366), on observera le phénomène de la *réflexion de l'onde*. Comme dans le cas d'ondes lumineuses l'angle d'incidence de l'onde est égal à l'angle de réflexion, les normales aux ondes incidente et réfléchie et la normale

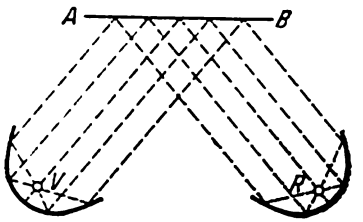


Fig. 366

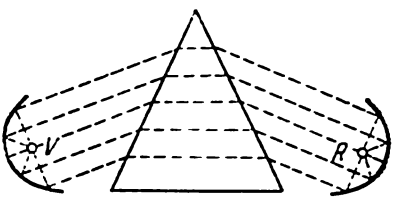


Fig. 367

au plan des miroirs sont toutes contenues dans un même plan. Il est facile de se rendre compte que les métaux réfléchissent les ondes électromagnétiques beaucoup mieux que ne le font les diélectriques.

9. A l'aide d'un grand prisme usiné dans un bloc de diélectrique (paraffine, soufre, etc., fig. 367) on peut réaliser la *réfraction des ondes électromagnétiques* et constater que la *loi de Snellius* (ou *loi de Descartes*) est vérifiée : le rapport des sinus de l'angle d'incidence et de l'angle de réfraction est indépendant de l'angle d'incidence. Ces expériences confirment la validité de la relation $n = \sqrt{\varepsilon}$ entre l'indice de réfraction n du milieu et la permittivité diélectrique ε. Cette relation fut théoriquement établie par Maxwell. Son étude sera faite dans le tome IV.

10. On peut produire aussi des *ondes électromagnétiques stationnaires* en dirigeant l'onde émise par le vibrateur et réfléchie par le miroir parabolique sur un miroir métallique plan. Par superposition de l'onde réfléchie et de l'onde incidente apparaît un système d'ondes stationnaires avec un nœud du champ électrique sur la surface du miroir (cf. § 145). Pour déceler les positions des nœuds et des ventres du champ électrique de l'onde stationnaire, on utilise le résonateur en le déplaçant le long de l'onde. La distance entre nœuds ou ventres voisins est égale à une demi-longueur d'onde. Par mesure de cette distance on détermine la longueur d'onde λ. Dans les expériences de Hertz λ était égale à 60 cm et la hauteur des miroirs paraboliques était de 2 m.

11. Dans les cristaux anisotropes on doit observer une *biréfringence des ondes électromagnétiques* analogue à celle des rayons lumineux. Ce résultat avait été prédit par Maxwell. Une étude détaillée de la biréfringence sera donnée dans le tome IV. Nous noterons ici que les prévisions de Maxwell furent confirmées en 1895 dans les expériences de P. N. Lébédev (1866-1912). Pour réaliser ces expériences il fallait disposer d'ondes électromagnétiques très courtes puisque les dimensions des cristaux ne dépassent pas en général quelques centimètres. Lébédev produisait des ondes d'une longueur de 6 mm environ (cent fois plus courtes que les ondes hertziennes) à l'aide d'un vibrateur à étincelle miniature. Il réussit à reproduire avec un cristal de soufre tous les effets de biréfringence que l'on observe avec les rayons lumineux. En accolant deux cristaux de soufre avec lamelle d'ébonite interposée, il réalisa un dispositif analogue au *prisme de Nicol* utilisé en optique pour obtenir une *lumière polarisée.*

Les expériences de Hertz jouèrent un rôle décisif dans la reconnaissance de l'électrodynamique de Maxwell et de la théorie électromagnétique de la lumière. Sept ans plus tard (1895) les ondes électromagnétiques trouvèrent leur application dans le *téléphone* et la *télégraphie sans fil* (*radio*). Le physicien russe A. S. Popov fut l'un des pionniers de la radio.

§ 143. Ondes dans les fils de Lecher

1. Considérons deux fils conducteurs identiques parallèles dans lesquels on excite à l'aide d'un générateur des courants alternatifs de haute fréquence. Ces fils constituent ce qu'on appelle *système de fils de Lecher.* Le couplage des fils de Lecher au générateur peut être *capacitif* ou *inductif* (fig. 368). Posons que *la condition de l'état quasi stationnaire est réalisée vis-à-vis des dimensions transversales du système*, ce qui implique que la distance entre les fils est petite devant la longueur d'onde. Comme les fils doivent être d'une longueur suffisamment grande pour qu'elle puisse contenir plusieurs longueurs d'onde, les courants électriques parcourant les fils *ne sont pas quasi stationnaires*; par suite l'intensité de courant $\mathcal{J}(x)$ ainsi que la densité linéique des charges électriques $q(x)$ varient notablement le long des fils (l'axe X est parallèle aux fils). Par raison de symétrie le courant $\mathcal{J}(x)$ passant dans l'un des fils est égal et de sens contraire au courant passant dans l'autre fil. La même chose vaut pour les valeurs et les signes des charges portées par les fils. La tension électrique mesurée suivant la normale aux fils sera dénotée par $V(x)$. Il est nécessaire d'indiquer le « chemin » le long duquel on mesure la tension, i.e. l'intégrale $\int E\,dl$, parce que dans un champ électromagnétique alternatif sa valeur *dépend de la forme du « chemin »*.

Pour exposer la théorie de la propagation des ondes le long des fils, au lieu d'utiliser les équations de Maxwell impliquant des courants de déplacement, nous utiliserons une méthode plus simple qu'utilisait déjà Kirchhoff bien avant que Maxwell établît ses équations. Les développements qui suivent s'appliquent aussi à la propagation des ondes le long d'un câble composé de deux cylindres coaxiaux : un cylindre massif intérieur placé dans un cylindre creux

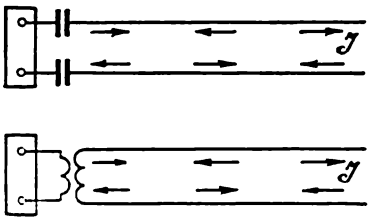


Fig. 368

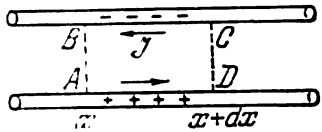


Fig. 369

extérieur, l'espace entre les deux étant rempli d'un diélectrique homogène. Le conducteur extérieur joue le rôle de l'un des fils et le cylindre intérieur celui du second fil du système de Lecher. Mais ces développements sont inapplicables à une ligne ne comportant qu'un seul fil.

2. Considérons dans un système de fils de Lecher un segment infiniment court dx (fig. 369). Une charge électrique $\mathcal{J}(x)\,dt$ pénètre dans ce segment dans le temps dt par l'extrémité A, et une charge $\mathcal{J}(x+dx)\,dt$ en sort par l'extrémité D. La différence entre ces charges est $[\mathcal{J}(x) - \mathcal{J}(x+dx)]\,dt = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}\,dx\,dt$. Comme cette même quantité peut s'écrire $\dot{q}\,dx\,dt$, on a

$$\dot{q} = -\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}, \tag{143.1}$$

équation qui exprime la loi de la conservation des charges électriques.

Appliquons au contour $ADCB$ l'équation $\oint E\,dl = -\frac{1}{c}\dot{\Phi}\,dx$, où $\Phi(x)\,dx$ désigne le flux magnétique embrassé par ce contour. Nous en tirons

$$\int_{DC} E\,dl = V(x+dx), \qquad \int_{BA} E\,dl = -V(x),$$

$$\int_{DC+BA} E\,dl = V(x+dx) - V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx,$$

$$\int_{AD+CB} E\,dl = R\mathcal{J}\,dx,$$

où $R\,dx$ est la résistance totale des éléments AD et CB des fils. Par conséquent

$$\frac{\partial V}{\partial x} + R\mathcal{J} = -\frac{1}{c}\dot{\Phi}. \tag{143.2}$$

Les grandeurs q, Φ et R sont la charge, le flux magnétique et la résistance de l'unité de longueur de la *ligne bifilaire*. Nous supposerons dans ce qui suit que la résistance R est nulle. Mettons en œuvre le fait que le système est quasi stationnaire vis-à-vis des dimensions transversales du système. Si cette condition est vérifiée on peut introduire les notions de capacité C et d'inductance L de l'*unité de longueur de la ligne* en les définissant par les relations

$$q = CV, \quad \Phi = L\mathcal{J}. \tag{143.3}$$

En éliminant q et Φ entre les équations (143.1) et (143.2) (avec $R = 0$) on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} = -C\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{L}{c^2}\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}. \tag{143.4}$$

Ces équations sont *identiques par la forme* aux équations (139.3). Par suite toutes les conclusions que nous avons tirées des équations (139.3) s'appliquent aux fils de Lecher, à condition d'effectuer les substitutions suivantes: $H \to \mathcal{J}$, $E \to V$, $\varepsilon \to cC$, $\mu \to L/c$. On en conclut que la tension et le courant se propagent le long des fils sous forme d'une onde avec la vitesse

$$v = \frac{c}{\sqrt{LC}}. \tag{143.5}$$

Dans une onde progressive la tension et le courant sont liés par la relation

$$V = \pm W\mathcal{J}, \tag{143.6}$$

où

$$W = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{143.7}$$

La grandeur W est appelée *impédance d'onde de la ligne*. Le signe $+$ se rapporte à l'onde qui se propage dans le sens *positif* de l'axe X et le signe $-$ à celle qui se propage dans le sens *négatif* de ce même axe. L'analogie de la formule (143.6) avec la loi d'Ohm est purement apparente puisque V est la tension *entre les fils*, i.e. la tension mesurée suivant une droite orthogonale au courant, tandis que dans la loi d'Ohm il s'agit de la tension mesurée *le long du fil* parcouru par le courant.

Pour des fils cylindriques fins de rayon a

$$L = 2\mu \ln\frac{d}{a}, \quad C = \frac{\varepsilon}{2\ln\frac{d}{a}}, \tag{143.8}$$

où d est la distance entre les fils. De ce fait la formule (143.5) devient

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{143.9}$$

ce qui montre que la vitesse v se confond avec la vitesse de propagation des ondes dans l'*espace libre*.

3. La possibilité de propagation des ondes qu'ouvrent les équations (143.1) et (143.2) peut paraître curieuse d'autant plus que nous n'avons pas fait appel aux courants de déplacement qui déterminent la propagation spatiale du champ électromagnétique avec une vitesse finie. Les équations que nous avons mises en œuvre ne diffèrent pas des équations de l'électrodynamique prémaxwellienne qui postulait la propagation instantanée des interactions des courants avec les charges. Le résultat obtenu s'interprète de la façon suivante. Nous savons que l'équation de Maxwell (82.1) ou (82.1a) qui fait intervenir le courant de déplacement conduit à l'équation de continuité exprimant la conservation des charges électriques (cf. § 82). Cette dernière équation peut être utilisée à la place de (82.1) dans certains cas particuliers, notamment dans l'étude du système bifilaire de Lecher. L'équation de continuité *n'est pas propre* à la théorie de Maxwell seulement et reste valable en théorie de l'action à distance. C'est pour cela que cette dernière théorie appliquée au système de Lecher nous a conduits à une solution correcte, i.e. à l'existence d'une onde se propageant avec une vitesse finie. On doit cependant remarquer que dans cette théorie il s'agit non pas de la propagation d'un champ électromagnétique, mais de la propagation de *charges électriques* ou plus exactement de la propagation de l'*état d'électrisation* le long des fils. Cet effet est parfaitement compatible avec la conception d'une action à distance, comme l'indiquent les considérations ci-dessus. Les ondes électromagnétiques qui se propagent avec une vitesse finie *dans le vide* ou dans un *milieu diélectrique* représentent un résultat spécifique de la *théorie de Maxwell*. Il est évident qu'il n'est pas toujours possible de remplacer l'équation de Maxwell fondée sur la notion de courant de déplacement par l'équation de continuité. Même le problème des fils de Lecher que nous venons de traiter doit se fonder sur les équations de Maxwell pour arriver à une solution rigoureuse et complète.

4. Jusqu'à présent nous n'avons émis aucune hypothèse concernant la forme des oscillations et des ondes créées dans le système de Lecher. Supposons maintenant que les oscillations et les ondes soient *sinusoïdales*. S'il s'agit d'une onde *progressive*, le courant $\mathcal{J}$ et la tension V oscillent *en phase*. Cette conclusion découle directement de (143.6) puisque l'impédance d'onde W est une grandeur *réelle*. Dans une onde progressive les vecteurs électrique et magnétique sont orthogonaux aux fils, tandis que le vecteur de Poynting leur est parallèle. C'est pour cela que *le flux d'énergie* qui apparaît *se*

propage parallèlement aux fils, comme il convient dans toute onde progressive.

Une onde progressive devrait apparaître toujours dans le cas d'une ligne infinie excitée à un bout. Mais si la ligne est *de longueur finie*, des conditions aux limites bien définies doivent être vérifiées à ses extrémités à tout instant. Si les extrémités des deux fils sont *libres*, le *courant électrique* $\mathcal{J}$ doit s'y annuler. Mais si la ligne est *court-circuitée* (ses extrémités sont reliées par un fil de résistance R_1 négligeable) c'est la tension V qui doit s'annuler sur l'extrémité de la ligne. En effet, d'après la loi d'Ohm, dans le fil de connexion le courant $\mathcal{J} = V/R_1$. Si la tension V était finie à l'extrémité de la ligne et $R_1 \to 0$, on aurait obtenu un courant $\mathcal{J}$ infiniment grand, chose physiquement impossible. Les ondes progressives ne satisfont à aucune de ces conditions aux limites. La Nature suggère ici, comme dans tous les autres cas, une solution simple: l'onde *se réfléchit* sur l'extrémité de la ligne et se propage en sens inverse. La superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie fait apparaître une *onde stationnaire*. Nous ne reprendrons pas une nouvelle fois les considérations que nous avons développées au § 140 à propos des ondes stationnaires dans l'espace libre, car il suffit d'indiquer le résultat final dans le cas présent. Les oscillations du courant et de la tension ayant lieu dans les ondes stationnaires sont déphasées de $\pi/2$. Dans le cas d'une ligne ouverte on trouve à son extrémité un nœud de courant et un ventre de tension, et dans le cas d'une ligne en court-circuit on y trouve un ventre de courant et un nœud de tension. Les nœuds de courant sont des ventres de tension et les ventres de courant sont des nœuds de tension. Au milieu de deux ventres de courant on trouve un ventre de tension et au milieu de deux nœuds de courant on trouve un nœud de tension, etc. Dans les nœuds c'est le vecteur $\boldsymbol{E}$ ou le vecteur $\boldsymbol{H}$ qui s'annule et par suite s'y annule le vecteur de Poynting $\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{EH}]$. L'énergie électromagnétique oscille entre un ventre (un nœud) de courant et le nœud (ventre) voisin de tension, mais ne peut traverser un nœud ou un ventre. Le long de la ligne il n'y a aucun transport d'énergie, situation normale pour une onde stationnaire. Les oscillations forcées les plus fortes du courant et de la tension se manifestent dans les mêmes conditions que pour toute autre onde stationnaire. Par exemple, si on trouve aux deux extrémités de la ligne des ventres de courant (ou de tension), cela témoigne de ce que la longueur de la ligne est égale à un multiple entier de demi-longueurs d'onde.

5. Pour réaliser une expérience de démonstration des ondes stationnaires dans un système de Lecher, on prend deux gros fils dénudés de grande longueur que l'on tend à travers la salle de cours. Les fils sont disposés dans un plan horizontal à une distance de 10 cm l'un de l'autre. On alimente la ligne à une extrémité par un

générateur à lampes travaillant sur une longueur d'onde de 3 m. Le circuit oscillant du générateur comporte un condensateur variable qui sert à accorder la ligne à la résonance. L'autre extrémité peut être laissée libre ou être court-circuitée. Pour l'étude des ondes stationnaires on peut utiliser en qualité d'indicateurs soit des *lampes au néon* branchées sur deux fils de la ligne, soit des *spires de fil* aux bornes desquelles on branche de petites lampes d'éclairage. On dispose ces spires en position horizontale entre les fils de la ligne (fig. 370). Ces indicateurs ne déforment que faiblement le champ de l'onde stationnaire. Les lampes au néon s'allument là où

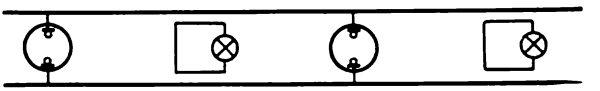


Fig. 370

existe un champ électrique suffisant pour exciter une tension supérieure à la tension d'amorçage. Leur luminosité est grande à proximité des ventres de tension et disparaît aux nœuds. Les lampes d'éclairage, au contraire, s'allument et brillent avec le plus grand éclat lorsque les spires qui les alimentent se trouvent près des ventres et s'éteignent aux nœuds de courant. Lorsqu'une spire se trouve près d'un ventre de courant, elle embrasse un flux magnétique maximal. Comme c'est un flux alternatif, il induit un courant qui alimente la lampe. Aux nœuds de courant le flux magnétique est nul, aucun courant ne peut être induit dans les spires et la lampe ne s'allume pas. A l'aide de ces indicateurs on effectue une exploration de la répartition des nœuds et des ventres.

6. On peut aussi faire une démonstration des ondes stationnaires à l'aide de bobines de 2 à 3 m de longueur ne comportant qu'une seule couche de spires de fil fin (la longueur totale du fil est de quelques kilomètres). Une des bornes de la bobine est connectée à un générateur à lampes ($\lambda \approx 300$ m) et l'autre est court-circuitée. Des ondes stationnaires apparaissent dans le fil et un champ électromagnétique alternatif apparaît dans le milieu environnant. On peut observer les ventres du champ électrique à l'aide d'un tube à décharge dans le gaz en verre disposé parallèlement à la bobine. La luminescence du gaz dans le tube est irrégulière, la distance entre les maximums étant de 20 à 30 cm. On peut aussi utiliser un tube en verre en forme d'anneau rempli de néon que l'on enfile sur la bobine. En le déplaçant le long de la bobine le gaz se met à luire périodiquement. On peut faire varier la forme des tubes au néon et observer les variations de leur luminance en les déplaçant autour de la bobine. Les calculs quantitatifs sont difficiles à faire dans ces différents cas.

PROBLÈME

Les fils de Lecher sont réunis par un pont comportant une bobine d'induction, une résistance ohmique et un condensateur (fig. 371). L'impédance du pont est Z. Les fils et les milieux homogènes dans lesquels ils se trouvent peuvent être différents des deux côtés du pont, de sorte que l'impédance d'onde peut être égale à W en aval du pont et à W' en amont du pont. Une onde qui tombe sur le pont est partiellement réfléchie et la partie restante se propage au-delà du pont. Calculer ces deux parties de l'onde de courant ($\mathcal{J}_r$ partie réfléchie et $\mathcal{J}_d$ partie transmise) ainsi que le courant $\mathcal{J}$ passant par le pont, sachant que le courant de l'onde incidente est $\mathcal{J}_e$.

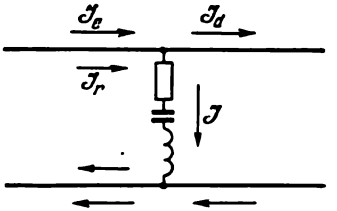


Fig. 371

S o l u t i o n. Près du pont la tension dans les ondes incidente, réfléchie et transmise est

$$V_e = W\mathcal{J}_e, \quad V_r = -W\mathcal{J}_r, \quad V_d = W'\mathcal{J}_d$$

(le signe moins devant le second membre de la deuxième formule sert à indiquer que l'onde réfléchie se propage en arrière). D'après la première loi de Kirchhoff

$$\mathcal{J}_e + \mathcal{J}_r = \mathcal{J} + \mathcal{J}_d.$$

La tension aux extrémités du pont peut s'exprimer par l'une des trois expressions: $Z\mathcal{J}$, $V_e + V_r$, V_d. En les identifiant et en exprimant les tensions par les courants on obtient deux équations:

$$Z\mathcal{J} = W(\mathcal{J}_e - \mathcal{J}_r), \quad Z\mathcal{J} = W'\mathcal{J}_d.$$

La résolution simultanée de ces équations et de l'équation précédente donne

$$\frac{\mathcal{J}_r}{\mathcal{J}_e} = \frac{WW' + (W - W')Z}{\Delta},$$

$$\frac{\mathcal{J}_d}{\mathcal{J}_e} = \frac{2WZ}{\Delta}, \quad \frac{\mathcal{J}}{\mathcal{J}_e} = \frac{2WW'}{\Delta},$$

où

$$\Delta = WW' + (W + W'')Z.$$

Si le pont se trouve à l'extrémité de la ligne, aucune onde ne peut être transmise au delà du pont ($W' = \infty$) et on aura alors

$$\mathcal{J}_r = \frac{W - Z}{W + Z}\mathcal{J}_e, \quad \mathcal{J} = \frac{2W}{W + Z}\mathcal{J}_e.$$

On en déduit les amplitudes et les phases des courants $\mathcal{J}_e$ et $\mathcal{J}$ pour la ligne en court-circuit ($Z = 0$) et pour la ligne à extrémités libres ($Z = \infty$). Dans les deux cas la réflexion est totale mais avec des phases différentes. Si la résistance du pont est purement réactive ($Z = iX$) on a $|\mathcal{J}_e| = |\mathcal{J}_r|$: dans ce cas aussi la réflexion est totale et la réactance n'affecte que les positions des nœuds et des ventres. Si $Z = W$, $\mathcal{J}_r = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'onde réfléchie. Le courant qui arrive dans le pont le long de l'un des fils traverse le pont et retourne à l'origine de la ligne par le second fil.

§ 144. Propriétés des courants rapidement variables. Effet de peau

1. Par suite de la grande conductibilité des métaux le courant de déplacement y est négligeable devant le *courant de conduction*. La pénétration du champ magnétique dans les métaux est, mathématiquement parlant, analogue aux *processus de diffusion*.

Récapitulons d'abord les équations les plus simples caractérisant la diffusion des particules de substance. Considérons des particules contenues dans un long tube rectiligne disposé parallèlement à l'axe X (fig. 372). Posons pour simplifier que l'aire de la section

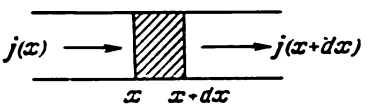


Fig. 372

droite du tube est égale à l'unité. La concentration n des particules dépend de la coordonnée x et du temps t. En désignant par $j(x)$ la densité du courant de diffusion, l'accroissement par unité de temps du nombre de particules dans la couche hachurée sur la figure 372 est donné par la différence $j(x) - j(x + dx) = -\frac{\partial j}{\partial x} dx$. Comme cet accroissement est donné aussi par $\frac{\partial n}{\partial t} dx$, on a

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\dot{n}, \quad j = -D\frac{\partial n}{\partial x}, \tag{144.1}$$

où D est le coefficient de diffusion. Considérons maintenant dans le tube une colonne de substance de longueur l. Posons qu'à l'instant initial la concentration n à l'extrémité gauche de la colonne est différente de zéro et nulle à son extrémité droite. Posons encore que la concentration n est nulle en tout point se trouvant au-delà de l'extrémité droite de la colonne considérée. La densité du courant de diffusion j sera alors égale à $j \sim Dn/l$. Cette même densité est donnée par l'expression $j = nv$, où v est la vitesse de propagation (par diffusion) de la substance le long du tube. On en tire $v \sim D/l$. Le temps τ au bout duquel la substance se sera déplacée de l est $\tau \approx l/v \approx l^2/D$ et par conséquent

$$l \sim \sqrt{D\tau}. \tag{144.2}$$

2. Revenons maintenant au *problème de la pénétration du champ électromagnétique dans les métaux*. En négligeant le courant de dépla-

cement ce processus est décrit par les équations

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{B}}.$$

A l'aide des relations $\boldsymbol{j} = \lambda \boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$, éliminons les vecteurs $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{H}$ entre ces deux équations:

$$\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi\mu} \operatorname{rot} \boldsymbol{B}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{j} = -\frac{\lambda}{c} \dot{\boldsymbol{B}}.$$

Supposons que toutes les grandeurs ne dépendent que de la *seule coordonnée* x et écrivons pour ce cas les équations ci-dessus sous forme scalaire. En procédant comme dans le cas des formules (139.2) on constate que les équations obtenues forment deux groupes, le premier groupe d'équations contient j_y et B_z et l'autre j_z et B_y. Comme ces deux groupes d'équations sont *indépendants*, il suffit de ne considérer qu'un seul groupe d'équations. On peut donc poser que le courant $\boldsymbol{j}$ est parallèle à l'axe Y et que le champ $\boldsymbol{B}$ est dirigé le long de l'axe Z. Dans ce cas

$$\frac{\partial j}{\partial x} = -\frac{\lambda}{c} \dot{B}, \quad j = -\frac{c^2}{4\pi\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{c} B \right). \tag{144.3}$$

Ces équations se ramènent à (144.1) en remplaçant n par $\frac{\lambda}{c} B$ et en posant

$$D = \frac{c^2}{4\pi\mu\lambda}. \tag{144.4}$$

Ainsi la propagation du champ électromagnétique dans un métal peut être décrite par les *équations de diffusion*, le *rôle de coefficient de diffusion étant attribué à la grandeur* (144.4).

Considérons le cas où un courant alternatif de période T circule sur la surface plane d'un métal. Au bout d'une demi-période $T/2$ le sens du courant s'inverse. Comme le montre la formule (144.2), pendant cet intervalle de temps le champ magnétique et le courant électrique pénètrent dans le métal à une profondeur

$$l \sim \sqrt{D \frac{T}{2}} \sim c \sqrt{\frac{T}{8\pi\mu\lambda}} \sim \frac{c}{\sqrt{8\pi\mu\lambda\nu}}, \tag{144.5}$$

où $\nu = 1/T$ est la fréquence du courant alternatif.

Ainsi la densité de courant dans le métal *diminue avec la profondeur de pénétration*. Le courant ne circule pratiquement qu'à la surface du métal dans une couche d'épaisseur l environ. Cet effet porte le nom d'*effet de peau* (ou *skin-effect*); la grandeur l est la *profondeur de pénétration du courant* (ou du champ magnétique) dans le métal. La profondeur de pénétration diminue avec la fréquence proportionnellement à $1/\sqrt{\nu}$. Dans le cas du cuivre $\lambda =$

$= 5{,}4 \cdot 10^{17}$ s^{-1} (en posant $\mu = 1$). A la fréquence du réseau urbain $\nu = 50$ Hz, la formule (144.5) donne $l \approx 0{,}7$ cm ~ 1 cm. Si $\nu = 5000$ Hz, $l \sim 0{,}1$ cm et si $\nu = 5 \cdot 10^5$ Hz, $l \sim 0{,}01$ cm. Les courants haute fréquence ne circulent que dans une mince couche superficielle du métal. Pour simplifier les calculs nous avons considéré un métal de dimension infinie délimitée par une surface plane, mais il est évident que l'effet de peau se manifeste aussi lorsque le courant est transporté par des fils. La formule donnant la profondeur de pénétration se distinguera de (144.5) par un facteur dont la valeur dépend du rayon du fil. Comme ce facteur est de l'ordre de l'unité, nos considérations n'en sont pas affectées.

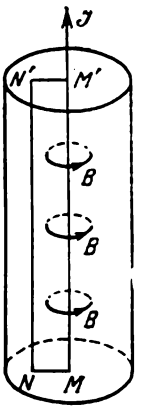


Fig. 373

3. Donnons maintenant une explication qualitative de l'effet de peau. Considérons un fil cylindrique parcouru par un courant alternatif $\mathcal{J}$ (fig. 373). Traçons dans la section méridienne du fil un contour rectangulaire $MM'N'N$ dont le côté MM' coïncide avec l'axe du fil. Si nous posons qu'à l'instant considéré le courant $\mathcal{J}$ est dirigé de bas en haut, les lignes de force magnétiques embrasseront le fil comme indiqué sur la figure 373. Si l'intensité de courant $\mathcal{J}$ et le flux magnétique Φ traversant le contour $NMM'N'$ augmentent, il apparaît un champ électrique induit $\boldsymbol{E}_{\text{ind}}$ orienté suivant la verticale ascendante sur NN' et suivant la verticale descendante sur MM'. Ce champ renforce le courant sur la périphérie NN' du fil et l'affaiblit sur l'axe MM'. Si le courant $\mathcal{J}$ diminue, le sens du champ $\boldsymbol{E}_{\text{ind}}$ s'inverse et le courant devient plus fort sur l'axe MM' et plus faible à la périphérie NN' du fil. Ainsi, quelle que soit la variation du courant $\mathcal{J}$, le courant induit renforce la variation du courant à la périphérie et s'oppose à sa variation sur l'axe du fil. Par suite en régime permanent l'amplitude des oscillations du courant sur NN' est plus grande que sur MM'. A mesure qu'on s'éloigne de l'axe du fil, l'amplitude des oscillations de courant devient plus grande, puisque le flux magnétique Φ embrassé par le contour $MM'N'N$ augmente avec la distance MN. Cette redistribution du courant sur la section du fil constitue l'effet de peau.

La concentration du courant à la surface du fil fait que tout fil massif se comporte comme s'il était creux avec une épaisseur des parois approximativement égale à la profondeur de pénétration l. De ce fait la résistance du fil augmente et son inductance diminue. Il s'ensuit que dans le cas de courants rapidement variables, il convient d'utiliser des conducteurs tubulaires, car si on utilisait des fils massifs, la région interne autour de l'axe resterait inutilisée. Pour fixer les idées sur l'influence qu'exerce l'effet de peau sur la

résistance électrique des fils indiquons que pour un courant alternatif de fréquence $\nu = 50$ Hz la résistance d'un fil de cuivre de 2 cm de diamètre s'accroît par rapport à la résistance en courant continu de 3 %, et celle d'un fil de 2 mm de 0,0003 % seulement. Dans le cas où ce dernier fil serait parcouru par un courant alternatif de fréquence $\nu = 10^6$ Hz, sa résistance augmenterait de 7 fois. Si le fil n'est pas rectiligne mais enroulé sur une carcasse cylindrique, la répartition du courant sur la section de fil n'est plus symétrique: la densité de courant est plus forte dans la partie du fil qui se trouve plus près de la carcasse.

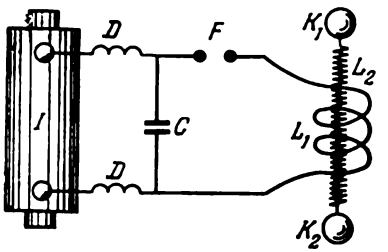


Fig. 374

4. Lorsque le courant électrique varie rapidement la variation du champ magnétique qu'il engendre est aussi rapide. Les effets inductifs des courants rapidement variables peuvent donc être très importants. On peut les renforcer encore à l'aide de l'effet de résonance. C'est le principe de fonctionnement du *transformateur à résonance* haute fréquence *de Tesla* (1856-1943). C'est un transformateur sans noyau magnétique (transformateur à air) dont l'enroulement primaire L_1 ne comporte qu'un petit nombre de spires de fil de forte section et fait partie d'un circuit oscillant comportant un condensateur (bouteille de Leyde) C et un éclateur à étincelles F. Le circuit oscillant est couplé à l'aide de bobines d'induction D à l'inducteur I (fig. 374). L'enroulement secondaire L_2 placé sous l'enroulement primaire est constitué d'un grand nombre de spires de fil fin bobiné en une seule couche sur un cylindre isolant. Les deux enroulements ainsi que les spires du secondaire doivent être bien isolés les uns des autres. Pour y arriver on revêt l'enroulement secondaire d'une couche de paraffine et on l'immerge dans de l'huile isolante. Lorsqu'une étincelle traverse l'éclateur F le primaire est le siège d'oscillations électriques de haute fréquence, et le secondaire de courants induits de même fréquence. Comme la bobine L_2 possède ses fréquences propres, les oscillations des courants induits de haute fréquence sont particulièrement fortes lorsque l'une de ces fréquences (le plus souvent la fréquence fondamentale) coïncide avec la fréquence propre du circuit oscillant. Lorsque les oscillations correspondent à la fréquence propre, un ventre de courant s'établit au milieu de la bobine et le champ électrique est maximal à ses extrémités. L'amplitude des oscillations de tension aux bornes du secondaire est alors beaucoup plus grande que l'amplitude des oscillations de tension aux bornes du condensateur du primaire. On le démontre à l'aide de la formule donnant l'énergie électrique du condensateur

$W_e = \frac{1}{2} CV^2$ en remarquant que l'énergie électromagnétique passe du primaire dans le secondaire et en supposant qu'il n'y a pas de pertes d'énergie. En effet, comme la capacité du secondaire est beaucoup plus petite que celle du condensateur du circuit primaire, la tension aux bornes du secondaire doit être plus grande. On s'assurera de la même façon que l'amplitude du courant dans le secondaire est notablement plus petite que dans le primaire *).

L'existence d'un champ électrique intense près des bornes K_1 et K_2 du secondaire se révèle de façon spectaculaire par des décharges luminescentes bien visibles dans l'obscurité. Lorsqu'on s'approche des bornes K_1 et K_2 des conducteurs mis à la terre, de longues étincelles jaillissent. Tesla arrivait à produire des étincelles de deux mètres de longueur, ce qui correspond à une tension supérieure à un million de volts. On peut tirer des étincelles d'autres parties de l'enroulement secondaire, mais plus faibles que celles que l'on observe aux extrémités. Près du milieu du secondaire où se trouve le nœud de tension aucune étincelle ne peut jaillir. Les tubes luminescents se mettent à luire même à grande distance d'un transformateur de Tesla.

Malgré leur haute tension, les courants rapidement variables générés par le transformateur de Tesla sont sans danger pour l'homme et on les utilise à des fins médicales. L'homme peut supporter sans éprouver de sensations désagréables un courant alternatif de 50 Hz d'une intensité allant jusqu'à 0,1 A, mais à une fréquence de 10^5 Hz il supporte sans inconvénient une intensité de courant de 0,8 A (ces valeurs limites sont différentes pour différentes personnes). On peut réaliser l'expérience suivante. On enroule deux ou trois fois un fil de cuivre dénudé sur le socle d'une lampe à incandescence et l'expérimentateur placé sur un banc isolé tient l'autre bout du fil à la main. Il approche l'extrémité du second fil de connexion de la boule supérieure du secondaire du transformateur de Tesla dont la boule inférieure est reliée à la terre. La lampe luit d'une lumière vive quoique son circuit ne soit pas fermé (l'expérimentateur s'est placé sur un banc isolant). Cela résulte de ce que pendant une demi-période la lampe et le corps de l'expérimentateur se chargent d'élec-

*) Ce type de raisonnement, quoique largement utilisé, manque de netteté. Le secondaire présente une capacité et une inductance déterminées. Or ces notions ne valent que pour des champs continus ou quasi stationnaires, tandis que dans le transformateur de Tesla nous avons affaire à des champs haute fréquence qui ne sont pas quasi stationnaires. La signification de la tension manque aussi de clarté puisque dans les champs a ternatifs l'intégrale $\int E\, dl$ dépend du chemin d'intégration. Une démonstration rigoureuse et claire devrait être fondée sur le système d'équations de Maxwell, mais une telle démonstration n'existe pas encore.

tricité d'un signe donné et pendant l'autre demi-période ils se chargent de la même quantité d'électricité de signe contraire. Comme la fréquence des oscillations est grande (10^6 Hz et au-dessus) ces alternances de charge et de décharge sont suffisamment rapides pour produire un courant alternatif d'intensité suffisante pour porter à incandescence le filament de la lampe. Le corps de l'expérimentateur est alors traversé par un courant de plusieurs ampères. Un courant continu d'une telle intensité aurait exercé des effets physiologiques pouvant entraîner la mort. Mais comme dans cette expérience il s'agit de courants de haute fréquence, ces courants ne circulent qu'à la périphérie de l'épiderme et ne peuvent donc affecter le système nerveux et les organes vitaux de l'homme. On peut même approcher la main du secondaire et faire jaillir une étincelle sans éprouver de sensation douloureuse.

PROBLÈME

Nous avons mentionné au § 47 que l'on utilisait des tensions alternatives pour la mesure des champs électrostatiques dans des modèles placés dans une cuve électrolytique. Préciser les limites d'application de ce procédé.

Solution. Il importe avant tout que soit respectée l'approximation des états quasi stationnaires. Si le liquide est conducteur, cela implique que les dimensions L de la cuve soient petites non seulement devant la longueur Λ de l'onde électromagnétique dans l'électrolyte mais aussi devant la profondeur de pénétration l du champ électromagnétique dans l'électrolyte résultant de l'effet de peau. (Nous dénotons par Λ la longueur d'onde et par λ la conductivité de l'électrolyte.) D'autre part il est nécessaire que soit vérifiée la condition de validité de la méthode des sections. On justifie cette méthode en imposant que la composante normale du champ électrique régnant dans l'électrolyte soit nulle à sa surface; pour les champs alternatifs cette condition n'est vérifiée qu'approximativement. Si nous posons que la surface de l'électrolyte est en contact avec l'air on doit avoir sur la surface de séparation

$$-D_n + D_{0n} = 4\pi\sigma, \quad j_n = \frac{\partial\sigma}{\partial t},$$

où D et D_0 désignent les vecteurs inductance dans l'électrolyte et dans l'air, σ la densité surfacique des charges, j la densité de courant dans l'électrolyte (la normale est dirigée de l'électrolyte dans l'air). Introduisons les champs électriques E et E_0 et supposons qu'ils sont de la forme $\sim e^{i\omega t}$. On aura alors

$$E_{0n} - \varepsilon E_n = 4\pi\sigma, \quad \lambda E_n = i\omega\sigma,$$

d'où

$$E_n = \frac{E_{0n}}{\varepsilon - i\dfrac{4\pi\lambda}{\omega}}, \qquad D_n = \frac{E_{0n}}{1 - i\dfrac{4\pi\lambda}{\omega\varepsilon}}.$$

Le saut de la composante normale du vecteur D résulte de la présence de charges électriques superficielles à la surface de l'électrolyte. La présence de ces charges affaiblit le champ créé par les électrodes à l'intérieur de l'électrolyte et le renforce en dehors de celui-ci. Si la condition $|D_n| \ll E_{0n}$ est vérifiée, les charges superficielles compensent presque totalement la composante normale du champ des électrodes régnant dans l'électrolyte à sa surface. Pour que la

compensation soit totale, il suffirait de modifier de très peu la densité surfacique σ. Dans ce dernier cas on aurait obtenu $E_n = 0$ et la condition de validité de la méthode des sections aurait été satisfaite pour ce champ déformé. Or une petite variation de la densité σ n'entraînerait qu'une petite variation du champ dans l'électrolyte. On posera donc que si

$$\varepsilon \ll \frac{4\pi\lambda}{\omega},$$

la composante normale E_n à la surface de l'électrolyte sera pratiquement nulle. Cette inégalité exprime la condition de validité de la méthode des sections. En utilisant la formule (144.5) et l'expression $\Lambda = \frac{2\pi c}{\omega\sqrt{\varepsilon}}$ l'inégalité ci-dessus s'écrit sous la forme $l \ll \Lambda$. La condition de validité de la méthode de la cuve électrolytique peut s'écrire définitivement comme suit:

$$L \ll l \ll \Lambda. \tag{144.6}$$

En y portant les expressions de l et de Λ on obtient

$$\nu \ll \frac{c}{L\sqrt{\varepsilon}}, \tag{144.7}$$

$$\frac{\nu\varepsilon}{8\pi} \ll \lambda \ll \frac{c^2}{8\pi\nu L^2}. \tag{144.8}$$

Avec $L = 1$ m, $\varepsilon = 81$, on tire de (144.7) $\nu \ll 3\cdot10^7$ Hz, quelle que soit la conductivité de l'électrolyte. A la fréquence limite $3\cdot10^7$ Hz la condition (144.8) conduit à

$$9{,}7\cdot10^7 \ll \lambda \ll 12\cdot10^7 \text{ s}^{-1}.$$

Ce résultat montre que la méthode de la cuve électrolytique (avec $L \sim 1$ m) ne peut être utilisée à des fréquences de l'ordre de 10^7 Hz. Pour les fréquences que l'on utilise généralement ($\nu \sim 10^3$ Hz) on a

$$3\cdot10^3 \ll \lambda \ll 3\cdot10^{12} \text{ s}^{-1}$$

ou

$$10^{-9} \ll \lambda \ll 1 \text{ ohm}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}.$$

§ 145. Pression et impulsion des ondes électromagnétiques

1. Selon les prévisions théoriques de Maxwell les ondes électromagnétiques qui tombent sur un corps y subissent une réflexion ou une réfraction et exercent sur ce corps une certaine *pression*. Cette pression résulte de l'action exercée par le champ magnétique de l'onde sur les courants électriques excités dans le corps par le champ électrique de la même onde électromagnétique, ou parfois de l'action simultanée du champ électrique de l'onde sur les charges électriques induites dans le corps par ce même champ. Considérons, par exemple, une onde électromagnétique progressive plane se propageant dans un milieu homogène. Si le milieu est absorbant et donc conducteur, le champ électrique de l'onde y excitera un courant électrique de densité $j = \lambda E$. Par conséquent sur l'unité

de volume du milieu s'exerce la force $f = \frac{1}{c}[jB] = \frac{\lambda}{c}[EB]$ dirigée dans le sens de propagation de l'onde. C'est cette force qui provoque la pression de l'onde électromagnétique. Si le milieu n'est pas absorbant ($\lambda = 0$), $f = 0$ et la propagation de l'onde électromagnétique ne donne lieu à aucune pression sur le milieu.

2. Pour pouvoir calculer la pression des ondes électromagnétiques et pour mettre en évidence l'origine de cette pression, nous considérerons d'abord un cas particulier. Une onde électromagnétique plane

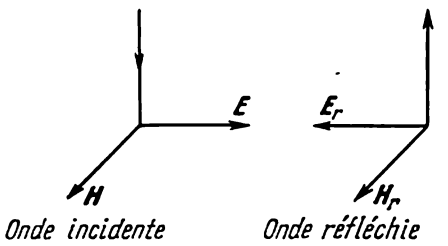


Fig. 375

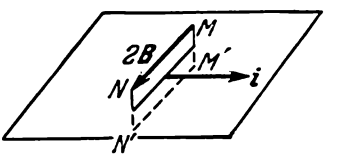


Fig. 376

se propageant dans le vide tombe sur la surface plane d'un métal parfaitement conducteur (fig. 375). Comme la direction de l'onde change lorsqu'elle se réfléchit sur la surface du métal, l'un de ses vecteurs $\boldsymbol{E}$ ou $\boldsymbol{H}$ doit changer de sens. Il est presque évident que c'est le sens du vecteur $\boldsymbol{E}$ qui doit s'inverser. En effet comme le second milieu est parfaitement conducteur ($\lambda = \infty$) le champ électrique doit y être nul, sinon en vertu de la loi d'Ohm $j = \lambda E$ le milieu serait parcouru par des courants électriques de densité infiniment grande, chose qui est physiquement impossible. Comme les composantes tangentielles du champ électrique sont continues, à la surface de séparation le vecteur électrique doit s'annuler aussi dans le premier milieu. Or dans le premier milieu le champ se compose du champ $\boldsymbol{E}$ de l'onde incidente et du champ $\boldsymbol{E}_r$ de l'onde réfléchie. On doit donc avoir sur cette surface $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_r = 0$, i.e. $\boldsymbol{E}_r = -\boldsymbol{E}$, ce qu'il fallait démontrer. Mais sur cette même surface le vecteur magnétique de l'onde réfléchie sera $\boldsymbol{H}_r = \boldsymbol{H}$ et le champ magnétique résultant dans le premier milieu sera égal à $\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_r = 2\boldsymbol{H}$. Ainsi au passage de la surface de séparation, le vecteur magnétique change par saut de $2\boldsymbol{H}$. Cela signifie que la surface de séparation est parcourue par un courant superficiel de densité linéique $\boldsymbol{i}$ dirigé le long de la direction du vecteur $\boldsymbol{E}$ (fig. 376). On trouve la densité linéique de ce courant en appliquant le théorème sur la circulation au contour $MNN'M'$: $2H = \frac{4\pi i}{c}$, d'où $i = \frac{cH}{2\pi}$.

Dans le calcul de la force qui agit sur une surface élémentaire dS d'un corps parcourue par le courant $i\,dS$ il faut faire preuve de circonspection. En effet cette force est déterminée par le champ magnétique H_{ext} qui est *extérieur au courant $i\,dS$ lui-même.* Il est évident que sur la surface élémentaire dS ce champ extérieur est le même de part et d'autre de cette surface, i.e. il est continu. Quant au champ magnétique propre du courant $i\,dS$, il subit une discontinuité sur la surface de séparation. Si du côté du vide on le dénote par H_{pr}, du côté du métal ce champ sera égal à $-H_{\text{pr}}$ par raison de symétrie. En appliquant le théorème sur la circulation au contour $MNN'M'$ on trouve $H_{\text{pr}} = \frac{4\pi i}{c} = H$. En soustrayant cette valeur du champ total $2H$ régnant dans le vide on trouve $H_{\text{ext}} = H$. (On arrive au même résultat en imposant qu'à l'intérieur du métal le champ extérieur doit compenser exactement le champ propre.) La force que le champ extérieur exerce sur le courant $i\,dS$ est dirigée vers l'intérieur du métal, c'est donc une *force de pression.* La pression exercée sur l'unité de surface du métal est

$$\mathcal{P} = \frac{1}{c}\overline{iH_{\text{ext}}} = \frac{1}{2\pi}\overline{H^2}, \tag{145.1}$$

où les traits au-dessus des symboles indiquent le moyennage dans le temps. Compte tenu de l'égalité $E = H$ on peut écrire

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi}\overline{EH} = \frac{1}{4\pi}(\overline{E^2} + \overline{H^2}) = 2\overline{w}, \tag{145.2}$$

où $\overline{w}$ est la densité moyenne de l'énergie électromagnétique de l'onde incidente. Ainsi une onde électromagnétique tombant sous incidence normale sur une surface métallique parfaitement réfléchissante exerce sur celle-ci une pression égale au *double de la densité moyenne d'énergie de l'onde incidente.*

3. On peut analyser de la même manière le cas d'une *incidence oblique de l'onde électromagnétique*, mais le calcul en est un peu plus laborieux, car dans ce cas sont discontinues les composantes tangentielles du champ magnétique et les composantes normales du champ électrique. La discontinuité des composantes normales signifie que des *charges électriques* apparaissent sur la surface du métal ; il faudra donc tenir compte des forces que le champ électrique exerce sur ces charges. Dans ce cas la pression de l'onde électromagnétique résulte de *deux causes* différentes et se compose d'une « *force magnétique* » qui est la force que le champ magnétique exerce sur les courants superficiels circulant à la surface du métal et d'une « *force électrique* » qui est la force que le champ électrique exerce sur les charges superficielles du même métal. Nous ne ferons pas ces calculs puisqu'on peut utiliser une approche plus générale de l'étude de la pression des ondes électromagnétiques.

4. Supposons à nouveau que l'onde tombe sous incidence normale sur la surface d'un métal parfaitement conducteur. Supposons encore que le champ de l'onde est contenu dans un cylindre de hauteur c et de base unité. L'axe du cylindre est confondu avec la direction de propagation de l'onde. L'onde irradie le métal pendant une seconde. Comme cette onde exerce une pression $\mathcal{P}$ sur la surface du métal, ce dernier acquiert pendant ce temps une impulsion $I_{\text{sub}} = \mathcal{P} = \frac{1}{2\pi}\overline{EH}$ et sous forme vectorielle $I_{\text{sub}} = \frac{1}{2\pi}[\overline{EH}]$. Dans un système fermé constitué par le métal et le champ électromagnétique la *loi de la conservation de l'impulsion aurait été en défaut* si *seule la substance* possédait une impulsion. Dans ce système la conservation de l'impulsion ne sera assurée que si *l'onde électromagnétique possède aussi une impulsion*: le métal acquiert une impulsion aux dépens de l'impulsion de l'onde électromagnétique. Pour calculer l'impulsion de l'onde électromagnétique incidente $I_{\text{él}}$ on remarquera qu'à la réflexion *le module de l'impulsion de l'onde reste inchangé, mais son sens s'inverse*; autrement dit la variation que subit l'impulsion électromagnétique à la réflexion est égale à $\Delta I_{\text{él}} = -I_{\text{él}} - (+I_{\text{él}}) = -2I_{\text{él}}$, tandis que la variation de l'impulsion de la substance est $\Delta I_{\text{sub}} = I_{\text{sub}}$. La loi de la conservation de l'impulsion impose que $\Delta I_{\text{él}} + \Delta I_{\text{sub}} = 0$, d'où $I_{\text{él}} = \frac{1}{2} I_{\text{sub}} = \frac{1}{4\pi}[\overline{EH}]$. En divisant ce résultat par la longueur c du cylindre on trouve l'impulsion électromagnétique moyenne par unité de volume, i.e. la densité moyenne d'impulsion électromagnétique

$$\overline{g}_{\text{él}} = \frac{1}{4\pi c}[\overline{EH}] = \frac{1}{c^2}\overline{S}, \tag{145.3}$$

où S est le vecteur de Poynting. Nous avons supposé ci-dessus que l'onde tombait normalement à la surface métallique, mais cette circonstance ne peut affecter le caractère général du résultat (145.3) puisque la densité de l'impulsion $g_{\text{él}}$ est une caractéristique de l'onde électromagnétique et ne peut dépendre des corps avec lesquels l'onde entre en interaction. Ces résultats sont conformes à nos considérations sur la quantité de mouvement électromagnétique, développées au § 84.

5. Un exemple illustrera l'application de la formule (145.3) au calcul des forces que le rayonnement exerce sur les corps. Soit une onde électromagnétique incidente qui se propage le long de la normale unitaire N et qui se réfléchit en partie dans la direction de la normale N' et pénètre en partie dans le second milieu où elle est absorbée (fig. 377). Si l'onde tombe sur une surface AB d'aire unité sous un angle d'incidence φ les sections droites des faisceaux incident et réfléchi sont toutes deux égales à $\cos\varphi$. Considérons des

faisceaux de longueur c. L'impulsion que la radiation transmet par seconde au corps est égale à $I = \cos\varphi\,(\bar{w}N - \bar{w}'N') = \bar{w}\cos\varphi\,(N - \rho N')$, où $\bar{w}$ et $\bar{w}'$ sont les densités moyennes d'énergie des ondes incidente et réfléchie et ρ est le *coefficient de réflexion*. Le rayonnement exerce sur l'unité d'aire AB de la surface du corps une force $f = I$. Sa projection sur la normale n à la surface du corps est la pression de radiation

$$\mathcal{P} = \bar{w}\cos^2\varphi\,(1+\rho), \qquad (145.4)$$

et sa projection sur l'axe X est la force tangentielle moyenne appliquée à la surface AB :

$$\tau = \bar{w}\sin\varphi\cos\varphi\,(1-\rho). \qquad (145.5)$$

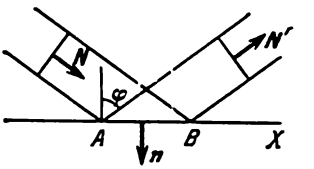


Fig. 377

Lorsque $\rho = 1$ on retrouve pour une incidence normale le résultat $\mathcal{P} = 2\bar{w}$. Dans le cas où le milieu absorbe totalement la radiation incidente ($\rho = 0$) on a $\mathcal{P} = \bar{w}$, i.e. la pression de radiation est deux fois plus petite.

6. Pour se faire une idée de l'ordre de grandeur de la pression de radiation, calculons la valeur de la pression qu'exerce le rayonnement solaire sur la surface terrestre. Selon des mesures directes la densité moyenne du flux d'énergie est $\bar{S} = 2$ cal/(cm^2·mn) $= 1{,}4\cdot10^3$ W/m^2. Pour une surface parfaitement absorbante et pour un rayonnement normal à cette surface la pression de radiation est égale à $\mathcal{P} = \bar{S}/c = 4{,}7\cdot10^{-6}$ N/m^2 et dans le cas d'une surface parfaitement réfléchissante la pression de radiation vaut $9{,}4\cdot10^{-6}$ N/m^2. Malgré les valeurs négligeables de la pression de radiation, la preuve expérimentale de la pression des ondes électromagnétiques a été faite pour la première fois par P. N. Lébédev pour les ondes lumineuses. Lébédev démontra en 1900 l'existence d'une pression des radiations lumineuses sur les corps solides et en 1910 sur les gaz. Les résultats expérimentaux obtenus étaient en bon accord avec la théorie électromagnétique de la lumière. La pression de radiation n'est pas toujours petite. Si on focalise un faisceau laser à l'aide d'une lentille, la pression de lumière est suffisante pour perforer une pièce de monnaie (le diamètre du trou est de quelques dixièmes de millimètre). La pression de radiation est énorme au sein des étoiles chaudes et joue un rôle notable dans leurs explosions. Lorsque la température à l'intérieur d'une étoile atteint $\sim10^8$ keV (l'explosion des bombes atomiques et à hydrogène produit des températures de cet ordre), la pression de radiation devient comparable à la pression du plasma qui constitue l'étoile.

§ 146. Principes des transmissions radioélectriques

1. Tout fil conducteur parcouru par un courant alternatif rayonne des ondes électromagnétiques, mais si le courant est fermé et quasi stationnaire, *il n'y aura pratiquement aucun rayonnement.* Pour s'en rendre compte il suffit de décomposer le fil en éléments de courant $\mathcal{J}dl$. Chacun de ces courants élémentaires rayonne comme un dipôle ponctuel pour lequel la dérivée du moment dipolaire par rapport au temps est définie par l'expression $d\dot{p} = \mathcal{J}dl$. Si la condition du régime quasi stationnaire est vérifiée, tous les moments dipolaires oscilleront avec des phases presque identiques, de sorte que si on étudie le champ dans la zone d'onde (c'est le seul champ qui importe pour les communications radioélectriques), on peut admettre que tous ces dipôles se trouvent en un seul point. On en conclut que la spire parcourue par un courant rayonne toute entière comme un dipôle ponctuel pour lequel $\dot{p} = \oint d\dot{p} = \oint \mathcal{J}dl$. Si les courants sont quasi stationnaires $\mathcal{J}$ est le même en tous les points de la spire et par suite $\dot{p} = \mathcal{J}\oint dl = 0$ puisque $\oint dl = 0$ pour tout contour fermé. Dans une étude plus élaborée on peut diviser une boucle fermée parcourue par un courant en deux moitiés et assimiler chacune d'elles à un dipôle ponctuel. On obtient alors un système de deux dipôles ponctuels *de moments dipolaires égaux mais de signes contraires*, décalés l'un par rapport à l'autre d'une distance petite devant la longueur d'onde. En théorie un tel système doit rayonner mais pratiquement il ne rayonne pas: dans la zone d'onde le champ de radiation varie avec la distance comme $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) \sim \frac{1}{r^2}$, c'est-à-dire décroît trop vite pour observer un rayonnement décelable. Ces considérations s'appliquent à un circuit oscillant et à tout système « fermé », i.e. à tout système parcouru par des courants fermés ou presque fermés. Pour obtenir un fort rayonnement il faut utiliser des systèmes « *ouverts* » où circulent des courants non fermés. Théoriquement le meilleur système est un fil rectiligne où on excite des courants alternatifs (non fermés). Un système de ce type fut déjà utilisé dans les expériences de Hertz. En radiotechnique on utilise pour cela des *antennes*, i.e. un fil ou un système de fils non fermés parcourus par des courants alternatifs et que l'on suspend à grande hauteur au-dessus de la Terre.

Les courants de basse fréquence utilisés en électrotechnique ne conviennent pas aux transmissions radioélectriques pour deux raisons. Primo, parce qu'ils rayonnent *peu*. (La puissance de rayonnement est proportionnelle à la quatrième puissance de la fréquence, cf. § 141.) Secundo, parce qu'on utilise l'effet de résonance pour exciter des oscillations intenses dans l'antenne et qui exigerait des

antennes de *très grandes dimensions*. Si on utilisait, par exemple, en guise d'antenne un fil rectiligne, celui-ci devrait avoir une longueur $l = \lambda/2$ pour pouvoir y exciter l'oscillation fondamentale. Pour une fréquence $\nu = 1000$ Hz cette longueur est $l = 150$ km. C'est pour cela qu'on alimente les antennes de radio avec des *courants de haute fréquence*. On utilise pour la radiodiffusion des fréquences comprises entre 10^5 et 10^8 Hz, à quoi correspondent des longueurs d'onde comprises entre 3 km et 3 m. Dans les applications spéciales où le rayonnement émis doit être très directif, on fait appel aux ondes décimétriques et centimétriques (fréquences supérieures à 10^9 Hz).

Le principe de la radiotransmission est très simple. On excite d'intenses courants de haute fréquence dans une antenne réglée

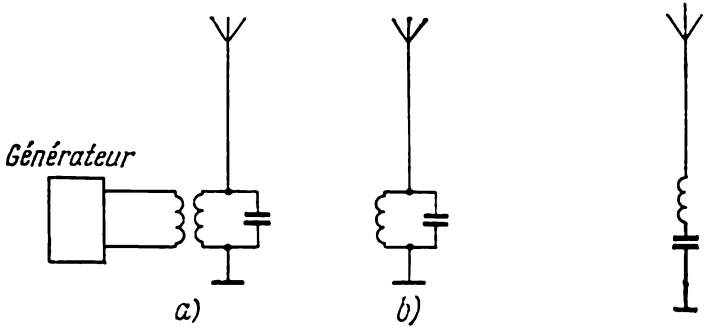


Fig. 378 Fig. 379

à la résonance avec l'émetteur (fig. 378, *a*). Les ondes électromagnétiques rayonnées par l'antenne sont captées par l'antenne réceptrice (fig. 378, *b*) accordée à la résonance avec l'émetteur et y excitent des courants de même fréquence qui peuvent être amplifiés et utilisés. Pour accorder l'antenne on peut brancher le condensateur soit en parallèle (fig. 378), soit en série avec l'inductance (fig. 379). Dans le cas du montage en parallèle la capacité totale du système augmente et sa fréquence propre diminue. Dans le cas du montage en série la capacité diminue et la fréquence du système augmente.

2. Les ondes sinusoïdales de haute fréquence rayonnées par une antenne *ne portent aucune information utile* et *ne sont pas perceptibles à l'oreille de l'homme* après qu'on les aura transformées en ondes soniques de même fréquence. Pour pouvoir transmettre des informations ou de la musique, on doit disposer de *signaux de basse fréquence*, par exemple entre 100 et plusieurs milliers de hertz. Pour la transmission de messages télégraphiques les fréquences sont encore plus basses. Il est cependant impossible de transmettre des signaux de basse fréquence par des ondes radio de mêmes fréquences, car on n'arrive pas à les exciter. En radiotechnique on est arrivé

à surmonter cette difficulté *en assurant l'émission d'ondes sinusoïdales de haute fréquence, modifiées de façon convenable par les signaux basse fréquence.* Cette modification des ondes HF est appelée *modulation*, les ondes émises sont dites *modulées* (cf. § 128). La modulation consiste à faire varier dans le temps l'*amplitude*, la *fréquence* ou la *phase des oscillations.* Dans ce qui suit on n'envisagera que la *modulation d'amplitude* qui est la plus simple.

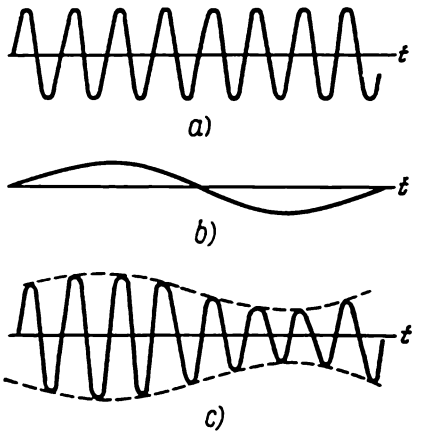


Fig. 380

Tant que les émissions ne sont pas commencées, l'antenne d'émission est parcourue par des courants sinusoïdaux :

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \sin \omega t \qquad (146.1)$$

(fig. 380, *a*). Lorsqu'on commence à émettre des informations parlées ou de la musique, les oscillations sinusoïdales sont modulées par une tension alternative :

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 [1 + f(t)] \sin \omega t, \qquad (146.2)$$

où la fonction $f(t)$ dépend de la forme du signal transmis qui module l'onde sinusoïdale $[|f(t)| < 1]$. C'est la *fonction* dite *de modulation.* La fonction de modulation la plus simple correspond à l'émission d'un ton musical simple, par exemple celui produit par un diapason. Dans ce dernier cas $f(t) = \alpha \sin \Omega t$ (fig. 380, *b*). La constante Ω est la *fréquence de modulation* et la constante α est le *taux* ou la *profondeur de modulation.* (Nous avons posé pour simplifier que la phase initiale était nulle.) En portant $f(t)$ dans la formule (146.2) les oscillations modulées seront représentées par

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 [1 + \alpha \sin \Omega t] \sin \omega t \qquad (146.3)$$

(fig. 380, *c*). Transformons cette expression :

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \sin \omega t + \frac{\alpha \mathcal{J}_0}{2} \cos (\omega - \Omega) t - \frac{\alpha \mathcal{J}_0}{2} \cos (\omega + \Omega) t. \qquad (146.4)$$

Si la fonction de modulation $f(t)$ n'est pas sinusoïdale mais périodique, on pourra la développer en série de Fourier et appliquer à chacun des termes de ce développement les raisonnements ci-dessus. On trouvera alors plusieurs autres fréquences de part et d'autre des deux fréquences $\omega - \Omega$ et $\omega + \Omega$ centrées sur ω. Ces fréquences forment des *bandes latérales* comportant un ensemble discret de fréquences. Si la fonction de modulation n'est pas périodique, on la développe en une intégrale de Fourier. Dans ce cas les bandes

latérales centrées sur ω comportent un nombre infini et *continu* de fréquences. A titre d'exemple on peut citer la fonction de modulation et les oscillations modulées des signes télégraphiques émis en Morse (fig. 381). Il importe beaucoup que toutes les fréquences latérales soient *très proches* de la fréquence « porteuse » ω. Toutes ces oscillations sont *de hautes fréquences* et conviennent donc à l'émission d'ondes radio. Le récepteur doit capter *non seulement les oscillations de la fréquence porteuse, mais aussi les oscillations des bandes de fréquence latérales*, sinon toute l'information contenue dans le signal émis serait perdue. Il s'ensuit que l'accord du récepteur *ne doit pas être trop aigu.*

3. Pour réaliser la modulation on utilise des circuits qui assurent la *multiplication* et non pas l'addition des tensions qui leur sont

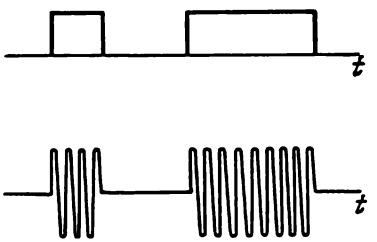


Fig. 381

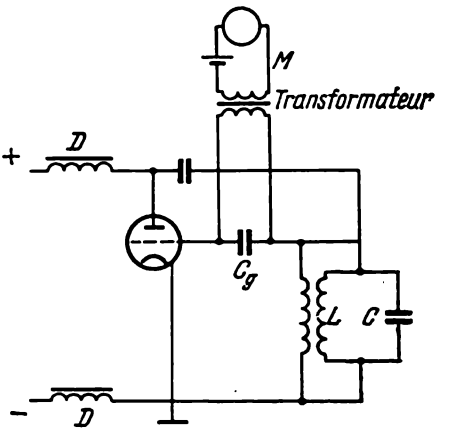


Fig. 382

appliquées. Ces circuits sont non linéaires. La figure 382 représente le schéma de montage le plus simple d'un émetteur radiotéléphonique à modulation grille. Le circuit oscillant est branché dans le circuit d'anode. La tension de modulation produite dans le circuit du microphone *M* est élevée à l'aide d'un transformateur. L'impédance du condensateur C_g du circuit grille est petite pour les courants HF de l'émetteur, tandis que la résistance du secondaire du transformateur est grande du fait de sa grande inductance. Ainsi les courants HF ne pénètrent pas dans le circuit modulateur du microphone, de sorte que l'émetteur fonctionne comme si ce circuit n'existait pas. Les courants générés dans le microphone et prélevés aux bornes du secondaire sont des courants de basse fréquence. Comme l'impédance du condensateur C_g est très grande pour ces courants, toute la tension prélevée sur le secondaire est appliquée entre la grille et la cathode de la triode. C'est cette tension qui

module la tension de sortie de l'émetteur. En effet le courant anodique $\mathcal{J}$ est fonction de la tension anodique V_1 et de la tension de grille V_2: $\mathcal{J} = \mathcal{J}(V_1, V_2)$. Développons cette fonction en une série de Taylor par rapport aux deux tensions et ne conservons que les termes du premier et du second degré. On obtient ainsi

$$\mathcal{J} = a_0 + a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_{11} V_1^2 + a_{22} V_2^2 + a_{12} V_1 V_2.$$

Le dernier terme est proportionnel au *produit* des tensions appliquées et c'est ce terme qui détermine la modulation de la tension anodique et par conséquent celle de la tension appliquée aux bornes du condensateur ou aux bornes de la bobine d'inductance du circuit oscillant. Supposons, par exemple, que $V_1 = A_1 \sin \omega t$, $V_2 = A_2 \sin \Omega t$. On aura alors

$$\mathcal{J} = a_1 A_1 \left(1 + \frac{a_{12}}{a_1} A_2 \sin \Omega t\right) \sin \omega t + \\ + (a_0 + a_2 A_2 \sin \Omega t + a_{11} A_1^2 \sin^2 \omega t + a_{22} A_2^2 \sin^2 \Omega t).$$

La première quantité entre parenthèses représente l'oscillation modulée qu'on cherchait à obtenir. On peut l'isoler à l'aide d'un circuit oscillant accordé à la fréquence ω (l'accord ne doit pas être très aigu). Il résulte de ce qui précède que pour assurer la modulation des oscillations le tube électronique doit travailler dans un régime où sa caractéristique volt-ampère *n'est pas linéaire*. Les oscillations modulées sont dirigées vers le circuit d'antenne qui est couplé par induction avec la bobine d'inductance L du circuit oscillant.

4. Considérons maintenant la réception des oscillations modulées. Sous l'action de l'onde modulée émise par l'antenne d'émission l'antenne de réception sera le siège des mêmes oscillations modulées quoique plus faibles. Même après préamplification ces oscillations sont encore trop faibles pour assurer une reproduction directe des signaux émis. En effet, si on décompose ces oscillations modulées en composantes sinusoïdales, celles-ci ne comportent que des hautes fréquences ne pouvant vibrer avec une amplitude suffisante dans un écouteur téléphonique (vu l'inertie de la membrane). Même si on pouvait fabriquer une membrane de faible inertie (ce qui est possible en principe) les vibrations sonores (de fréquence de 10^5 à 10^8 Hz) ne seraient pas audibles. C'est pour cette raison que les oscillations modulées sont soumises à une *démodulation* (ou *détection*) dans le récepteur et sont ainsi transformées en des oscillations basse fréquence correspondant aux fréquences des signaux transmis.

La détection consiste en un redressement des oscillations HF (à l'aide de *détecteurs à cristal* ou de *tubes électroniques*) suivi d'un *lissage* à l'aide d'un circuit présentant une constante de temps convenable. La figure 383 représente un des montages utilisés pour la détection. Le redressement est effectué par le détecteur à cristal D et le filtrage par un circuit constitué par un condensateur C et une

résistance R montés en parallèle. Supposons, par exemple, que le signal modulateur d'un émetteur radio est composé d'impulsions rectangulaires équidistantes, chacune d'une durée t_1, qui se succèdent à un même intervalle de temps t_2 (fig. 384, *a*). Le signal modulé est appliqué à l'entrée du récepteur (fig. 384, *b*). Le détecteur D écrête le signal. S'il n'y avait pas de condensateur C, une tension alternative V_R représentée sur la figure 384, *c* aurait été appliquée aux bornes de la résistance R. Pendant le temps t_1 cette tension aurait été composée de petites impulsions équidistantes chacune d'une durée $T/2$, où T désigne la période des oscillations HF. Pendant le temps t_2 cette tension aurait été nulle. En présence du condensateur C la majeure partie du courant de la première impulsion est utilisée pour charger le condensateur et porter sa tension à une valeur qui est petite devant la hauteur des petites impulsions (tension d'ondulation). Cette même tension apparaît aux bornes de la résistance R. Entre les microimpulsions successives la charge et la tension du condensateur décroissent suivant une loi exponentielle $e^{-t/\tau}$, où $\tau = RC$ est la constante de temps du circuit RC. Si τ est grand devant l'intervalle de temps Δt séparant les impulsions successives, la charge et la tension du condensateur ne changeront que de peu pendant le temps de décharge Δt. La deuxième impulsion du signal relèvera légèrement la tension aux bornes du condensateur C, puis le condensateur se déchargera comme après la première impulsion et ce processus se poursuivra jusqu'à ce que la montée de la tension à la charge devienne égale à sa décroissance pendant la décharge. A partir de cet instant la tension aux bornes de la résistance R devient constante. Lorsque le système aura été traversé par la dernière impulsion du paquet, la tension de sortie commencera

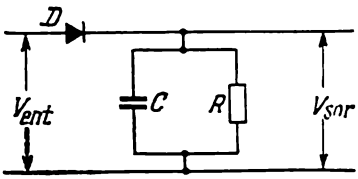


Fig. 383

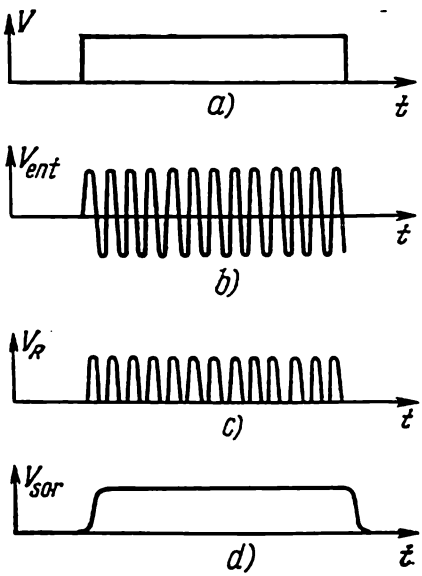


Fig. 384

à tendre exponentiellement vers zéro. Cette tension sera rétablie lorsque le détecteur sera traversé par la deuxième impulsion de modulation, et ainsi de suite. Si le temps d'établissement de la tension est petit devant t_1 et t_2, la tension de sortie sera de la forme représentée sur la figure 384, *d*. Par un choix convenable des paramètres du montage, la forme de l'impulsion de sortie sera pratiquement la même que celle du signal basse fréquence transmis par l'émetteur. La situation est la même si on transmet des signaux basse fréquence de forme quelconque.

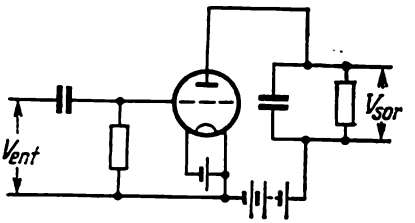


Fig. 385

Dans le montage détecteur de la figure 383 on peut remplacer le détecteur à cristal par une *diode* à vide, ou de préférence par une *triode qui assurera, en plus de la détection, l'amplification des oscillations.* On utilise dans ce cas le montage *à détection grille* représenté sur la figure 385. Il est évident que pour obtenir un effet de redressement il faut faire fonctionner la triode sur la partie *non linéaire de sa caractéristique.*

5. Le fonctionnement du récepteur s'explique maintenant tout simplement. Les oscillations HF excitées dans l'antenne du récepteur arrivent d'abord à l'*étage amplificateur haute fréquence.* Le

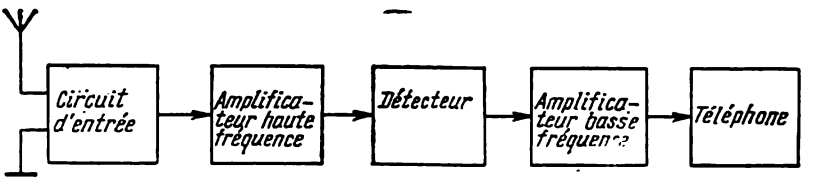


Fig. 386

circuit oscillant d'entrée de cet amplificateur doit être *accordé* afin de sélectionner les ondes d'un poste émetteur donné. L'accord *ne doit* cependant *pas être trop aigu* afin d'amplifier également les oscillations de la fréquence porteuse et les oscillations des bandes latérales (cf. point 2). Après amplification les oscillations HF parviennent dans le *circuit de détection* qui les transforme en *oscillations de basse fréquence* contenues dans le signal transmis. Après *amplification* celles-ci actionnent un *haut parleur* ou tout autre appareil *indicateur.* Un récepteur fonctionnant selon ce principe est appelé « *récepteur à amplification directe* ». Le schéma de principe en est donné sur la figure 386. Les récepteurs de radiodiffusion sont généralement d'un type différent, ce sont des *récepteurs superhétérodynes* qui utilisent un autre schéma de montage (voir pt. 7).

6. Examinons d'abord les *récepteurs hétérodynes* pour la *radiotélégraphie*. Actuellement les signaux télégraphiques en code Morse sont reçus au téléphone. Les impulsions de haute fréquence ne sont pas démodulées mais *transformées en oscillations de fréquence sonore*. Pour cela on applique à l'un des tubes électroniques du récepteur deux tensions alternatives de haute fréquence : la tension du signal $V = a \sin \omega t$ et la tension $V_1 = a_1 \sin \omega_1 t$ fournie par un générateur local de faible puissance (*hétérodyne*) faisant partie du récepteur. Si le tube électronique fonctionne en régime non linéaire, ces deux tensions sont combinées pour produire des oscillations de fréquences $\omega - \omega_1$ et $\omega + \omega_1$ (cf. pt. 3). La fréquence ω_1 est choisie telle que la fréquence $\omega - \omega_1$ se trouve dans la gamme des audiofréquences. Si le poste émetteur fonctionne sans transmettre de signaux utiles, l'écouteur produit un *sifflement continu* (ton musical de fréquence $\omega - \omega_1$). Lorsqu'on transmet un message en code Morse, on entend une succession de sons *longs* et *courts*. Le télégraphiste à l'écoute fait correspondre aux sons longs des traits et aux sons courts des points. Le récepteur hétérodyne présente parmi de nombreux autres l'avantage d'être sélectif. Supposons que le récepteur puisse capter simultanément les ondes émises par trois postes émetteurs dont les amplitudes sont pratiquement identiques et dont les fréquences sont tellement voisines qu'il est impossible de les sélectionner par résonance. Le récepteur hétérodyne peut fonctionner même dans ces conditions. Posons qu'il y a trois ondes de fréquences égales à 99 000, 100 000 et 101 000 Hz et que la fréquence de l'hétérodyne est égale à 101 000 Hz. L'onde de fréquence égale à 101 000 Hz ne sera pas décelable, car après changement de fréquence sa fréquence sera nulle. Les deux autres ondes auront, après changement de fréquence, des fréquences égales à 2000 et à 1000 Hz, donc une différence d'une octave. Une telle différence des hauteurs des sons est facile à déceler, ce qui permet d'enregistrer les signaux d'un poste en négligeant ceux de l'autre.

7. Le principal inconvénient du récepteur à amplification directe réside en ce qu'à de très hautes fréquences il ne permet pas d'obtenir une amplification suffisante des signaux. Cela tient aux *capacités parasites* (capacité du tube électronique, capacité des fils de connexion, etc.) qui aux très hautes fréquences présentent des impédances négligeables pour les courants et de ce fait *court-circuitent* les tubes électroniques. Il existe encore d'autres causes liées aux processus dans les tubes électroniques. Or on ne peut procéder à la détection des signaux captés par l'antenne sans les avoir amplifiés, car l'amplification basse fréquence amplifierait dans ce cas non seulement le signal utile mais aussi tous les *parasites radioélectriques* qui sont particulièrement notables aux basses fréquences. Le *récepteur superhétérodyne* est débarrassé de ces défauts et c'est pour cela qu'il est aujourd'hui d'utilisation courante. Le principe de base de ce récep-

teur est le *changement de la fréquence porteuse* ω *en une fréquence plus basse*. Le schéma de principe du récepteur superhétérodyne est représenté sur la fig. 387. La tension modulée HF $V = a\,[1 + f(t)] \sin \omega t$ attaque une des électrodes d'un tube électronique spécial M et on applique à une autre électrode de ce même tube

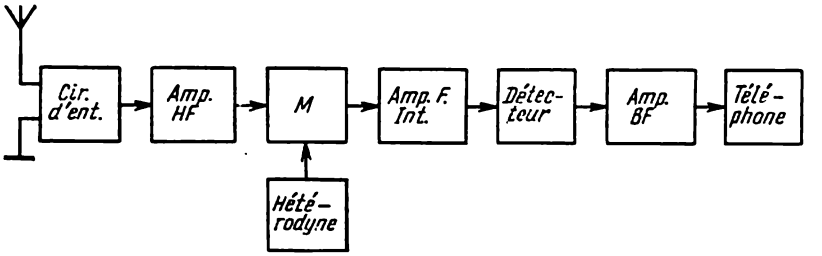


Fig. 387

la tension $V_1 = a_1 \sin \omega_1 t$ générée par l'hétérodyne du récepteur. Si le tube M fonctionne en régime non linéaire il se produit une *combinaison des tensions* V et V_1 avec production de deux types d'oscillations

$$[1 + f(t)] \cos (\omega - \omega_1)\, t \tag{146.5}$$

et

$$[1 + f(t)] \cos (\omega + \omega_1)\, t, \tag{146.6}$$

qui sont modulées par la même fonction $f(t)$ que celle qui module les oscillations émises par l'antenne de l'émetteur. Mais la fréquence porteuse ω des oscillations transmises est remplacée par la fréquence $\omega - \omega_1$ et $\omega + \omega_1$. Ce changement de fréquence est désigné en radiotechnique sous le nom de *mélange des fréquences* et le tube qui réalise ce mélange est appelé *mélangeur*. Dans le récepteur superhétérodyne ce sont les oscillations (146.5) de fréquence $\omega - \omega_1$ qui importent. La fréquence $\omega - \omega_1$ est appelée *fréquence intermédiaire*. A la différence du récepteur hétérodyne simple la fréquence intermédiaire doit être *supérieure* aux fréquences sonores. On isole les oscillations (146.5) par un procédé de résonance et on les soumet aux mêmes traitements que dans le cas d'un récepteur à amplification directe, i.e. on réalise une amplification dans un étage d'amplification intermédiaire suivie d'une détection et d'une amplification basse fréquence; le signal de sortie est appliqué à un écouteur, un haut-parleur, etc. Notons que lors du réglage du récepteur sur un poste émetteur donné, on réalise simultanément par variation de la capacité du condensateur du circuit d'entrée, une variation de la capacité du condensateur du circuit hétérodyne qui est telle que la fréquence intermédiaire $\omega - \omega_1$ *reste constante*. Pour cela les armatures mobiles des deux condensateurs sont emmanchées sur un même axe.

ANNEXES

PRINCIPALES FORMULES D'ÉLECTRODYNAMIQUE ÉCRITES DANS LE SYSTÈME SI

Pour la commodité de l'usager les formules portent le même numéro que les formules données dans le texte dans le système C.G.S.

$$F = qE. \tag{2.2}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}. \tag{3.2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} r. \tag{3.4}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{3.7}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3(pr)}{r^5} r - \frac{p}{r^3} \right]. \tag{4.3}$$

$$M = [pE]. \tag{4.4}$$

$$F = (p\nabla) E. \tag{4.7}$$

$$\Phi \equiv \oint (E\, dS) = \frac{1}{\varepsilon_0} q. \tag{5.5}$$

$$E = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0} \rho x \text{ dans la plaque} \\ \frac{1}{\varepsilon_0} \rho a \text{ en dehors de la plaque} \end{cases} \tag{6.2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qr}{a^3} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho r. \tag{6.5}$$

$$E = \frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}. \tag{6.6}$$

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0} \rho r. \tag{6.7}$$

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{6.9}$$

$$f = \frac{\varepsilon_0}{2} (E_2^2 - E_1^2) n. \tag{6.15}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{6.16}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \tag{7.3}$$

$$\sigma_{\text{pol}} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}) = P_n. \tag{12.2}$$

$$q_{\text{pol}} = -\oint P_n \, dS = -\oint (\boldsymbol{P} \, d\boldsymbol{S}). \tag{12.3}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}. \tag{13.3}$$

$$\oint D_n \, dS = q. \tag{13.4}$$

$$\rho_{\text{pol}} = -\operatorname{div} \boldsymbol{P}. \tag{13.6}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^3} \boldsymbol{r}. \tag{13.10}$$

$$\boldsymbol{D} = \sigma \boldsymbol{n}. \tag{14.3}$$

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \alpha \boldsymbol{E}. \tag{15.1}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{E}. \tag{15.2}$$

$$\varepsilon = 1 + \alpha. \tag{15.3}$$

$$\boldsymbol{E}^{(i)} = -\frac{1}{3\varepsilon_0} \boldsymbol{P}. \tag{16.1}$$

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \boldsymbol{P}. \tag{16.7}$$

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\nabla \varphi. \tag{18.5}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{r}. \tag{19.1}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho. \tag{22.2}$$

$$\boldsymbol{p} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \boldsymbol{E}. \tag{23.5}$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon a. \tag{26.2}$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \tag{26.5}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \tag{26.6}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln (b/a)}. \tag{26.7}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon l}{\ln \frac{4h^2}{ab}}. \tag{26.8}$$

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{1}{2} C\varphi^2. \tag{28.3}$$

$$w = \frac{1}{2} \boldsymbol{E}\boldsymbol{D} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \tag{29.7}$$

$$w = \int \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{D}. \tag{29.8}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}. \tag{30.1}$$

$$dU = T\, dS + \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{D}. \tag{31.6}$$

$$d\Psi = -S\, dT + \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{D}. \tag{31.7}$$

$$d\Phi = -S\, dT - \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{E}. \tag{31.8}$$

$$dI = T\, dS - \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{E}. \tag{31.9}$$

$$\Psi = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \Psi_0 = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} + \Psi_0. \tag{31.12}$$

$$U = \left(1 + \frac{T}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right) \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + U_0(T, \tau). \tag{31.14}$$

$$f = -w = -\frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \tag{32.8}$$

$$f = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_0) - \left(\varepsilon + \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right) \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \tag{32.9}$$

$$f = \frac{\varepsilon_0}{2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) E^2. \tag{33.4}$$

$$f = \frac{D^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right). \tag{33.5}$$

$$\mathcal{T} = -\mathcal{P} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \left(\varepsilon + \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right). \tag{33.8}$$

$$\Pi = \mathcal{P} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \left(\varepsilon - \tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right). \tag{33.9}$$

$$f = -\operatorname{grad} \mathcal{P} + \rho \boldsymbol{E} - \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \operatorname{grad} \varepsilon + \frac{\varepsilon_0}{2} \operatorname{grad} \left(\tau \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} E^2\right). \tag{34.5}$$

$$\boldsymbol{p} = \varepsilon_0 \beta \boldsymbol{E}. \tag{35.1}$$

$$\beta = 4\pi a^3. \tag{35.2}$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} n\beta. \tag{35.15}$$

$$\boldsymbol{P} = \frac{n p_0^2}{3kT} \boldsymbol{E}. \tag{36.5}$$

$$\alpha = \frac{n p_0^2}{3kT\varepsilon_0}. \tag{36.6}$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{n p_0^2}{3kT\varepsilon_0}. \tag{36.7}$$

$$\boldsymbol{j} = ne\boldsymbol{u}. \tag{40.1}$$

$$\boldsymbol{j} = \lambda \boldsymbol{E}. \tag{41.1}$$

$$\lambda = \frac{ne^2}{m} \bar{\tau}. \tag{42.12}$$

$$Q = (jE) = \lambda E^2 = \frac{1}{\lambda} j^2. \tag{42.22}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E} = \mathcal{J} R. \tag{44.5}$$

$$R = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{C\lambda}. \tag{46.1}$$

$$\tau = RC = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\lambda}. \tag{48.8}$$

$$F = q\,(E + [vB]). \tag{49.3}$$

$$dF = [jB]\,dV. \tag{49.4}$$

$$dF = \mathcal{J}\,[dlB[. \tag{49.6}$$

$$B = \frac{\mu_0 q}{r^3}\,[vr]. \tag{50.2}$$

$$F_{12} = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{r_{12}^3}\,[v_2\,[v_1 r_{12}]]. \tag{50.4}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{[jr]}{r^3}\,dV. \tag{50.10}$$

$$B = \oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathcal{J}\,[dlr]}{r^3}. \tag{50.11}$$

$$B = \frac{\mu_0 \mathcal{J}}{2\pi R}. \tag{51.1}$$

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi R}\,\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_2 l. \tag{51.2}$$

$$B = \frac{\mu_0 a^2 \mathcal{J}}{2r^3}. \tag{51.5}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,i\Omega. \tag{51.7}$$

$$B = \mu_0 i. \tag{51.8}$$

$$M = [\vec{\mathfrak{M}} B]. \tag{52.1}$$

$$\vec{\mathfrak{M}} = \mathcal{J} S. \tag{52.2}$$

$$\oint B\,ds = \mu_0 \mathcal{J}. \tag{55.4}$$

$$B = \frac{N\mathcal{J}}{2\pi R}. \tag{55.10}$$

$$\operatorname{rot} B = \mu_0 j. \tag{56.1}$$

$$\vec{\mathfrak{m}} = \mathcal{J} n. \tag{57.2}$$

$$F = (\vec{\mathfrak{M}}\nabla)\,B. \tag{57.3}$$

$$\omega = -\frac{e}{m}\,B. \tag{57.4}$$

$$r = \frac{v}{|\omega|} = \frac{mv}{|e|B}. \tag{57.5}$$

$$i_m = I. \tag{58.6}$$

$$j_m = \operatorname{rot} I. \tag{59.4}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} - I. \tag{59.5}$$

$$\oint H\,dl = \mathcal{J}. \tag{59.6}$$

$$\operatorname{rot} H = j. \tag{59.7}$$

$$[nH_2] - [nH_1] = i. \tag{60.3}$$

$$I = \varkappa H. \tag{61.1}$$

$$B = \mu_0 \mu H. \tag{61.2}$$

$$\mu = 1 + \varkappa. \tag{61.3}$$

$$A_{12} = \mathcal{J}(\Phi_2 - \Phi_1). \tag{62.2}$$

$$\mathscr{E}^{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{64.1}$$

$$E' = E + [VB]. \tag{66.6}$$

$$B' = B - \varepsilon_0 \mu_0 [VE]. \tag{66.7}$$

$$\Phi = L\mathcal{J}. \tag{68.1}$$

$$L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l}. \tag{68.2}$$

$$\tau = \frac{L}{R}. \tag{68.10}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \sum \mathcal{J}_i \Phi_i. \tag{69.5}$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2 = \frac{1}{2} HB = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \tag{70.3}$$

$$F = \frac{SB^2}{2\mu_0} \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) = \frac{\mu_0 S}{2} (\mu_2 H_2^2 - \mu_1 H_1^2). \tag{72.5}$$

$$F = \frac{\mu_0 S H^2}{2} (\mu_1 - \mu_2) = \frac{S}{2\mu_0} \left(\frac{B_1^2}{\mu_1} - \frac{B_2^2}{\mu_2} \right). \tag{72.7}$$

$$T = \mathcal{P} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \tag{72.8}$$

$$\delta Q = dU - H\,dB. \tag{73.1}$$

$$dU = T\,dS + H\,dB. \tag{73.2}$$

$$d\Psi = -S\,dT + H\,dB. \tag{73.3}$$

$$d\Phi = -S\,dT - B\,dH. \tag{73.4}$$

$$dI = T\,dS - B\,dH. \tag{73.5}$$

$$\Psi = \frac{\mu\mu_0}{2} H^2 + \Psi_0 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} + \Psi_0. \tag{73.7}$$

$$U = \left(\mu + T\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)\frac{\mu_0 H^2}{2} + U_0(T,\ \tau). \tag{73.8}$$

$$dT = -\frac{TB}{\mu_0\mu^2 c_B}\frac{d\varkappa}{dT}\,dB. \tag{73.10}$$

$$dT = -\frac{\mu_0 TH}{c_H}\frac{d\varkappa}{dT}\,dH. \tag{73.11}$$

$$\Gamma = \frac{\mathfrak{M}}{L} = -\frac{e}{2m}. \tag{75.1}$$

$$\mathfrak{M} = -\frac{e\hbar}{2m} n. \tag{75.2}$$

$$I = -\frac{\mu_0 NZe^2}{6m}\overline{R}^2 H. \tag{76.3}$$

$$\varkappa = -\frac{\mu_0 ZNe^2}{6m}\overline{R}^2. \tag{76.4}$$

$$\mu = 1 - \frac{\mu_0 NZe^2}{6m}\overline{R}^2. \tag{76.5}$$

$$\varkappa = \frac{\mu_0 n\mathfrak{M}^2}{3kT}. \tag{77.5}$$

$$\frac{dj}{dt} = -\frac{1}{\mu_0\Lambda^2} E. \tag{80.2}$$

$$\Lambda = \left(\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}\right)^{1/2}. \tag{80.3}$$

$$\psi_s + \frac{1}{2\mu_0} B_k^2 = \psi_n. \tag{80.6}$$

$$B = B_0 + \frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{(\vec{\mathfrak{M}}r)}{r^5} r - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mathfrak{M}}}{r^3}. \tag{80.8}$$

$$\vec{\mathfrak{M}} = -\frac{2\pi a^3}{\mu_0} B. \tag{80.9}$$

$$j_{\text{dép}} = \dot{D}. \tag{81.6}$$

$$j_{\text{dép}} = \varepsilon_0\dot{E} + \dot{P}. \tag{81.9}$$

$$\oint_L H\,dl = \int_S \left(j + \frac{\partial D}{\partial t}\right) dS. \tag{82.1}$$

$$\oint_L E\,dl = -\int \frac{\partial B}{\partial t}\,dS. \tag{82.2}$$

$$\oint (D\,dS) = \int \rho\,dV. \tag{82.3}$$

$$\oint (\boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{S}) = 0. \tag{82.4}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{82.1a}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{82.2a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = \rho. \tag{82.3a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0. \tag{82.4a}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma. \tag{82.5}$$

$$[\boldsymbol{n}\boldsymbol{H}_2] - [\boldsymbol{n}\boldsymbol{H}_1] = \boldsymbol{i}. \tag{82.8}$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{E}. \tag{82.10}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu \boldsymbol{H}. \tag{82.11}$$

$$\boldsymbol{j} = \lambda \boldsymbol{E}. \tag{82.12}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}. \tag{83.2}$$

$$\boldsymbol{E} = -[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}], \quad \boldsymbol{H} = [\boldsymbol{v}\boldsymbol{D}]. \tag{83.3}$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2. \tag{83.4}$$

$$\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]. \tag{84.3}$$

$$w = \int (\boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{B}). \tag{84.7}$$

$$w = \frac{1}{2} (\boldsymbol{E}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{B}). \tag{84.9}$$

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = e(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]). \tag{86.2}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} = \frac{[\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}]}{B^2}. \tag{86.3}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} = \frac{1}{B^2 e} [\boldsymbol{F}\boldsymbol{B}]. \tag{86.4}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} = \frac{m v_\perp^2}{2eB^2} \frac{\partial B}{\partial N} \boldsymbol{b}. \tag{87.2}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} = \frac{m v_\perp^2}{2eBR} \boldsymbol{b}. \tag{87.3}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} = \frac{m v_\parallel^2}{eBR} \boldsymbol{b}. \tag{87.4}$$

$$\boldsymbol{V} = v_\parallel \boldsymbol{h} + \frac{1}{B^2} [\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}] + \frac{m}{eBR} \left(v_\parallel^2 + \frac{1}{2} v_\perp^2 \right) \boldsymbol{b}. \tag{87.5}$$

$$\vec{\mathfrak{M}} = -\frac{m v_\perp^2}{2B} \boldsymbol{h}. \tag{88.2}$$

$$\Phi = \frac{m^2 v_\perp^2}{e^2 B}. \tag{88.3}$$

$$g = \frac{[EH]}{c}. \tag{91.1}$$

$$m_{\text{él}} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 a c^2}. \tag{91.4}$$

$$R = \frac{1}{ne}. \tag{98.4}$$

$$R = \frac{3\pi}{8ne}. \tag{98.5}$$

$$C = \frac{4\varepsilon_0}{9l^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}. \tag{101.17}$$

$$D = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 kT}{ne^2}}. \tag{121.1}$$

$$\lambda = \frac{(4\pi\varepsilon_0)^2 (3kT)^{3/2}}{\pi Z e^2 L \sqrt{m}}. \tag{121.3}$$

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{2ne^2}}. \tag{121.8}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}. \tag{123.9}$$

$$v = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho}}. \tag{138.6}$$

$$\left.\begin{aligned} D = {} & \frac{1}{4\pi}\left[\frac{3(pr)}{r^5}r - \frac{p}{r^3}\right]_{t-\frac{r}{v}} + \\ & + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{3(\dot{p}r)}{vr^4}r - \frac{\dot{p}}{vr^2}\right]_{t-\frac{r}{v}} + \\ & + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{(\ddot{p}r)}{v^2r^3}r - \frac{\ddot{p}}{v^2r}\right]_{t-\frac{r}{v}}, \\ H = {} & \frac{1}{4\pi r^3}[\dot{p}r]_{t-\frac{r}{v}} + \frac{1}{4\pi v r^2}[\ddot{p}r]_{t-\frac{r}{v}}. \end{aligned}\right\} \tag{141.10}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{(\ddot{p}r)}{v^2r^3}r - \frac{\ddot{p}}{v^2r}\right]_{t-\frac{r}{v}} = \frac{1}{4\pi v^2 r^3}[[\ddot{p}r]\,r]_{t-\frac{r}{v}}, \\ H &= \frac{1}{4\pi v r^2}[\ddot{p}r]_{t-\frac{r}{v}}. \end{aligned} \tag{141.11}$$

$$S = \frac{\sin^2 \vartheta}{16\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon v^3 r^2} \ddot{p}^2_{t - \frac{r}{v}} N. \tag{141.13}$$

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 \varepsilon v^3} \ddot{p}^2_{t - \frac{r}{v}}. \tag{141.14}$$

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 \varepsilon v^3} p_0^2. \tag{141.16}$$

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 \varepsilon v^3} \dot{v}^2. \tag{141.17}$$

$$D = \frac{1}{\mu_0 \mu \lambda}. \tag{144.4}$$

$$l \sim \frac{1}{\sqrt{2\mu_0 \mu \lambda \nu}}. \tag{144.5}$$

VALEURS DE QUELQUES CONSTANTES PHYSIQUES

Vitesse de la lumière	$2{,}99792458 \cdot 10^{8}$ m/s = $= 2{,}99792458 \cdot 10^{10}$ cm/s
Charge de l'électron	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C = $4{,}80 \cdot 10^{-10}$ un. C.G.S.E.
Constante de Planck	$6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s = $6{,}626 \cdot 10^{-27}$ erg·s
Nombre d'Avogadro	$6{,}022 \cdot 10^{26}$ kmole^{-1} = $6{,}022 \cdot 10^{23}$ mole^{-1}
Constante de Boltzmann	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K = $1{,}38 \cdot 10^{-16}$ erg/K
Constante des gaz	$8{,}31 \cdot 10^{3}$ J/(kmole·K) = $= 8{,}31 \cdot 10^{7}$ erg/(mole·K)
Constante de la gravitation	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N·m^2/kg^2 = $= 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ dyn·cm^2/g^2
Nombre de Faraday	$9{,}648 \cdot 10^{7}$ C/kmol = $= 9{,}648 \cdot 10^{3}$ un. C.G.S.M./mol
Masse au repos de l'électron	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg = $9{,}11 \cdot 10^{-28}$ g
Masse au repos du proton	$1{,}6727 \cdot 10^{-27}$ kg = $1{,}6727 \cdot 10^{-24}$ g
Masse au repos du neutron	$1{,}6750 \cdot 10^{-27}$ kg = $1{,}6750 \cdot 10^{-24}$ g
Rayon moyen de la Terre	6371 km
Masse de la Terre	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
Densité moyenne de la Terre	5,52 g/cm^3
Moment cinétique de la Terre dû à sa rotation axiale	$5{,}91 \cdot 10^{33}$ kg·m^2/s
Vitesse moyenne de déplacement de la Terre sur l'orbite	29,77 km/s
Rayon du Soleil	$6{,}96 \cdot 10^{5}$ km
Masse du Soleil	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg
Densité moyenne du Soleil	1,41 g/cm^3
Distance moyenne Terre-Soleil	$1{,}496 \cdot 10^{8}$ km
Distance moyenne Terre-Lune	$3{,}84 \cdot 10^{5}$ km
Rayon moyen de la Lune	1738 km
Masse de la Lune	$7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg

INDEX DES NOMS

Abraham 384
Abrikossov 357
Alfven 644
Ampère 8, 226, 253, 254, 306
Arrhénius 435, 444
Artsimovitch 417
Aston 547
Avénarius 504, 515
Avogadro 329, 338, 440, 462

Bardeen 359
Barkhausen 346
Barlow 226
Barnett 340
Biot 228, 231 à 233, 247, 296, 297, 363, 656, 657
Bogolioubov 359
Bogouslavski 488
Bohr 11, 148, 261, 325 à 327, 333, 525
Boltzmann 155, 159, 195, 201, 333, 461, 484
Bose 358, 359
Boys 520
Braun 281, 509

Carlisle 439
Cavendish 17, 36
Clausius 154, 158, 434, 511, 512, 514, 515
Cooper 359
Coriolis 199, 290, 411
Coulomb 7, 17 à 19, 22, 33 à 37, 42, 43, 101, 229, 242, 344, 363, 390, 520, 660
Crookes 534, 549
Cunningham 426
Curie Paul Jacques 160, 164, 170
Curie Pierre 160, 164, 169 à 171, 173, 178 à 180, 319, 324, 334, 337, 342 à 345, 347

Daniell 450, 451
Davis 525
Davy 439, 555
Debye 319, 332
De Haas 319, 339, 610
Dirac 195, 196, 337, 358, 370, 461, 463, 464, 482
Dorfman 344
Drude 196, 463, 468
Dushman 484

Earenshaw 47, 48, 55
Edison 481
Eichenwald 232
Einstein 201, 339, 358, 431, 610
Euler 581

Faraday 8 à 10, 59 à 61, 94, 109, 138, 276, 439, 440
Fermi 193, 195, 196, 337, 358, 461, 463 à 470, 480 à 483, 498, 499, 510, 565
Feynman 91
Foucault 283, 284, 324, 618
Fourier 339, 584, 591, 592, 595, 688
Franck 524, 525
Franklin 56
Franz 196, 468
Frenkel 344, 472

Gauss 8, 28, 29, 31, 33, 35, 40 à 48, 52, 54, 65, 66, 69, 92, 96, 97, 101, 114, 122, 124, 184, 214, 240, 252, 275, 276, 363, 373
Giauque 319
Ginsburg 178
Giorgi 397
Goldman 170
Goldstein 550
Goucher 525
Green 8
Grotthuss 433, 435

Hablutzel 174
Hale 548
Hall 459, 461 à 463, 480
Hamilton 25

Heaviside 389
Heisenberg 148, 344
Helmholtz 141, 146, 232, 278, 279, 440
Hertz Gustav 524, 525
Hertz Heinrich 9, 10, 378, 653, 654, 657, 659, 660, 662, 663, 665, 668, 686
Hittorf 442, 444
Hooke 568

Ioffé 424, 425, 511

Joukovski 338
Joule 187, 194, 202, 206, 434

Kamerlingh Onnes 347
Kettering 457
Kirchhoff 8, 207 à 210, 601, 602, 669, 674
Kobeko 170
Kohlrausch Friedrich 442, 444
Kohlrausch Rudolf 233, 377
Kourtchatov 170
Kundt 167

Landau 178, 347, 358, 471
Langevin 167, 325, 332 à 334, 337, 341, 343, 344
Langmuir 486 à 488, 557
Laplace 8, 93, 94, 103, 186, 213, 218
Larmor 328, 330, 331
Lawson 563
Lawton 36
Lébédev 668, 685
Le Chatelier 165, 281, 509
Lecher 668 à 672
Leclanché 452
Lenz 187, 194, 202, 206, 280 à 283, 297, 310, 330, 374, 434, 508
Le Roux 513
Lippmann 164
London Fritz 352, 353
London Hans 352, 353
Lorentz 11, 77, 153, 154, 177, 196, 225, 277, 286, 290, 389, 413. 421, 457, 459

McClung 533
Maklakov 618
Mandelstam 456, 609, 630
Maxwell 9 à 12, 17, 36, 66, 138, 141, 146, 185, 234. 242, 286, 363, 364, 367, 369, 370 à 372, 375 à 380, 388, 389, 393, 394, 397, 404, 429, 484, 601, 654 à 656, 661, 667 à 669, 671, 679, 681
Meissner 161, 351, 353
Mendéléev 526
Merz 174
Millikan 424 à 428
Mitkévitch 556
Morse 689
Mossotti 154, 158

Néel 347
Nernst 335 à 337, 445
Neumann Carl 8
Neumann Franz 8
Newton 7, 48, 378, 388, 642
Nicholson 439
Nicol 668

Ochsenfeld 351, 353
Œrsted 227
Ogawa 170
Ohm 184, 185. 187, 189, 192, 193, 202 à 208, 214, 349, 359, 434, 447, 455, 529, 530, 596, 599, 670
Ostrogradsky 8, 44 à 46, 122, 252
Ostwald 437
Oumov 381

Papalexi 456, 609, 630
Paschen 544. 545
Pauli 337, 358. 464, 470
Peltier 502, 508 à 513, 515
Pétrov 555
Planck 326
Plimpton 36
Pockels 170
Poggendorff 210
Pohl 21, 503
Poisson 8, 93, 486, 565
Popov 10, 668
Poynting 381, 384, 392, 652, 672, 684
Pristley 36

Raoult 435
Richardson 484
Riecket 455
Rogowski 288, 290
Rosing 341
Rowland 232
Rutherford 11, 531, 532, 535

Savart 228, 231 à 233, 247, 296, 297, 363, 656, 658
Schrieffer 359
Scott 457
Seebeck 502, 503, 515
Simon 319
Snellius 667
Solomon 170
Sommerfeld 196, 463, 468, 469
Stokes 252, 307, 425, 427
Stolétov 320
Stuart 187, 457

Tait 515
Tesla 678, 679
Thomson Elihu 282, 606
Thomson J.J. 11, 409, 422, 423
Thomson William (lord Kelvin) 502, 512 à 515, 573
Tolman 187, 457
Townsend 423, 538 à 544, 552

Valasek 170
Van Allen 417
Van de Graaff 60, 61
Van Leeuwen 325
Van't Hoff 435
Vernov 417
Voigt 168
Volta 450, 497, 499, 500, 503

Wainer 170
Weber Wilhelm 8, 233, 377
Weiss 173, 178, 324, 341 à 345
Wheatstone 209
Wiedemann 196, 468
Wiersma 319
Wilson 142, 424
Wul 170

Young 165

Zeleny 535

INDEX DES MATIÈRES

Accepteurs 479
Accumulateur alcalin 454
—, capacité 454
— au plomb 453
Action à distance 7
Aimantation spontanée 320, 342
Ampère, loi d' 253
—, théorème d' 253
Ampère (unité de courant) 205, 234
Ampères-tours 633
Amplificateur 491
—, facteur d'amplification 492
Amplitude 573, 576, 648
Angle solide 242 à 244
Antenne 686
Anticathode 550
Antiferroélectricité 181
—, point de Curie 181
Antiferromagnétiques 319, 347
Antiferromagnétisme 347
Arc électrique de Pétrov 555
— — —, cratère 555
Auto-émission (émission froide) 496
Avalanche électronique 547

Bande(s) de conduction 477
— d'énergie du cristal 473
— fondamentale 473
— interdite 474
— latérales 688
— de niveaux excités 473
— permise 474
— de valence 477
Barkhausen, effet de 346
Barlow, roue de 226
Barnett, expérience de 340
Battements 607
Biot-Savart, loi de 231
Biréfringence des ondes 668
Blindage magnétique 270
Bobine d'arrêt (de choc) 597
— d'épreuve 240
— de réaction 619
Bohr, magnéton de 326
— et Van Leeuwen, théorème de 325
Bouteilles magnétiques 417

Canaux d'étincelle 551
Capacité 106
— calorifique du gaz électronique 468
— d'un condensateur cylindrique 109, 113
— — plan 108
— — sphérique 107
— — stratifié 111
— de deux fils parallèles 110
— d'un ellipsoïde 113
— de l'unité de longueur de la ligne 670
Caractéristique d'anode 490
— de grille 490
—, pente 490
Cathode composée 485, 495
— à oxydes 485
Ceintures radiatives 417
Centimètre (unité de capacité) 107
— (unité de self-inductance) 296
Centre menant 404
Champ(s) électrique d'une cavité sphérique 74
— — d'un cylindre de longueur infinie 37
— — de deux plans parallèles 39
— — d'un ellipsoïde 101 à 105
— —, intensité 14
— — d'un plan infini 33
— — d'une plaque infinie 34
— — d'une sphère 34
— — — uniformément polarisée 72, 73
— — de la Terre 90
— électromagnétique 8
— irrotationnels 251
— macroscopique 50, 262
— magnétique d'une bobine toroïdale 249
— — d'un fil rectiligne 246
— —, intensité 224, 266
— — d'un solénoïde 247
— moléculaire de Weiss 341
— à potentiel (conservatifs) 76
— rotationnels 251
— solénoïdaux 242
Charge(s) électrique 12
— —, loi de la conservation 183

Charge(s) d'épreuve 12
— induites 53
— libres 63
— liées 63
— magnétique 242, 370
— de polarisation 63
— ponctuelle 17
— spécifique 409
Chute cathodique 546, 549
— — anomale 549
— — normale 549
Circuit oscillant 566
Circulation 77
Coefficient(s) de capacité 115
— —, symétrie 119
— de conversion 393
— d'induction 115
— —, symétrie 304
— de potentiel 114
— —, symétrie 119
Cohéreur 664
Concentration équivalente 441
Conditions aux limites 67, 266, 267, 370, 650
Conductibilité par impuretés 478
— intrinsèque 478
Conduction par électrons 478
— par trous 478
Conductivité 184
— équivalente 442
Cône de perte 417
Confinement du plasma dans un champ magnétique 562
Constante balistique 579
— électrique 390
— électrodynamique 228
— magnétique 390
Cooper, paires de 359
Coordonnées normales 639
Coriolis, force de 290
Corps d'épreuve 12
Coulomb, loi de 17
Coulomb (unité de charge) 19, 234
Courant(s) d'aimantation 262
— anodique 490
— de conduction 262
— de déplacement 364
— efficace 604
— électrique 182
— de grille 489
— induits 277
— moléculaires 262
— de polarisation 367
— de saturation 482, 530
— superficiels 235
— thermoélectrique 502
— thermoïonique 481
Courant(s) total 364
Courbe amplitude-fréquence 590
— phase-fréquence 590
— de résonance 587
— —, largeur (demi-largeur) 587
Couronne 553
— négative 553
— positive 553
Cunningham, correction de 426
Curie, loi de 334
—, point de 173
—, point antiferromagnétique de 347
—, point magnétique de 324
—, température diélectrique de 169
— et Weiss, loi de 173, 343
— —, température de 174
Cuve électrolytique 216 à 219, 681
— —, méthode de sectionnement 217, 681

Debye, longueur (rayon) de 558, 564
—, potentiel de 565
Décharge à arc 552, 555
— en couronne 553
— à étincelle 551
— —, théorie des streamers 553
— extrinsèque 529, 543
— dans le gaz 543
— intrinsèque 530, 543
— lumineuse 545
— — anomale 549
— de Townsend 541
Décrément 577
Dégénérescence 641
Démodulation (détection) 690
Densité de courant 183
— — linéique 235
— superficielle de charge électrique 22
Déplacements réels 131
— virtuels 131
Dérive 187, 403
— centrifuge 411
— électrique 401, 405
— magnétique 407 à 410
—, théorie 404
Détecteur 663, 690
Détection grille 692
Deutérium 562
Diagramme vectoriel 580
Diamagnétique 269, 319
Diamagnétisme 327
Diélectrique (isolant) 471, 477
Différence de potentiel de contact extérieure 500
— — — interne 499

Difference de potentiel de contact, mesure par la méthode de compensation 501
Diffusion ambipolaire 558
Diode à vide 481
Dipôle électrique 23
— magnétique 254
— ponctuel 23
Dissociation, coefficient (degré) 436
— électrolytique 435
Divergence 41, 45
Domaine(s) diélectriques 175
— magnétiques 345
— polaire 169
Donneurs 479
Dorfman, expérience de 344
Double couche électrique 447, 481
Drude, formule de 196

Earenshaw, théorème de 47
Echange de charges 551
Eclair 551
Ecran électrostatique 59
Effet(s) dynatron 493
— gyromagnétiques 338
— magnétocalorique 318
— magnétomécaniques 338
— de peau 676
— photoélectrique 496
— piézoélectrique direct 160 à 164
— — inverse 164
— — longitudinal 162, 165
— — transversal 162, 165
— pyroélectrique inverse 168
— — primaire (direct) 168
— — secondaire (indirect) 168
— — tertiaire (pseudo-effet) 168
— de surtension 453
Einstein et de Haas, expérience de 339, 610
Electret 70
Electrode à hydrogène normale 448
Electrolyse 433
—, produits primaires 439
—, produits secondaires 439
—, réactions primaires 433
—, réactions secondaires 433
Electrolytes 433
— faibles 437
— forts 437
— solides 471
Electromètre à fil 526
— à quadrants 526
Electrons libres 472
— secondaires 493
— de valence 472
Electrostriction 141
Elément de courant linéique 226
— — volumique 226
— galvanique 201, 450
— — secondaire 453
Emetteurs 495
Emission secondaire 493
— thermoïonique 481
Energie électrique 119
— électromagnétique 380
— et forces 311
— libre 120, 304
— — et forces pondéromotrices 130
— magnétique 301
— mutuelle 126
— de polarisation des diélectriques 130
— des substances magnétiques 317
Equation(s) du circuit oscillant 566, 571
— de continuité 184
— matérielles 371
— de l'onde 643
Equivalent chimique 440
— électrochimique 446
— gramme 440
Espace obscur de Crookes 547
— — de Hittorf 547
— des phases 464
Etats quantiques 463
— transitoires 603
Ether universel 10
Etincelle condensée 552
Extra-courant de fermeture 297
— d'ouverture 299

Facteur démagnétisant 272
— de qualité (de surtension ou de mérite) 577, 587
Farad 107
Faraday, cylindre de 59
—, lois d'électrolyse de 439
—, nombre de 440
—, théorème de 58
Fermi, niveau de 465
Ferroélectricité 169 à 181
Ferroélectrique 170
Ferromagnétiques 319
Ferromagnétisme 319 à 324
Feuillet magnétique 254
Feux de Saint-Elme 554
Figures de poudre, méthode des 346
Filtre électrique 554
Flux d'énergie 380
— d'impulsion 384
— magnétique 295
— —, théorème de la conservation 309

Flux du vecteur 28
Fluxmètre 288
Fonction de modulation 688
— périodique 592
Force(s) d'Ampère 226
— coercitive 322
— d'échange 345
— électrodynamiques 7
— électromagnétiques 7
— électromotrice 203
— électrostrictives 141
— d'image électrique 480
— de Lorentz 225
— non électriques 199
— pondéromotrices 130, 146
Foucault, courants de 283
Fourier, coefficients de 592
—, intégrale de 595
—, théorème de 591
Frenkel-Heisenberg, théorie du ferromagnétisme 344
Fréquence des battements 607
— circulaire 572
— de cyclotron 256, 400
— fondamentale 592
— de modulation 593, 688
— des oscillations 573
— de plasma 575
— porteuse 593, 607
Fusion thermonucléaire contrôlée 415, 562

Galvanomètre balistique 578
Gamma 234
Gauss, forme différentielle du théorème de 41, 65
— Ostrogradsky, formule de 45
—, procédé de 275
—, théorème de 31, 65
—, théorème pour les champs magnétiques 240, 262
Gauss (unité d'intensité du champ magnétique) 234
Gaz dégénéré 465
— fortement dégénéré 466
— quasi neutre 531
— totalement dégénéré 466
Générateur à tube électronique 619
Ginsburg, théorie de 178
Gradient 80
Grille d'arrêt 493
— de commande 489
— écran 493
Grotthuss, hypothèse de 433

Hale, loi de 548
Hall, coefficient de 461
Hall, effet 459
Hamilton, opérateur « nabla » de 25
Harmoniques 650
Henry (unité d'inductance) 297
Hertz, dipôle de 653 à 662
—, puissance rayonnée du dipôle de 660
—, résonateur de 662
—, vibrateur de 662
Hétérodyne 693
Hystérésis, boucle 176, 322
—, boucles doubles 181
— diélectrique 176
— magnétique 268, 322
— —, chaleur 323

Images électriques 95
— — par rapport au plan 95, 96
— — par rapport à la sphère 97
Impédance 596
— du circuit 600
— d'onde 670
Impulsion de champ électromagnétique 384
Inductance, coefficients 300
— d'un fil 295
— mutuelle, coefficients 300
— d'un solénoïde 295
—, théorème de réciprocité 300
— de l'unité de longueur de la ligne 670
Induction électrique 53
— —, vecteur 65
— électromagnétique 276
— —, analogie mécanique 290
— —, conception de Faraday 276
— —, conception maxwellienne 284
— —, force électromotrice 277
— —, forme différentielle de la loi de l' 286
— —, loi fondamentale 278
— magnétique 266
Intensité de courant 203
Interaction des courants alternatifs 605
Invariant adiabatique 412
Ionisation 520
— par choc 538
—, énergie 523
—, méthode du choc électronique 524
—, potentiel 523
— de surface 521
— volumétrique 521
Ionosphère 559

Joule-Lenz, loi de 194, 206

Kattering et Scott, expérience de 457
Kirchhoff, lois de 207, 208
—, lois en courant alternatif 601
Kohlrausch, loi de 444

Langevin, fonction de 333
—, théorie du magnétisme 332
Langmuir-Bogouslavski, loi de la puissance 3/2 487, 488
Larmor, fréquence de 328, 400
—, rayon de 256, 400
Lébédev, expériences de 685
Le Chatelier-Braun, principe de 281
Lecher, système de fils 668
Lenz, règle de 280
Lignes de courant 21
— de force électriques 20
— — magnétiques 21
— — quasi fermées 78
— —, réfraction 72
— vectorielles 21
Logarithme coulombien 560
Lois élémentaires 7
London Fritz et Hans, théorie de la supraconductibilité 352
Longueur d'onde 648
— — de Compton 432
Lueur anodique 547
— négative 547
— positive 547

Magnétique 261
Magnétohydrodynamique 559
Mandelstam et Papalexi, expérience de 456, 609
— —, machine paramétrique de 630
Marteau de Maklakov 619
Masse électromagnétique 429
— et énergie en théorie de la relativité 384, 428
Maxwell, équations de 369
—, équations sous une forme rationalisée 389
Maxwell (unité de flux magnétique) 296
Meissner-Ochsenfeld, effet 351
Mélange des fréquences 694
Mélangeur 694
Métaux 476
Méthode de coulage 527
— de la déflexion constante 528
— des gouttes d'huile de Millikan 423
— des paraboles 422
— vectorielle 581
Miroirs magnétiques 417
Mobilité des ions 535
— —, d'après Kohlrausch 442
— —, méthode du champ alternatif 535
— —, méthode de Zeleny 535
— des particules 191
Modèle planétaire de l'atome 48, 49
Modes 639
Module(s) de différentiation et d'intégration 570
— piézoélectrique 163
Molécules polaires 63
Moment du dipôle 23
— magnétique du courant 238
Monopôles 370
Montage des condensateurs mixte (série-parallèle) 111
— — en parallèle 111
— — en série 111
Mossotti-Clausius, formule de 154
Multiplicateur d'électrons photoélectrique 495
Multiplication des tensions appliquées 689

Néel, loi de 347
Nernst, méthode de 445
Niveaux d'énergie 463
— — accepteurs 479
— — donneurs 479
— — excités 473
— — fondamentaux (non excités) 473
— — simples (non dégénérés) 473
Nœuds 650
Nombre(s) d'onde 648
— de transport 444
Notations complexes 580

Œrsted, expérience d' 227
Ohm, loi d' 184, 202, 203
—, loi en courant alternatif 596
Ohm (unité de résistance) 205
Ondes d'Alfven 644
— (perturbations) électromagnétiques 373, 645
— —, front 376
— —, impulsion 681
— — planes 376
— —, polarisation 377
— —, pression 681
— — progressives 376
— —, vitesse 376
— sinusoïdales (monochromatiques) 648

Ondes sphériques 658
— stationnaires 649, 652, 672
Oscillateur harmonique 571
Oscillations 566
— amorties 575
—, auto-excitation 621
— auto-excitées 617
— de circuits couplés 637
— à deux degrés de liberté 636
— fondamentales 650
— forcées 583
— harmoniques 572, 594
— libres 571
— modulées 593, 607
— normales 650
— paramétriques 626
— de plasma 575
—, processus d'établissement 606
— propres 650
— de relaxation 625
Ostwald, loi de dilution 437
Oumov-Poynting, théorème de 381
—, vecteur de 381

Paire électron-positron 16, 432
Paramagnétique 269
Paramagnétisme 331
— des électrons libres 337, 470
Paschen, loi de 545
Pauli, principe de 464
Peltier, chaleur de 508
—, coefficient de 509
—, croix de 509
—, effet de 508
Pendules couplés 638
Pentode 493
Période fondamentale 592
Perméabilité magnétique 268, 391
— — absolue 392
— — relative 391
Permittivité diélectrique 69, 391
— — absolue 392
— — relative 391
Phase non polaire 169
— des oscillations 573
— — initiale 573
— polaire 169
Pièges magnétiques 416
Piézoélectricité 160 à 167
Pile de concentration 200
— de Daniell 450
—, dépolarisation 451
— Leclanché 451
— sèche 452
— de Volta 450
Plasma 557
— complètement ionisé 559
—, conductivité du 561
— à deux températures 561
— faiblement ionisé 559
— moyennement ionisé 559
— non isotherme 561
—, oscillations collectives 559
—, temps de relaxation 561
Platine platiné 448, 449
Poggendorff, montage de 210
Polarisabilité 69, 149, 392
Polarisation des diélectriques 62
— électrolytique 451
— du vide 432
Porteurs de courant 182
— — majoritaires 480
— — minoritaires 480
Potentiel d'amorçage 625
— d'une charge ponctuelle 82
— d'un cylindre de longueur infinie 85
— d'un dipôle ponctuel 84
— électrique 78
— d'électrode 449
— — normal 449
— d'extinction 625
— d'un fil rectiligne 85
— d'un plan uniformément chargé 83
— d'une plaque plane-parallèle 84
— d'une sphère uniformément chargée 84
— vecteur 307, 308
Pouvoir émissif 482
Poynting, vecteur de 381
Principe(s) de superposition 584
— des transmissions radioélectriques 686 à 694
Problème de plusieurs corps 474
— d'un seul corps 474
Processus apériodique 577
Profondeur de modulation 593, 688
Puissance du courant alternatif 605
Pulsation 572
Pyroélectricité 167 à 169

Rapport gyromagnétique 325
Rayon(s) cathodiques 549
— classique de l'électron 431
— de cyclotron 400
— positifs (rayons canaux) 550, 551
— X 550
Rayonnement d'une charge en mouvement accéléré 660
—de cyclotron 562
— de freinage 562
— de recombinaison 526

Réactance capacitive 597
— du circuit 600
— inductive 597
Récepteur à amplification directe 692
— superhétérodyne 693, 694
Recombinaison 522
—, coefficient 522
—, mesure des coefficients 531
—, mesure des coefficients par la méthode de commutation 532
—, mesure des coefficients par la méthode de McClung 533
—, mesure des coefficients par la méthode de Rutherford 531
Redresseur à diode 488
Réflexion des ondes 667, 672
— des particules chargées 415
Réfraction des ondes 667
Régime quasi stationnaire 219, 574
Région obscure d'Aston 546
— — cathodique 547
Relation d'incertitudes 431
Résistance active 600
— interne (différentielle) du tube 490
— de la mise à la terre 216
— ohmique 596
Résistivité électrique 184
Résonance 587
— paramétrique 628
Richardson-Dushman, formule de 484
Riecket, expérience de 455
Rogowski, bande de 290
Rotor du vecteur 251, 252
Rupture du vide 432

Seconde (unité de résistivité) 185
— inverse (unité de conductivité) 185
Seebeck, effet de 502
Self-inductance, coefficient de 295
Sel de Seignette 169
Semiconducteurs 471, 476
— à conductibilité mixte 480
—, redressement du courant 516
— de type *n* 480
— — *p* 480
Séparateur de masse 257
Série thermoélectrique 503
Solénoïde 236
Solution normale 449
Sonde électrique 87
— à flamme 88
— à gouttes 88
— radioactive 89
Spectrographie de masse 423
Spectrométrie de masse 423
Spin de l'électron 261, 327
Stokes, théorème de 252
Streamer 553
Stries 547
Supraconducteur 348
—, anneau supraconducteur 348
—, champ critique 353
—, courant critique 355
—, domaines 357
—, état intermédiaire 357
—, état mixte 358
—, état normal 348
—, état supraconducteur 348
—, modèle à deux liquides 348
— de première espèce 351, 357
—, profondeur de pénétration 352
— de seconde espèce 351, 357
—, température critique 348
—, température de transition 348
Supraconductibilité 347
Surfaces équipotentielles 80
Susceptibilité magnétique 268, 392
Système ouvert 686
— d'unités de mesure absolu 388
— — — électromagnétique (C.G.S.M.) 18
— — — électrostatique (C.G.S.E) 18
— — — gaussien 18, 224
— — — de Heaviside-Lorentz 389
— — — international (SI) 388

Tache cathodique 557
Température de dégénérescence du gaz électronique 466
Temps d'amortissement 576, 585
— d'établissement 585
— d'inertie 188
— de libre parcours 189
— de relaxation 220
Tension(s) de commande 491
— de décomposition de l'électrolyte 453
— efficace 604
— électrique 204
— magnétique 289
— et pressions maxwelliennes 138, 141, 314
Tétrode 493
Théorème sur la circulation du champ magnétique 245, 264
— — — —, forme différentielle 251, 265
Théorie des bandes 474
— électronique de la polarisation 148
— — — des diélectriques non polaires 148 à 155
— — — — polaires 155 à 158

Thermodynamique des diélectriques 126 à 130
— des substances magnétiques 317 à 319
Thermoélectricité 502
—, chaleur de Thomson 513
—, coefficient de force électromotrice thermoélectrique 504
—, coefficient de Thomson 514
—, point d'inversion 504
—, théorie de Clausius 512
—, théorie de Clausius-Thomson 515
Thomson Elihu, expérience de 282
Thomson William, effet 502, 513
— —, formule de 573
Titanate de baryum 169
Tolman et Stewart, expérience de 457
Tourniquet de Franklin 56
Townsend, coefficients α, β et γ 538, 542
—, expérience de 538
—, théorie de 538
Transformateur 631
—, courant à vide 633
— de Tesla 678
—, transport de l'énergie électrique à grande distance 635
Transistor 623
Transparence de grille 491
Travail d'extraction 480
Triode 489
— semiconductance (transistor) 623
Tritium 562
Trous 477
Tube(s) à mercure 557
— à rayons X 550

Van de Graaff, générateur de 60
Vecteur aimantation 263
— d'onde 648
— polarisation 64
Ventres 649
Vitesse de dérive (de mouvement ordonné) 182
— de la lumière 395
Volt (unité de tension) 205
Volta, arc de 555
— loi des contacts de 497
— série de 497

Weber (unité de flux magnétique) 296
Weiss, constante de 341
Wheatstone, pont de 209
Wiedemann-Franz, loi de 196, 468
Wilson, chambre de 142

Zone obscure de Faraday 547
— d'onde 658

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos 5
Introduction 7
§ 1. Action à distance et interaction des champs 7
§ 2. Charge électrique et intensité du champ électrique 12

Chapitre premier. LE CHAMP ÉLECTRIQUE

§ 3. La loi de Coulomb et le principe de superposition des champs électrostatiques 17
§ 4. Dipôle électrique 23
§ 5. Flux d'un vecteur. Théorème électrostatique de Gauss 28
§ 6. Applications du théorème de Gauss 33
§ 7. Forme différentielle du théorème électrostatique de Gauss . . 40
§ 8. Complément mathématique. Formule de Gauss-Ostrogradsky 44
§ 9. Théorème de Earenshaw 47
§ 10. Champ électrique dans les substances 49
§ 11. Comportement des conducteurs dans un champ électrique . . 54
§ 12. Polarisation des diélectriques 61
§ 13. Application du théorème de Gauss aux diélectriques 65
§ 14. Conditions aux limites 66
§ 15. Polarisabilité et permittivité diélectrique 69
§ 16. Champ électrique d'une sphère uniformément polarisée . . . 72
§ 17. Caractère potentiel du champ électrostatique 75
§ 18. Le potentiel électrique 78
§ 19. Calcul du potentiel connaissant l'intensité du champ électrique 82
§ 20. Mesure à l'électromètre des différences de potentiel. Sonde électrique 85
§ 21. Champ électrique de la Terre 90
§ 22. Problème mathématique général de l'électrostatique 92
§ 23. Méthode des images électriques 94
§ 24. Charge ponctuelle placée au-dessus de la surface plane d'un diélectrique 99
§ 25. Champ électrique d'un ellipsoïde conducteur chargé 101
§ 26. Capacité des conducteurs et des condensateurs 105
§ 27. Coefficients de potentiel et de capacité 114
§ 28. L'énergie électrique 117
§ 29. Localisation spatiale de l'énergie électrique 121
§ 30. Energie mutuelle des charges ponctuelles 125
§ 31. Thermodynamique des diélectriques 126
§ 32. L'énergie libre et les forces pondéromotrices 130
§ 33. Tensions et pressions maxwelliennes 137
§ 34. Procédé général de calcul des forces pondéromotrices 143

§ 35. Théorie électronique de la polarisation des diélectriques non polaires 148
§ 36. Théorie électronique de la polarisation des diélectriques gazeux polaires 155
§ 37. Piézoélectricité 160
§ 38. Pyroélectricité 167
§ 39. Ferroélectricité 169

Chapitre II. LE COURANT ÉLECTRIQUE

§ 40. La densité de courant et la loi de la conservation des charges électriques 182
§ 41. La loi d'Ohm 184
§ 42. Démonstration des lois d'Ohm et de Joule-Lenz 187
§ 43. Forces non électriques. Pile de concentration 199
§ 44. Lois de Joule-Lenz sous forme intégrale 202
§ 45. Les lois de Kirchhoff 207
§ 46. Courants stationnaires dans les conducteurs massifs 213
§ 47. La cuve électrolytique 216
§ 48. Processus d'établissement du courant pendant la charge et la décharge d'un condensateur 219

Chapitre III. LE CHAMP MAGNÉTIQUE

§ 49. Forces s'exerçant dans un champ magnétique sur les charges et les courants en mouvement 221
§ 50. Champ magnétique d'une charge animée d'un mouvement uniforme. Loi de Biot et Savart 228
§ 51. Application de la loi de Biot et Savart au calcul des champs magnétiques. Les systèmes d'unités de mesure 233
§ 52. Moment des forces s'exerçant dans un champ magnétique sur une spire parcourue par un courant 237
§ 53. Théorème de Gauss pour les champs magnétiques 240
§ 54. Compléments concernant les angles solides 242
§ 55. Théorème sur la circulation du champ magnétique dans le vide 245
§ 56. Forme différentielle du théorème sur la circulation 250
§ 57. Equivalence des champs magnétiques des courants et d'un feuillet magnétique 253
§ 58. Champ magnétique dans les substances 261
§ 59. Théorème sur la circulation du vecteur champ magnétique dans les substances 264
§ 60. Conditions aux limites pour les vecteurs B et H 266
§ 61. Susceptibilité et perméabilité magnétiques 268
§ 62. Travail de déplacement dans un champ magnétique permanent d'une spire parcourue par un courant 274
§ 63. Procédé de Gauss pour la mesure des champs magnétiques . . 275
§ 64. L'induction électromagnétique 276
§ 65. La règle de Lenz 280
§ 66. Conception maxwellienne de l'induction électromagnétique . . 284
§ 67. Le fluxmètre et la bande de Rogowski 288
§ 68. Inductance des fils électriques. Effets accompagnant l'application et la coupure d'un courant 295
§ 69. Energie magnétique des courants 301
§ 70. Localisation spatiale de l'énergie magnétique 306
§ 71. Théorème de la conservation du flux magnétique 309
§ 72. L'énergie et les forces 311
§ 73. Thermodynamique des substances magnétiques 317

§ 74. Le ferromagnétisme 319
§ 75. Propriétés magnétiques des atomes 325
§ 76. Le diamagnétisme 327
§ 77. Le paramagnétisme 331
§ 78. Les effets gyromagnétiques 338
§ 79. Théorie du ferromagnétisme 341
§ 80. Les supraconducteurs et leurs propriétés magnétiques 347

Chapitre IV. LES ÉQUATIONS DE MAXWELL

§ 81. Le courant de déplacement 363
§ 82. Le système d'équations de Maxwell 369
§ 83. Vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques 373
§ 84. Energie et flux d'énergie 379
§ 85. Le système international d'unités de mesure (SI) 388

Chapitre V. MOUVEMENT DES PARTICULES CHARGÉES DANS LES CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

§ 86. Mouvement dans les champs continus et uniformes 399
§ 87. Dérive d'une particule chargée dans un champ magnétique non uniforme en présence d'un champ électrique faible 403
§ 88. L'invariant adiabatique 412
§ 89. Détermination de la charge spécifique d'une particule 419
§ 90. Mesure de la charge élémentaire par la méthode des gouttes d'huile 423
§ 91. La masse électromagnétique 428

Chapitre VI. LES ÉLECTROLYTIQUES

§ 92. Electrolyse et dissociation électrolytique 433
§ 93. Exemples d'électrolyse 437
§ 94. Les lois d'électrolyse de Faraday et la charge élémentaire . . . 439
§ 95. Vitesses des ions et conductibilité électrique des électrolytes 441
§ 96. Piles galvaniques et accumulateurs 447

Chapitre VII. COURANTS ÉLECTRIQUES DANS LES MÉTAUX, LES SEMICONDUCTEURS ET DANS LE VIDE

§ 97. Inertie des électrons dans les métaux 455
§ 98. L'effet Hall 459
§ 99. Application aux métaux de la statistique de Fermi-Dirac . . . 463
§ 100. Métaux et semiconducteurs 471
§ 101. L'émission thermoïonique 480
§ 102. Les tubes électroniques et leurs applications 488
§ 103. Emission secondaire et auto-émission 493

Chapitre VIII. LES EFFETS ÉLECTRIQUES AUX CONTACTS

§ 104. Différence de potentiel de contact 497
§ 105. Le courant thermoélectrique 502
§ 106. L'effet Peltier 508
§ 107. Etude thermodynamique des effets thermoélectriques. Effet Thomson 511
§ 108. Redressement du courant par les contacts de semiconducteurs 516

Chapitre IX. COURANTS ÉLECTRIQUES DANS LES GAZ

§ 109. Ionisation et recombinaison 520
§ 110. Mesure des potentiels d'ionisation par la méthode du choc électronique 523

§ 111. Mesure des courants faibles 526
§ 112. Conductibilité extrinsèque des gaz 528
§ 113. Mesure des coefficients de recombinaison 531
§ 114. Méthodes de mesure de la mobilité des ions 535
§ 115. Théorie de Townsend 538
§ 116. Loi de Paschen 544
§ 117. Décharge lumineuse 545
§ 118. La décharge à étincelle 551
§ 119. La décharge en couronne 553
§ 120. La décharge en arc 555
§ 121. Le plasma 557

Chapitre X. OSCILLATIONS ET ONDES

§ 122. Equation du circuit oscillant 566
§ 123. Oscillations libres de l'oscillateur harmonique 571
§ 124. Oscillations amorties 575
§ 125. Le galvanomètre balistique 578
§ 126. Diagrammes vectoriels et notations complexes 580
§ 127. Oscillations forcées d'un oscillateur amorti soumis à l'action d'une force sinusoïdale 583
§ 128. Oscillations forcées excitées par une force non sinusoïdale. Théorème de Fourier 591
§ 129. La loi d'Ohm en courant alternatif (variant dans le temps suivant une loi sinusoïdale) 596
§ 130. Lois de Kirchhoff en courant alternatif 601
§ 131. Tensions et courants efficaces 604
§ 132. Processus d'établissement des oscillations 606
§ 133. Oscillations auto-excitées. Générateurs à tubes électroniques 617
§ 134. Oscillations de relaxation 625
§ 135. Excitation paramétrique des oscillations 626
§ 136. Théorie du transformateur 631
§ 137. Oscillations à deux degrés de liberté 636
§ 138. L'équation d'onde 641
§ 139. Ondes électromagnétiques planes 645
§ 140. Ondes stationnaires 649
§ 141. Champ de rayonnement du dipôle de Hertz 653
§ 142. Expériences de démonstration des ondes électromagnétiques . . 662
§ 143. Ondes dans les fils de Lecher 668
§ 144. Propriétés des courants rapidement variables. Effet de peau . . 675
§ 145. Pression et impulsion des ondes électromagnétiques 681
§ 146. Principes des transmissions radioélectriques 686

ANNEXES

Principales formules d'électrodynamique écrites dans le système SI 695
Valeurs de quelques constantes physiques 704
Index des noms 705
Index des matières . . . . . .